Uma modificação do índice de capacidade multivariado de Chen

Sueli Aparecida Mingoti (UFMG) - sueli@est.ufmg.br
Fernando Augusto Alves Glória (UFMG) - bodim@est.ufmg.br

Resumo

Neste artigo apresentamos uma modificação na implementação do coeficiente de capacidade multivariado de Chen (1994). A proposta é utilizar as idéias contidas no artigo de Hayter & Tsui (1994) para controle de qualidade de processos multivariados no cálculo do coeficiente de Chen. Desta forma, o problema seria resolvido através de um processo de simulação e não pela resolução analítica ou numérica de equações que levem a determinação do coeficiente de capacidade.
Palavras chave: Controle de qualidade, Índices de capacidade,Processos multivariados.

1. Introdução

Produtos e processos de produção são monitoriados através da observação de amostras de determinadas características relacionadas à qualidade final do produto (processo) sendo estas, na maioria das vezes, correlacionadas entre si. Embora o controle do processo e a avaliação de sua capacidade possa ser feita analisando-se cada característica separadamente através de gráficos de controle de Shewhart (Montgomery,1996) ou gráficos derivados, e do cálculo de índices de capacidade do tipo $C_p, C_{pk}, C_{pm}, P_{pk}$, esta análise não leva em consideração a correlação natural existente entre as características de qualidade. Portanto, pode ser melhorada se técnicas estatísticas multivariadas apropriadas forem utilizadas. No que tange ao controle de processos via construção de gráficos, a extensão para o caso multivariado é feita considerando-se testes estatísticos apropriados como o teste T^2 de Hotelling para comparação de vetores de médias populacionais e que é fundamentado no fato de que os valores das variáveis de interesse proveem de uma distribuição normal multivariada (Johnson & Wichern, 2000). A partir do teste T^2 de Hotelling um elipsóide de confiança é construido que permite verificar se o processo está ou não sob controle estatístico considerando-se todas as características de qualidade de interesse simultâneamente. O uso de gráficos de controle multivariados é recente e algumas referências interessantes de aplicação são: Mason, Chou *et. al* (2001), Mason, Tracy *et. al.* (1997), Hayter & Tsui (1994) e Nomikos & MacGregor (1995) que fazem uma espécie de sumário sobre o uso destas técnicas. Uma possível crítica ao uso do teste T^2 de Hotelling para avaliar o processo vem do fato de que no momento em que a hipótese nula é rejeitada, torna-se necessário identificar as características de qualidade responsáveis pela sua rejeição, o que muitas vezes é feito através de gráficos de Shewhart para cada variável isoladamente, corrigindo-se ou não, os níveis de significância dos testes feitos separadamente para a média de cada característica. Testes de comparações múltiplas de Bonferroni (Johnson & Wichern,2000), por exemplo, podem ser usados, no entanto estes testes não levam em consideração a correlação existente entre variáveis respostas. Algumas altenativas ao teste T^2 de Hotelling estão publicadas na literatura dentre elas, a de Hayter & Tsui (1994). Estes autores propõem que intervalos de confiança (ou gráficos de controle) sejam feitos separadamente para cada variável mas de modo que a abertura dos limites de confiança levem em consideração a correlação existente entre as variáveis respostas. O processo de construção dos intervalos de confiança assegura que conjuntamente o nível de significância global do teste de comparação multivariada é mantido constante e igual ao fixado inicialmente para o teste, além de permitir que se tenha uma regra que automaticamente identifica as variáveis causadoras da situação de "falta de controle" quando isto ocorre. Esta identificação rápida das variáveis responsáveis pelos problemas no processo seria o grande motivador para que o usuário passasse a utilizar a proposta de Hayter & Tsui (1994) ao invés do teste T^2 de Hotelling combinado com os intervalos de confiança de Bonferroni. Para amostras grandes a proposta de Hayter & Tsui (1994) também pode ser aplicada independentemente do fato das características de qualidade terem ou não distribuição normal multivariada.

Em relação a avaliação da capacidade de processos multivariados tem-se propostas que vão desde índices calculados separadamente para cada variável em questão até índices mais elaborados que tentam de algum modo compor a informação geral de todas as variáveis (Taan, Subbalah *et. al*,1993; Tang & Barnett,1998; Zhang,1998). A maioria dos artigos trata o problema via procedimentos de Estatística Paramétrica. Poucos são os artigos na área de Estatística Não-Paramétrica (Polansky, 1998, 2000; Yeh & Chen,1999) ou Bayesiana (Niverthi & Dey, 2000, Adler & Shper,1994; Bernardo & Irony,1996). Um artigo interessante que faz uma resenha dos índices de capacidade desde 1992 até 2000 foi publicado recentemente por Kotz & Johnson (2002). Em Wang *et. al* (2000) uma comparação de três índices de capacidade multivariados é feita considerando-se alguns exemplos sendo que um dos índices de capacidade discutidos foi o proposto por Chen (1994). O índice de capacidade de Chen é bastante interessante mas da forma como foi sugerido, necessita de resolução analítica ou numérica de algumas equações o que pode dificultar seu uso.

O objetivo deste artigo é mostrar como as idéias sugeridas em Hayter & Tsui (1994) para correção dos limites de confiança (controle) podem ser utilizadas para a determinação do coeficiente de capacidade de Chen (1994) facilitando seu uso em problemas práticos. Para a implementação computacional do procedimento foi desenvolvido o programa Cralpha no *software S-Plus*.

2. Correção dos limites de controle proposta em Hayter & Tsui (1994)

Seja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)'$ o vetor contendo as características de qualidade de interesse com distribuição Normal p-variada com vetor de médias $\mu_0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \ldots, \mu_p^0)'$ e matriz de covariâncias Σ_{pxp}, ou seja, $\boldsymbol{X} \sim N_p(\mu_0, \Sigma_{pxp})$. De acordo com Hayter & Tsui (1994) para cada variável X_i os limites de confiança de (1-α)100%, $0 < \alpha < 1$, são dados pela equação:

$$Prob\left[\left|\frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i}\right| \leq C_{R,\alpha}, \forall\, i = 1,2,\ldots,p\right] = 1 - \alpha \qquad (1)$$

o que significa dizer que a probabilidade de que o intervalo: $\lfloor X_i - \sigma_i C_{R,\alpha} \,;\, X_i + \sigma_i C_{R,\alpha} \rfloor$ contenha o valor verdadeiro μ_i^0 para todo *i*, *i=1,2,...,p*, é igual a (1-α). A escolha do valor crítico $C_{R,\alpha}$ depende da matriz de correlação P_{pxp} do vetor aleatório ***X***, logo a estrutura de correlação de ***X*** afeta todos os intervalos simultâneamente, ao contrário dos intervalos simultâneos de Bonferroni. Deste modo, o processo é considerado como fora de controle quando:

$$M = max\{ \left| \frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i} \right| , i = 1,2,..., p \} > C_{R,\alpha} \qquad (2)$$

O valor de $C_{r,\alpha}$ é feito através de um algorítimo que envolve simulação de amostras de uma população Normal p-variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias P_{pxp}, que na prática é estimada pela matriz de correlação amostral das variáveis (Johnson & Wichern, 2000). Os passos deste algorítimo são mostrados na Figura 1.

---

1. Gerar um grande número N de vetores de observações de uma normal p-variada com vetor de médias zero e matriz de correlação P_{pxp}, denotados por: $X^1, X^2, \ldots, X^N$.

2. Calcular a estatística M para cada um dos vetores $X^i = (X_1^i, X_2^i, \ldots, X_p^i)$ gerados no passo 1, isto é, para todo $i=1,2,\ldots,N$ calcular:

$$M^i = max\{ \left| X_j^i \right| , j = 1,2,..., p \}$$

3. Encontrar o percentil de ordem (1-α) da amostra $(M^1, M^2, \ldots, M^N)$ e usar o valor encontrado como sendo o valor crítico $C_{R,\alpha}$.

Figura 1. Algorítmo usado para encontrar a constante $C_{R,\alpha}$ - Caso Normal Multivariado

Hayter & Tsui (1994) sugerem que sejam feitas $N=100000$ simulações para o encontro de $C_{R,\alpha}$ com grande precisão e mostram que os intervalos de confiança assim contruidos são melhores que os intervalos de Bonferroni. Quando a amostra é grande, o algorítimo da Figura 1 pode ser modificado sendo a função distribuição empírica de M calculada usando-se apenas os vetores observados na amostra original e não mais através de uma simulação da distribuição normal p-variada. Neste caso o método independe do fato do vetor $\boldsymbol{X}$ ter ou não uma distribuição normal sendo portanto, um método não-paramétrico.

3 Índice de Capacidade Multivariado de Chen (1994)

Seja $\boldsymbol{V}$ a região de especificação do processo dada por:

$$V = \{ X \in \Re^p : \left| X_i - \mu_i^0 \right| \le r_i , i = 1,2,..., p \} \qquad (3)$$

onde μ_i^0 são os valores médios especificados e $r_i, 1 \le i \le p$ são constantes de especificação do processo. Então, o índice de capacidade multivariado de Chen (1994) é definido como $MC_p = \frac{1}{r}$ onde r é tal que:

$$Prob\left[max\{\frac{|X_i - \mu_i^0|}{r_i}, \forall i = 1,2,..., p\} \leq r \right] = 1-\alpha \quad (4)$$

Se o valor de MC_p for maior que 1 o processo é considerado como capaz. O valor da constante r é obtido através da função distribuição acumulada F_H da variável H definida por:

$$H = max\{\frac{|X_i - \mu_i^0|}{r_i}, \forall i = 1,2,..., p\} \quad (5)$$

isto é, para um determinado valor de probabilidade $\alpha, 0<\alpha<1$, determina-se o valor de r tal que $r = F_H^{-1}(1-\alpha)$ e deste modo quando o valor de MC_p for maior que 1 o processo será considerado como capaz com um certo coeficente de confiança $(1-\alpha)100\%$.
É interessante observar a similaridade entre as equações (1), (2) e (4). Deste modo, pode-se pensar em combinar-se as propostas de Hayter & Tsui (1994) e Chen (1994) para construirmos um índice de capacidade modificado que será descrito na seção a seguir.

4. Índice de capacidade multivariado modificado

Considerando a região de especificação ***V*** como dada em (3) e usando o algorítimo descrito na Figura 1, para um valor pré-especificado de $\alpha, 0<\alpha<1$, podemos encontrar a constante $C_{R,\alpha}$ tal que:

$$Prob\left[\{ max\frac{|X_i - \mu_i^0|}{\sigma_i}, 1 \leq i \leq p \} \leq C_{r,\alpha}\right] = (1-\alpha) \quad (6)$$

o que significa dizer que para todo *i*, *i=1,2,…,p*, a probabilidade de que o intervalo: $\lfloor X_i - \sigma_i C_{R,\alpha} ; X_i + \sigma_i C_{R,\alpha} \rfloor$ contenha o valor verdadeiro μ_i^0 é igual a $(1-\alpha)$. Logo o processo será considerado capaz se para todo *i=1,2,…,p*:

$$\frac{r_i}{\sigma_i C_{r,\alpha}} \geq 1 \quad \text{ou equivalentemente} \quad \frac{\sigma_i C_{r,\alpha}}{r_i} \leq 1 \quad (7)$$

Assim, podemos definir como o índice de capacidade multivariado do processo a quantidade:

$$C_p^m = max\{\frac{\sigma_i C_{r,\alpha}}{r_i}, i = 1,2,3..., p\} \quad (8)$$

considerando o processo capaz quando C_p^m for menor ou igual a 1. O interessante neste procedimento é que não há necessidade de se encontrar analiticamente a distribuição de probabilidades da função ***Y=max(X)*** quando ***X*** tem distribuição normal p-variada pois todo o processo de encontro de $C_{R,\alpha}$ envolve apenas um processo de simulação não complicado.

O procedimento descrito nesta seção pode ser implementado no caso de regiões de especificação ***V*** mais complexas e que trazem maior dificuldade para o encontro da constante de determinação da capacidade do processo (*r*) (WANG *et. al.*, 2000).

5. Exemplo de aplicação

Neste exemplo vamos utilizar *p=4* variáveis do banco de dados apresentado no artigo de Niverthi & Dey (2000) que trata de medidas em centímetros, de várias características de qualidade de um determinado tipo de eixo que faz parte do motor de aeronaves. A fabricação dos eixos é feita com alto grau de precisão. São *n=50* observações e as 4 variáveis que trataremos neste exemplo, de acordo com a notação do artigo original, são: MQI128, MQI444, MQI519 e MQI514. Os vetores com os limites de especificação das 4 variáveis são respectivamente dados por:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 6,395 \\ 0,597 \\ 1,854 \\ 23,679 \end{bmatrix} \qquad LI_0 = \begin{bmatrix} 6,393 \\ 0,594 \\ 1,852 \\ 23,677 \end{bmatrix} \qquad LU_0 = \begin{bmatrix} 6,397 \\ 0,600 \\ 1,856 \\ 23,681 \end{bmatrix}$$

onde μ_0, LI_0 e LU_0 representam respectivamente, os limites médio, inferior e superior de especificação. As matrizes de covariâncias e de correlação amostral das 4 variáveis, em notação exponencial, são dadas respectivamente por:

$$S_{4x4} = \begin{bmatrix} 7.773061e\text{-}008 & -6.930612e\text{-}008 & 3.102041e\text{-}008 & -2.995102e\text{-}008 \\ -6.930612e\text{-}008 & 1.326122e\text{-}006 & -1.102041e\text{-}007 & 3.391837e\text{-}008 \\ 3.102041e\text{-}008 & -1.102041e\text{-}007 & 1.175510e\text{-}007 & -3.959184e\text{-}008 \\ -2.995102e\text{-}008 & 3.391837e\text{-}008 & -3.959184e\text{-}008 & 1.420449e\text{-}007 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$R_{4x4} = \begin{bmatrix} 1.0000000 & -0.21586575 & 0.3245176 & -0.28503800 \\ -0.2158658 & 1.00000000 & -0.2791211 & 0.07815024 \\ 0.3245176 & -0.27912110 & 1.0000000 & -0.30639356 \\ -0.2850380 & 0.07815024 & -0.3063936 & 1.00000000 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

O valor do coeficiente de capacidade modificado C_p^m foi estimado usando-se a amostra de n=50 observações e o valor de $C_{R,\alpha}$ obtido considerando-se o procedimento de simulação descrito na Figura 1 com *N=1000*, *10000* e *100000* considerando os dados do processo como sendo gerados por uma distribuição normal p= 4 variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias dada como em (10). Os resultados estão no Quadro 1 e como pode ser visto tanto os valores de $C_{R,\alpha}$ quanto os de C_p^m são muito próximos entre si principalmente para *N=10000* e *N=100000.*

O Quadro 2 apresenta os resultados de uma simulação feita para que se observe a influência de *N* no encontro do valor de $C_{R,\alpha}$. Nesta simulação o procedimento descrito na Figura 1 foi repetido para *k=100* amostras aleatórias de tamanhos *N=1000*, *10000* e *100000* de uma distribuição normal p= 4 variada com vetor de médias zero e matriz de covariâncias dada como em (10). Os resultados médios de $C_{R,\alpha}$ com o respectivo desvio padrão estão apresentados no Quadro 2 e nos mostra que as médias de $C_{R,\alpha}$ obtidas para cada *N* são aproximadamente iguais e o desvio padrão é bem pequeno. Como o programa Cralpha demanda mais tempo para simular a amostra de tamanho *N=100000* e como para *N= 1000* tem-se uma maior dispersão nos valores, sugerimos que seja *N=10000* nas simulações necessárias para o encontro de $C_{R,\alpha}$.

N	*1000*	*10000*	*100000*
$C_{R,\alpha}$	2,503917	2,487538	2,486163
C_p^m	1,083569	0,9298043	0,959532

Quadro 1: Valores de $C_{R,\alpha}$ e C_p^m - Exemplo Aeronaves

N	Média de $C_{R,\alpha}$	Desvio padrão de $C_{R,\alpha}$
1000	2,480452104	0,052721245
10000	2,478094329	0,016605494
100000	2,478268411	0,00512441

(*) resultados médios de n=100 amostras de tamanhos *N*.

Quadro 2: Média e desvio padrão de $C_{R,\alpha}$ - estudo simulado

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou a execução deste trabalho.

Referências

ADLER,YA, SHPER,V. (1994) - Some Remarks on Bayesian Approach to Process Capability Estimates. *5 th International Meeting on Bayesian Statistics*, Alicante, Spain.

BERNARDO, J. M., IRONY, T. X. (1996) - A General Multivariate Bayesian Process Capability Index, *Statistician* Vol. 45, p. 487-502.

CHEN, H. (1994) - A Multivariate Process Capability Index Over a Rectangular Solid Tolerance Zone. Statistica Sinica Vol. 4, p. 749-758.

HAYTER, A. J., TSUI, K-L. (1994) - Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems, *Journal of Quality Technology* Vol. 26, n. 3, p.197-208.

JOHNSON, R. A. & WICHERN, D. W. (2000) - *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

KOTZ, S., JOHNSON, N. L. (2002) - Process Capability Indices-A Review, 1992-2000, *Journal of Quality Technology* Vol.34, n.1, p.2-39.

MASON, R. L., CHOU, Y-M, YOUNG, J. C. (2001) - Applying Hotelling's T^2 Statistic to Batch Processes, *Journal of Quality Technology* Vol. 33, n. 4, 466-479, 2001.

MASON, R. L., TRACY, N.D. YOUNG, J. C. (1997) - A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Chart Signals, *Journal of Quality Technology* Vol. 29, p. 99-108.

MONTGOMERY, D. C. (1996) - *Introduction to Statistical Quality Control*. New York: John Wiley.

NIVERTHI, M., DEY, D. K. (2000) - Multivariate Process Capability: A Bayesian Perspective. *Communications in Statistics-Simulation and Computation* Vol. 29, p. 667-687.

NOMIKOS, P., MACGREGOR, J. F. (1995) - Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes. *Technometrics* Vol. 37, p. 41-59.

POLANKSY, A. M. (1998) - A Somooth Nonparametric Approach to Process Capability. *Quality and Reliability Engineering International* Vol.14, p. 43-48.

POLANSKY, A. M. (2000) - An Algorithmn for Computing a Smooth Non-Parametric Capability Estimate. *Journal of Quality Technology* Vol. 32, p. 284-289.

TAAN, W. , SUBBAIHA, P., LIDDY, J. W. (1993) - A Note on Multivariate Capability Indices. *Journal of Applied Statistics* Vol. 20, p.339-351.

TSUI, K. L. (1997) - Interpretation of Process Capability Indices and Some Alternatives*.* *Quality Engineering* Vol. 9, p.587-596.

WANG, F. K., HUBELE, N.F.,LAWRENCE, F. P., MISKUKIN, J.O., SHARIARI, H. (2000) - Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology* Vol. 32, n.3, p.263-275.

YEH, A. B., CHEN, H. (1999) - A Nonparametric Multivariate Process Capability Index. *Preprint*,1999.

ZHANG, N. Z. (1998) - Estimating Process Capability Indexes for Autocorrelated Data. *Journal of Applied Statistics* Vol. 25, n.4, p. 559-574.