Concurso para Professor Adjunto do Departamento de Estatística da UFMG - 2013

1. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com média θ. O interesse do pesquisador é estimar $\eta = \theta e^{\theta} = P_\theta(X_1 = 1)$.

   (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\eta}_n$.

   (b) Encontre o estimador não viciado de mínima variância $\tilde{\eta}_n$.

   (c) Mostre que os dois estimadores são assintoticamente equivalentes, no sentido em que existe uma sequência de variáveis aletórias A_n que converge em probabilidade para 1 (um) tal que $\tilde{\eta}_n = A_n \hat{\eta}_n$.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E(|X_1|^{2k}) < \infty$ para algum inteiro $k \geq 1$. Prove que

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^j$$

   é um estimador não viciado para $\mu_j = E(X_1^j)$ e tal que $P(|m_j - \mu_j| > \epsilon) \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo $\epsilon > 0$ e $j = 1, \ldots, k$.

3. Considere variáveis aleatórias independentes Y_i com distribuição Normal$\big(\beta_0 + \beta_1(x_i - \overline{x}), \sigma^2\big)$, $i = 1, \ldots, n$, em que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são constantes conhecidas, $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$ e $(\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ é o vetor de parâmetros.

   (a) Apresente o teste da razão de verossimilhanças para testar a hipótese $H_0 : \beta_1 = \beta_{10}$ contra $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{10}$ a um nível de significância $\alpha \in (0, 1)$, em que β_{10} é uma constante.

(b) Apresente um intervalo de confiança para β_1 com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição Bernoulli(p). Defina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Suponha que p tem uma distribuição *a priori* Beta(α_p, β_p).

   (a) Encontre a função de verossimilhança ($f(y|p)$) e a distribuição *a posteriori* para p ($f(p|y)$).

   (b) Proponha um estimador bayesiano para p.

   (c) Compare o estimador bayesiano proposto em (b) com o estimador de máxima verossimilhança de p.

5. Suponha que o "modelo correto" para um determinado problema seja $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, em que ε_i, $i = 1, \ldots, n$ são independentes com distribuição Normal($0, \sigma^2$). Porém, foi ajustado um modelo sem intercepto, obtendo-se o seguinte estimador de mínimos quadrados para β:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

   (a) Determine o valor esperado de $\hat{\beta}$ sob o modelo correto.

   (b) Sob que condições este estimador é não viciado para β sob o modelo correto?

   (c) Obtenha a variância de $\hat{\beta}$ sob o modelo correto.