Concurso para Professor Adjunto do Departamento de Estatística da UFMG

(Edital N^o 627, De 31 de Outubro de 2011)

1. (20 pontos): As observações $Y_1,...,Y_n$ são descritas pela relação $Y_i = \theta x_i^2 + \varepsilon_i$, em que $x_1,...,x_n$ são fixas e $\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$ são variáveis aleatórias $N(0,\sigma^2)$ independentes e identicamente distribuídas (iid).

(a) **(8 pontos)** Encontre o estimador de θ pelos métodos dos mínimos quadrados e de máxima verossimilhança. Verifique se eles são não viciados e de variância mínima. Construa um intervalo de confiança para θ.

(b) **(6 pontos)** Proponha e justifique um estimador para e^{θ}. Qual a distribuição do estimador? Determine o seu vício e o seu erro quadrático médio.

(c) **(6 pontos)** Proponha um algoritmo para encontrar um intervalo de confiança bilateral para e^{θ} baseado na metodologia bootstrap paramétrico.

2. (20 pontos): Sejam $X_i \sim Poisson\,(\lambda_i),\ \lambda_i > 0, i = 1,\ldots,n$ variáveis aleatórias independentes de Poisson.

(a) **(10 pontos)** Calcule a função de probabilidade condicional de $X_i \mid X_i + X_j = m$ onde m é um inteiro positivo e as variáveis X_i e X_j formam um par qualquer das n variáveis aleatórias independentes de Poisson acima.

(b) **(10 pontos)** Seja o vetor aleatório *n*-dimensional $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ cujas componentes X_i são independentes e Poisson distribuídas. Calcule a probabilidade:

$$P\left(X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_n = n_n \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = m \right)$$

3. (20 pontos): Sejam $X_1,...,X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com função de densidade dada por:

$$f(x;\theta)=\frac{2x}{\theta^2},\ \ 0<x<\theta,\ \theta>0.$$

Suponha o estimador de θ:

$$\hat{\theta}=\left(\frac{2n+1}{2n}\right)X_{(n)},\ \ X_{(n)}=\max\{X_1,...,X_n\}.$$

(a) **(6 pontos)** Verifique se $\hat{\theta}$ é um estimador não viciado de θ.

(b) **(6 pontos)** Encontre $Var(\hat{\theta})$ e mostre que $\hat{\theta}$ é um estimador consistente de θ.

(c) **(8 pontos)** Mostre que $X_{(n)}/\theta$ é uma quantidade pivotal.

Você pode usar o seguinte resultado:

$$f(x_{(n)};\theta)=\frac{2n}{\theta^{2n}}x_{(n)}^{2n-1},\ \ 0<x_{(n)}<\theta,\quad \theta>0.$$

4. (20 pontos): Considere a sequência de variáveis aleatórias $X_1,Y_1,X_2,Y_2,X_3,Y_3,...$ independentes onde $X_i\sim U(0,1)$ e $Y_i\sim N(0,1)$, $\forall i\in\mathbb{N}$. Sejam $S_1=X_1$, $S_2=X_1+Y_1$, $S_3=X_1+Y_1+X_2$, $S_4=X_1+Y_1+X_2+Y_2$, ...

(a) **(6 pontos)** Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

(b) **(6 pontos)** A convergência é quase certa ou apenas em probabilidade?

(c) **(8 pontos)** Mostre que $\frac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$.

5. (20 pontos): Seja $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ uma amostra aleatória de tamanho n_1 de uma distribuição normal com média $-\infty < \mu < \infty$ e variância $k\sigma^2$, com $\sigma^2 > 0$ e $k > 0$. Seja $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_{n_2})$ uma amostra aleatória da distribuição normal com média μ e variância σ^2. Admita que μ e k sejam conhecidos e que X e Y sejam independentes. Considere a amostra $(X_1, ..., X_{n_1}, Y_1, ..., Y_{n_2})$.

(a) **(10 pontos)** Obtenha uma estatística suficiente e completa para σ^2.

(b) **(10 pontos)** Obtenha um intervalo de confiança para σ^2, com coeficiente de confiança $1-\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, que depende dos dados apenas através da estatística obtida em (a).