# 2 Probabilidade

## ESQUEMA DO CAPÍTULO

# Objetivos de Aprendizagem

Após estudo cuidadoso deste capítulo você deverá ser capaz de:

1. Compreender e descrever espaços amostrais e eventos de experimentos aleatórios, por meio de gráficos, tabelas, listas e diagramas de árvore;
2. Interpretar probabilidades e utilizar as probabilidades de um resultado, para calcular as probabilidades de eventos em espaços amostrais discretos;
3. Calcular probabilidades de eventos conjuntos, tais como uniões e interseções, a partir de probabilidades de eventos individuais;
4. Interpretar e calcular a probabilidade condicional de eventos;
5. Determinar a independência de eventos e utilizar a independência para calcular probabilidades;
6. Utilizar o teorema de Bayes para calcular probabilidades condicionais;
7. Entender variáveis aleatórias.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

## 2.1.1 Introdução

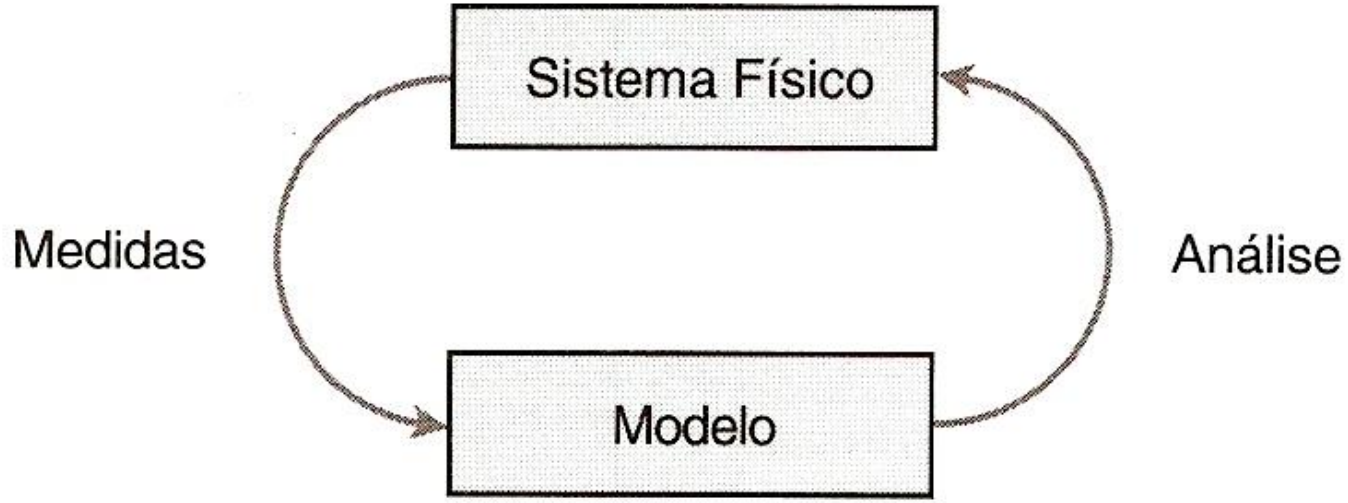



**Fig. 2.1** Interação contínua entre o modelo e o sistema físico

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

## 2.1.1 Introdução

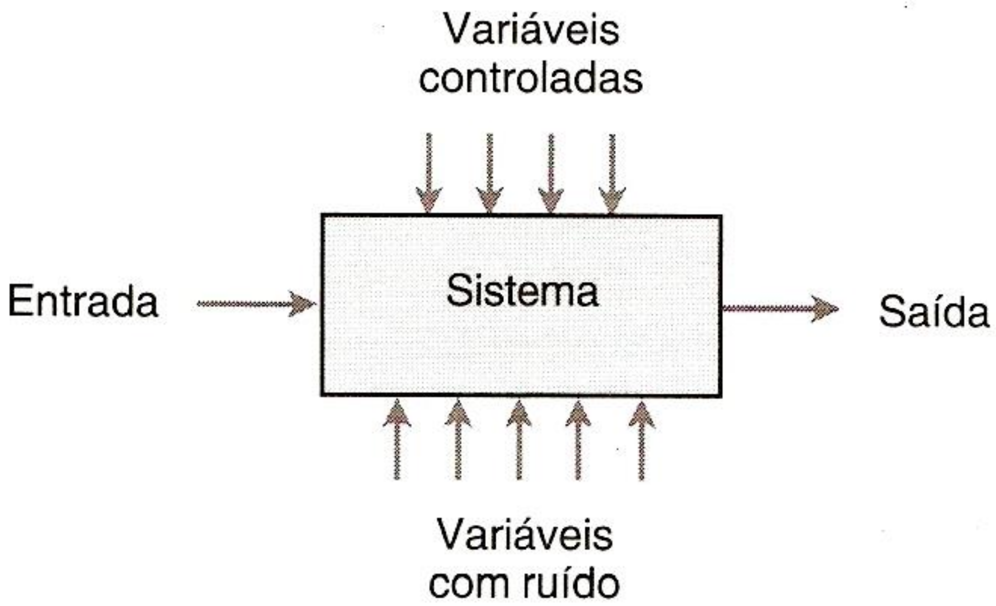



**Fig. 2.2** Variáveis com ruído afetam a transformação de entradas em saídas

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

## 2.1.1 Introdução

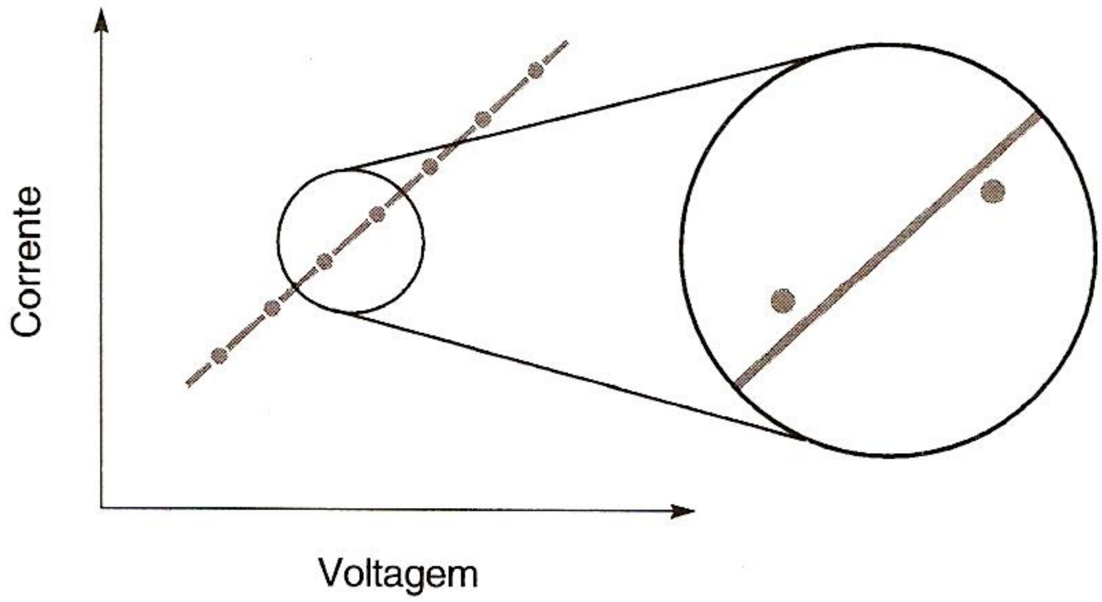



**Fig. 2.3** Um exame detalhado do sistema identifica desvios do modelo

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

## 2.1.1 Introdução

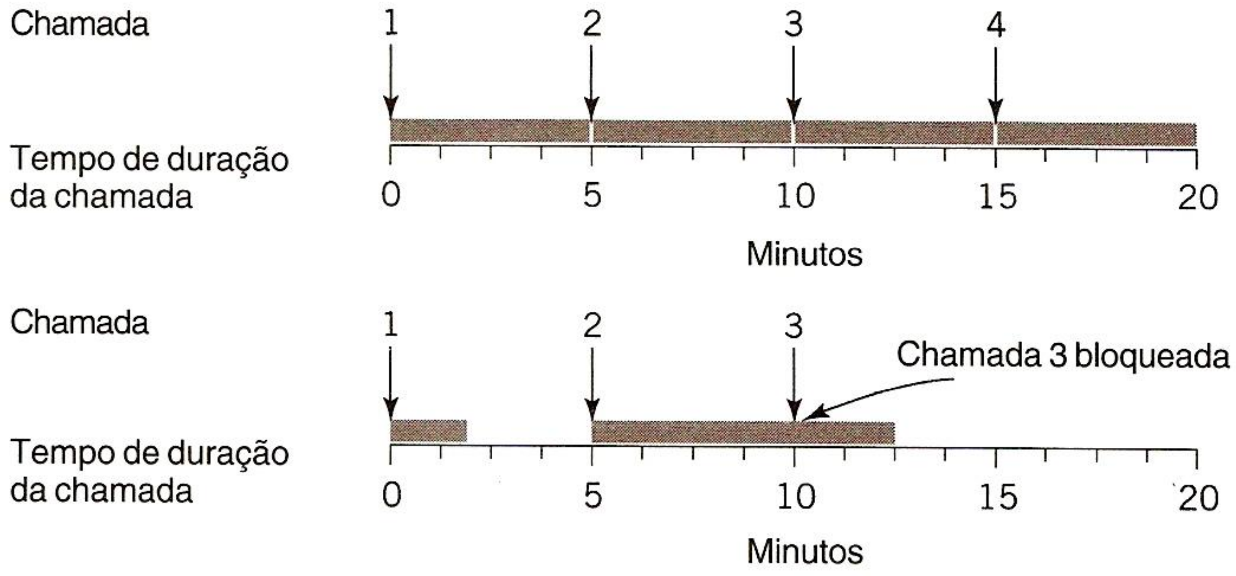



**Fig. 2.4** Variação causa interrupção no sistema

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- Definição:

  Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, muito embora seja repetido toda vez da mesma maneira, é chamado **experimento aleatório**.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- Definição:

  O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado **espaço amostral** do experimento.

  O espaço amostral é denotado por **S**.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- Exemplo 2.1:

**Câmera *Flash*** Considere um experimento em que você seleciona uma câmera de telefone celular e registra o tempo de recarga de um *flash* (o tempo necessário para aprontar a câmera para outro *flash*). Os valores possíveis para esse tempo dependem da resolução do temporizador e dos tempos máximo e mínimo de recarga. Entretanto, pode ser conveniente definir o espaço amostral como simplesmente a linha real positiva

$$S = R^{+} = \{x \mid x > 0\}$$

Se é sabido que todos os tempos de recarga estão entre 1,5 e 5 segundos, o espaço amostral pode ser

$$S = \{x \mid 1{,}5 < x < 5\}$$

Se o objetivo da análise for considerar apenas o fato do tempo de recarga ser baixo, médio ou alto, então o espaço amostral poderá ser considerado como o conjunto de três resultados

$$S = \{baixo, médio, alto\}$$

Se o objetivo da análise for considerar apenas o fato da câmera particular satisfazer ou não as especificações do tempo de recarga mínimo, então o espaço amostral poderá ser simplificado para um conjunto de dois resultados

$$S = \{sim, não\}$$

que indica se a câmera satisfaz ou não.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- Exemplo 2.2:

**Especificações da Câmera** Suponha que os tempos de recarga das duas câmeras sejam registrados. A extensão da linha real positiva $R$ é considerar o espaço amostral como o quadrante positivo do plano

$$S = R^{+} \times R^{+}$$

Se o objetivo da análise for considerar apenas o fato das câmeras satisfazerem ou não as especificações de fabricação, cada câmera poderá ou não satisfazer. Abreviamos *sim* ou *não* por $s$ e $n$. Se o par ordenado $sn$ indicar que a primeira câmera satisfaz e a segunda não, o espaço amostral poderá ser representado por quatro resultados:

$$S = \{ss, sn, ns, nn\}$$

Se estivermos interessados somente no número de câmeras conforme na amostra, podemos resumir o espaço amostral como

$$S = \{0, 1, 2\}$$

Como outro exemplo, considere um experimento em que câmeras sejam testadas até que o tempo de recarga do flash não mais encontre as especificações. O espaço amostral pode ser representado por

$$S = \{n, sn, ssn, sssn, ssssn \text{ e assim por diante}\}$$

e esse é um exemplo de um espaço amostral discreto que é infinito contável.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- **Diagramas em forma de árvore:**

  Espaços amostrais podem também ser descritos graficamente com diagramas em forma de árvore

  - quando o espaço amostral puder ser construído em várias etapas ou estágios, podemos representar cada uma das $n_1$ maneiras de completar a primeira etapa, como um ramo de uma árvore;
  - cada uma das maneiras de completar a segunda etapa pode ser representada por $n_2$ ramos, começando das extremidades dos ramos originais e assim sucessivamente.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

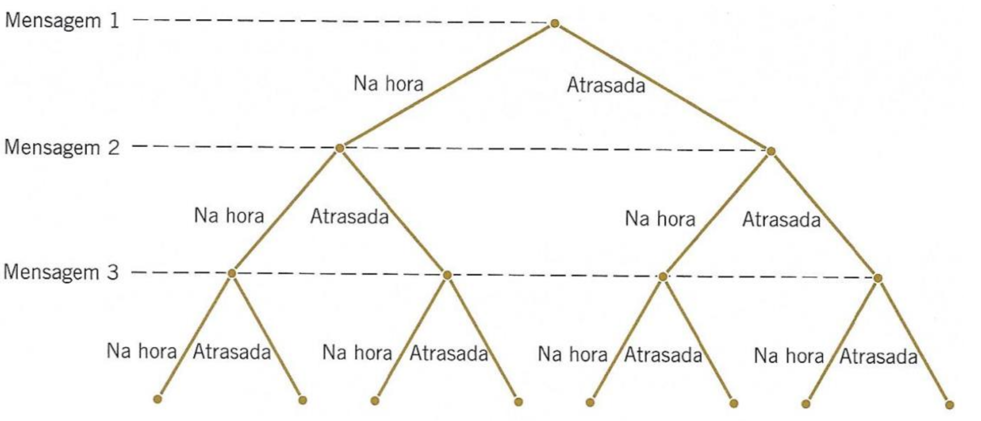
- Exemplo 2.3:

**Atrasos nas Mensagens** Cada mensagem em um sistema digital de comunicação será classificada dependendo de ela ser recebida dentro de um tempo especificado pelo projeto do sistema. Se três mensagens forem classificadas, aplique um diagrama em forma de árvore para representar o espaço amostral de resultados possíveis.

Cada mensagem pode ser recebida em tempo ou atrasada. Os resultados possíveis para três mensagens podem ser mostrados por meio dos oito ramos no diagrama em forma de árvore mostrados na Figura 2-5.

Interpretação Prática: Um diagrama em forma de árvore pode representar efetivamente um espaço amostral. Mesmo se uma árvore se tornar muito grande para ser construída, ela ainda pode clarificar conceitualmente o espaço amostral.

**Fig. 2.5** Diagrama em forma de árvore para três mensagens



# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.2 Espaços Amostrais

- Definição:

  Um espaço amostral é **discreto** se ele consiste em um conjunto finito ou infinito contável de resultados.

  Um espaço amostral é **contínuo** se ele contém um intervalo (tanto finito como infinito) de número reais.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

## 2.1.3 Eventos

- Definição:
  Um **evento** é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.
- Operações básicas:
  - A **união** de dois eventos é o evento que consiste em todos os resultados que estão contidos nos dois eventos. Denotamos a união por $E_1 \cup E_2$.
  - A **interseção** de dois eventos é o conjunto que consiste em todos os resultados que estão contidos em ambos os eventos, simultaneamente. Denotamos a interseção por $E_1 \cap E_2$.
  - O **complemento** de um evento em um espaço amostral é o conjunto dos resultados no espaço amostral que não estão no evento. Denotamos o complemento do evento E por $E'$.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.3 Eventos

- Exemplo 2.6:

**Eventos** Considere o espaço amostral $S = \{ss, sn, ns, nn\}$ do Exemplo 2-2. Suponha que o subconjunto de resultados para os quais, no mínimo, uma peça seja conforme, seja denotado como $E_1$. Então,

$$E_1 = \{ss, sn, ns\}$$

O evento em que ambas as peças são não conformes, denotado como $E_2$, contém somente o único resultado, $E_2 = \{nn\}$. Outros exemplos de eventos são $E_3 = \varnothing$, o conjunto nulo, e $E_4 = S$, o espaço amostral. Se $E_5 = \{sn, ns, nn\}$,

$$E_1 \cup E_5 = S \qquad E_1 \cap E_5 = \{sn, ns\} \qquad E_1' = \{nn\}$$

Interpretação Prática: Eventos são usados para definir resultados de interesse a partir de um experimento aleatório. Alguém está frequentemente interessado nas probabilidades de eventos específicos.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.3 Eventos

- Exemplo 2.7:

Como no Exemplo 2-1, os tempos de recarga de câmeras devem usar o espaço amostral $S = R^+$, o conjunto de números reais positivos. Seja

$$E_1 = \{x \mid 10 \le x < 12\} \text{ e } E_2 = \{x \mid 11 < x < 15\}$$

Então,

$$E_1 \cup E_2 = \{x \mid 10 \le x < 15\}$$

e

Também,

$$E_1' = \{x \mid x < 10 \text{ ou } 12 \le x\}$$

e

$$E_1' \cap E_2 = \{x \mid 12 \le x < 15\}$$

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.3 Eventos

- Diagramas de Venn

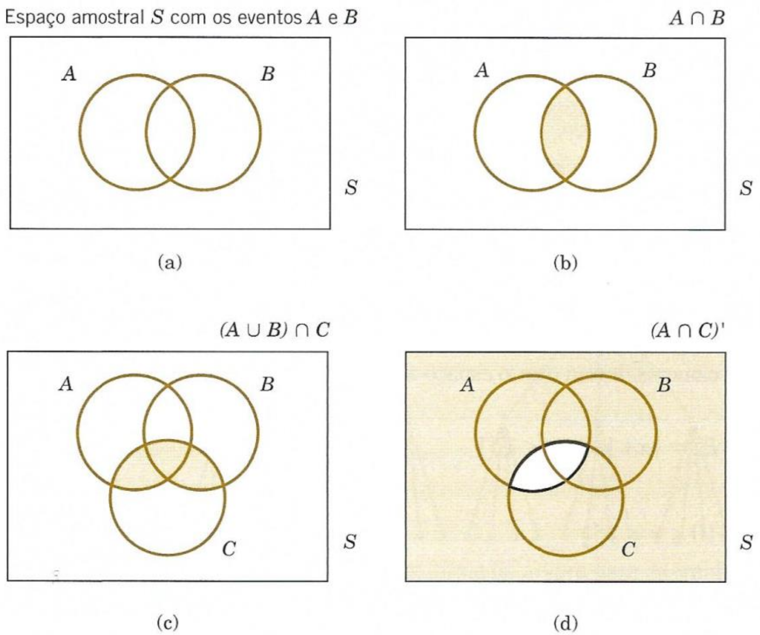



**Fig. 2.8** Diagramas de Venn

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.3 Eventos

- Definição:

Dois eventos, denotados por $E_1$ e $E_2$, tal que

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$

são denominados **mutuamente excludentes**.

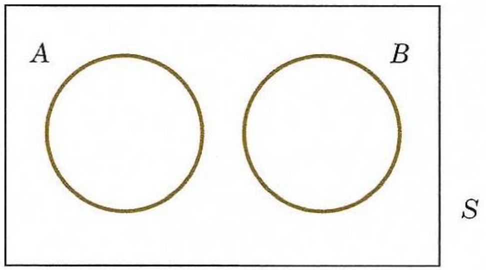



**Fig. 2.9** Eventos mutuamente excludentes

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.4 Técnicas de Contagem

- **Regra da Multiplicação** (para técnicas de contagem): Considere uma operação que possa ser descrita como uma sequência de $k$ etapas e que:
  - o número de maneiras de completar a etapa 1 seja $n_1$;
  - o número de maneiras de completar a etapa 2 seja $n_2$;
  - e assim por diante;

  O número total de maneiras de completar a operação será: $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$.
- **Exemplo 2.9**:

Projeto de um *Site* na Internet O projeto de um *site* na internet consiste em quatro cores, três fontes e três posições para uma imagem. Da regra da multiplicação, $4 \times 3 \times 3 = 36$ projetos diferentes são possíveis.

Interpretação Prática: A regra da multiplicação e outras técnicas de contagem nos capacitam a determinar facilmente o número de resultados em um espaço amostral ou eventos, e isso, por sua vez, permite calcular as probabilidades dos eventos.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.4 Técnicas de Contagem

- **Permutações**:
  O número de permutações de $n$ elementos é $n!$, sendo:
  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$;
- **Permutações de subconjuntos**:
  O número de permutações de subconjuntos de $r$ elementos selecionados de um conjunto de $n$ elementos diferentes é:
  $P_r^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1) = n!/(n-r)!$;
- **Exemplo 2.10**:

Placa de Circuito Impresso Uma placa de circuito impresso tem oito localizações diferentes em que um componente pode ser colocado. Se quatro componentes diferentes forem colocados na placa, quantos projetos diferentes são possíveis?

Cada projeto consiste em selecionar uma localização das oito localizações para o primeiro componente, uma localização das sete restantes para o segundo componente, uma localização das seis restantes para o terceiro componente e uma localização das cinco restantes para o quarto componente. Portanto,

$$P_4^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{8!}{4!}$$

$= 1680$ projetos diferentes são possíveis.

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.4 Técnicas de Contagem

- **Permutações de objetos similares**:
  O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + ... + n_r$ objetos, dos quais $n_1$ são do tipo 1, $n_2$ são do tipo 2 e e assim sucessivamente, é:
  $n!/(n_1!n_2! \ldots n_r!)$;
- **Exemplo 2.11**:

**Programação de um Hospital** Um centro cirúrgico de um hospital necessita programar três cirurgias de joelho e duas cirurgias de quadris em um dia. Denotamos uma cirurgia de joelho e de quadris como $j$ e $q$, respectivamente. O número de sequências possíveis das três cirurgias de joelho e das duas cirurgias de quadris é

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$

As 10 sequências são facilmente sumarizadas:

$$\{jjjqq, jjqjq, jjqqj, jqjjq, jqjqj, jqqjj, qjjjq, qjjqj, qjqjj, qqjjj\}$$

# 2.1 Espaços Amostrais e Eventos

2.1.4 Técnicas de Contagem

- **Combinações**:

O número de combinações, subconjuntos de tamanho $r$, que pode ser selecionado a partir de um conjunto de $n$ elementos, é denotado como $\binom{n}{r}$ ou $C_r^n$ e

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Exemplo 2.13**:

**Disposição de Placa de Circuito Impresso** Um componente pode ser colocado em oito localizações diferentes em uma placa de circuito impresso. Se cinco componentes idênticos forem colocados na placa, quantos projetos diferentes serão possíveis?

Cada projeto é um subconjunto das oito localizações que devem conter os componentes. Da Equação, o número de projetos possíveis é

$$\frac{8!}{5!3!} = 56$$

# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

2.2.1 Introdução

- Definição:

  Um espaço amostral será **discreto** se consistir em um conjunto finito (ou infinito contável) de resultados.

# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

2.2.1 Introdução

**Probabilidade**

- Utilizada para quantificar verossimilhança ou chance;
- Nas aplicações em engenharia, utilizada para representar risco ou incerteza;
- Pode ser interpretada como a nossa probabilidade subjetiva, ou **grau de crença**, de que este resultado ocorrerá;
- Outra interpretação de probabilidade está baseada no modelo conceitual de réplicas repetidas do experimento aleatório, sendo o valor limite da proporção de vezes que o resultado de interesse ocorre em *n* repetições do experimento aleatório, à medida que *n* aumenta, isto é, sua **frequência relativa**;

# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

## 2.2.1 Introdução

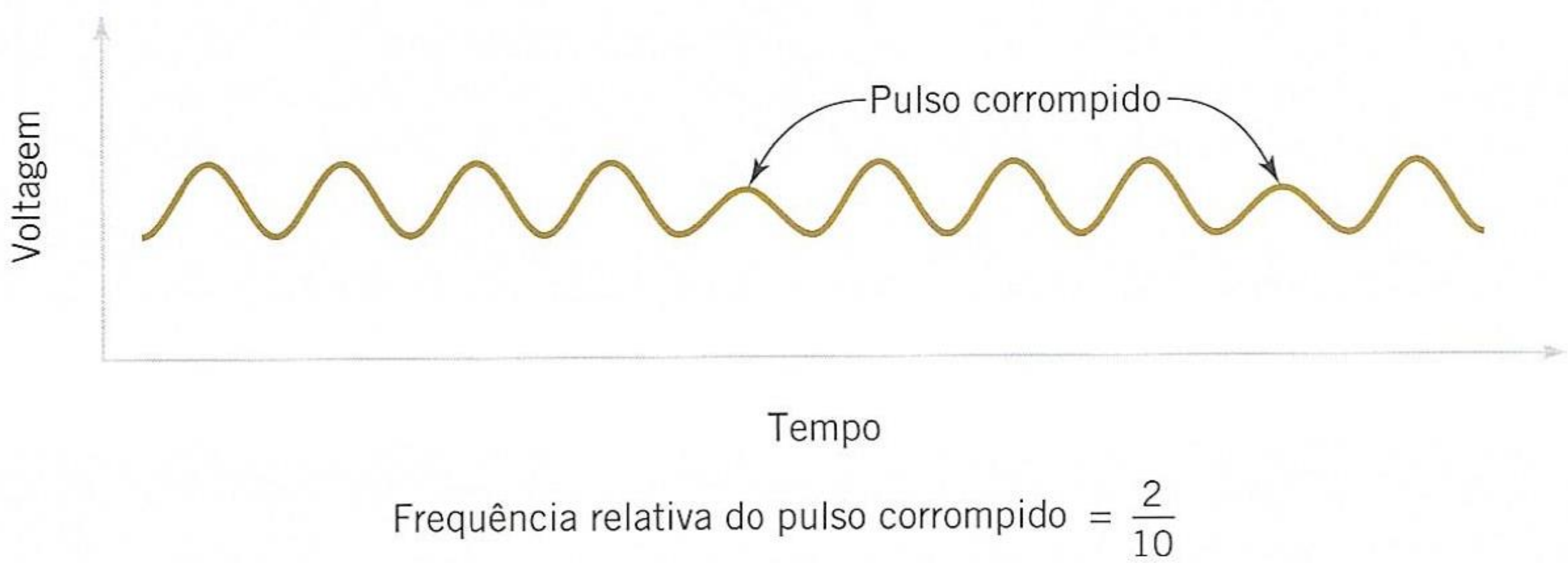



**Fig. 2.10** Frequência relativa dos pulsos corrompidos enviados por um canal de comunicação

# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

## 2.2.1 Introdução

**Eventos Igualmente Prováveis:**

Quando um espaço amostral consistir em N resultados possíveis que sejam igualmente prováveis, a probabilidade de cada resultados é 1/N.

**Definição:**

Para um espaço amostral discreto, a probabilidade de um evento E, denotada por P(E), é igual à soma das probabilidades dos resultados em E.

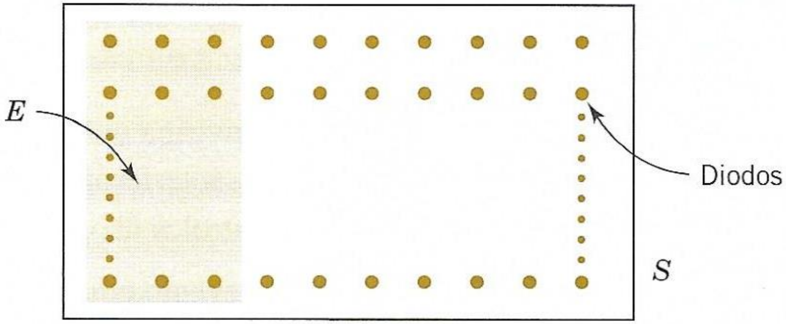
# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

2.2.1 Introdução

- **Exemplo 2.15:**

**Diodos a *Laser*** Considere que 30% dos diodos a *laser* em uma batelada de 100 satisfazem os requerimentos mínimos de potência de um consumidor específico. Se um diodo a *laser* for selecionado ao acaso, isto é, cada diodo a *laser* for igualmente provável de ser selecionado, nosso sentimento intuitivo será que a probabilidade de satisfazer os requerimentos do consumidor é 0,30.

Seja $E$ o evento em que o diodo selecionado satisfaça os requerimentos do consumidor. Então $E$ é o subconjunto de 30 diodos que satisfaz os requerimentos do consumidor. Visto que $E$ contém 30 resultados e cada um deles tem a probabilidade igual a 0,01, concluímos que a probabilidade de $E$ é 0,3. A conclusão coincide com nossa intuição. A Figura ilustra este exemplo.




$P(E) = 30(0{,}01) = 0{,}30$

**Fig. 2.11** A probabilidade do evento $E$ é a soma das probabilidades dos resultados em $E$

# 2.2 Interpretação e Axiomas de Probabilidade

2.2.2 Axiomas da Probabilidade

Probabilidade é um número que é atribuído a cada membro de uma coleção de eventos, a partir de um experimento aleatório que satisfaça as seguintes propriedades:

Se $S$ for o espaço amostral e $E$ for qualquer evento em um experimento aleatório,

(1) $P(S) = 1$

(2) $0 \leq P(E) \leq 1$

(3) Para dois eventos $E_1$ e $E_2$ com $E_1 \cap E_2 = \varnothing$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

# 2.3 Regras de Adição

- **Exemplo 2.19**:

Pastilhas de Supercondutores A Tabela lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de semicondutores. Suponha que uma pastilha seja selecionada, ao acaso. Seja $H$ o evento em que a pastilha contém altos níveis de contaminação. Então, $P(H) = 358/940$.

Seja $C$ o evento em que a pastilha esteja no centro de uma ferramenta de recobrimento. Então, $P(C) = 626/940$. Também, $P(H \cap C)$ é a probabilidade de a pastilha ser proveniente do centro da ferramenta de recobrimento e conter altos níveis de contaminação. Logo,

$$P(H \cap C) = 112/940$$

**Tab. 2.1** Pastilhas na fabricação de semicondutores classificados pela contaminação e localização

| | Localização na Ferramenta de Recobrimento | | |
|---|---|---|---|
| **Contaminação** | **Centro** | **Borda** | **Total** |
| Baixa | 514 | 68 | 582 |
| Alta | 112 | 246 | 358 |
| Total | 626 | 314 | |

# 2.3 Regras de Adição

- **Exemplo 2.19 (cont.)**:

O evento $H \cup C$ é aquele em que uma pastilha é proveniente do centro da ferramenta de recobrimento ou contém altos níveis de contaminação (ou ambos). Da tabela, $P(H \cup C) = 872/940$. Um cálculo alternativo de $P(H \cup C)$ pode ser obtido como segue. As 112 pastilhas que compreendem o evento $H \cap C$ estão incluídas uma vez no cálculo de $P(H)$ e novamente no cálculo de $P(C)$. Desse modo, $P(H \cup C)$ pode ser encontrado como

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C)$$
$$= 358/940 + 626/940 - 112/940 = 872/940$$

Interpretação Prática: Para entender melhor as fontes de contaminação, rendimento proveniente de diferentes localizações é rotineiramente agregado.

**Tab. 2.1** Pastilhas na fabricação de semicondutores classificados pela contaminação e localização

| | Localização na Ferramenta de Recobrimento | | |
|---|---|---|---|
| **Contaminação** | **Centro** | **Borda** | **Total** |
| Baixa | 514 | 68 | 582 |
| Alta | 112 | 246 | 358 |
| Total | 626 | 314 | |

# 2.3 Regras de Adição

- O exemplo anterior motiva o seguinte resultado geral:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- Se A e B são mutuamente excludentes, isto é, se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cap B) = 0$ e o resultado geral fica:

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Para três eventos, A, B e C

  $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

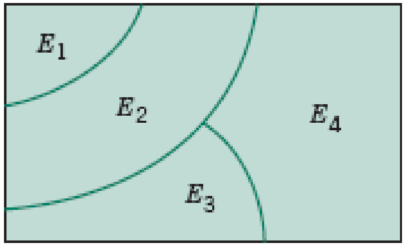
# 2.3 Regras de Adição

- **Definição:**

  Um coleção de eventos $E_1, E_2, ..., E_k$, é denominada **mutuamente excludente** se , para todos os pares *i*, *j*, vale:

  $$E_i \cap E_j = \varnothing.$$

- Diagrama de Venn para vários eventos mutuamente excludentes:




- Generalizando a união de dois eventos tem-se:

  $$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_k).$$

# 2.3 Regras de Adição

- **Exemplo:**

Em uma operação em uma máquina, faça $x$ denotar o comprimento de uma peça e suponha que para

10% das peças, $x \leq 7{,}55$ milímetros.
15% das peças, $7{,}55 < x \leq 7{,}57$ milímetros.
25% das peças, $7{,}57 < x \leq 7{,}59$ milímetros.

Se uma das peças for selecionada dessa operação, qual será a probabilidade de ela ser menor que ou igual a 7,59 milímetros? Faça $E_1$ denotar o evento em que $x \leq 7{,}55$ milímetros no comprimento. Faça $E_2$ denotar o evento em que $7{,}55 < x \leq 7{,}57$ milímetros. Faça $E_3$ denotar o evento em que $7{,}57 < x \leq 7{,}59$ milímetros. Então, pelo fato de esses eventos serem mutuamente excludentes,

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}25 = 0{,}50$$

# 2.4 Probabilidade Condicional

- **Probabilidade Condicional:**
  - Para introduzir o conceito de probabilidade condicional, considere um exemplo envolvendo peças fabricadas.
  - Faça D denotar o evento em que uma peça seja funcionalmente defeituosa e faça F denotar o evento em que uma peça tenha uma falha na superfície.
  - Então, denotamos a probabilidade de D, dado que uma peça tinha uma falha na superfície como P(D|F). Essa notação é lida como a **probabilidade condicional** de D, dado F, sendo interpretada como a probabilidade de que uma peça seja funcionalmente defeituosa, dados que uma peça tenha falha na superfície.

# 2.4 Probabilidade Condicional

- **Exemplo:**
  Em um processo de fabricação, 10% das peças contêm falhas visíveis na superfície e 25% das peças com falhas na superfície são peças funcionalmente defeituosas. Por outro lado, apenas 5% das peças sem falhas nas superfície são funcionalmente defeituosas. Isto é, a probabilidade de uma peça ser funcionalmente defeituosa depende do nosso conhecimento da presença ou ausência de uma falha na superfície:
  - se uma peça tiver uma falha na superfície, a probabilidade de ela ser funcionalmente defeituosa é 0,25;
  - se uma peça não tiver falha na superfície, a probabilidade de ela ser funcionalmente defeituosa é 0,05.

# 2.4 Probabilidade Condicional

- **Exemplo (final):**
  Faça D denotar o evento em que uma peça seja funcionalmente defeituosa e F, em que tenha uma falha na superfície. Temos então que P(D|F) = 0,25 e P(D|F′) = 0,05 (vide figura).

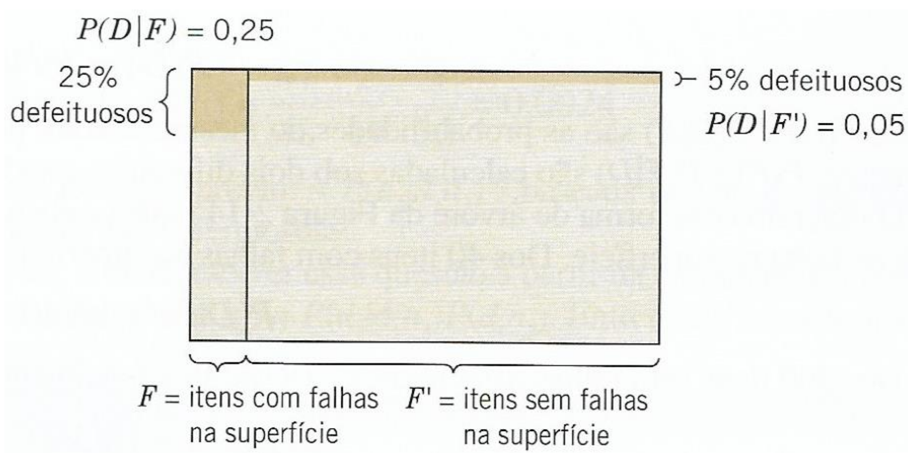



**Fig. 2.13** Probabilidades condicionais para item com falhas na superfície

# 2.4 Probabilidade Condicional

- **Definição**:

  A **probabilidade condicional** de um evento B, dado um evento A, denotada como P(B|A), é

  $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

  para P(A) > 0.

# 2.4 Probabilidade Condicional

- **Exemplo:**

**Tabela 3.3** Moléculas em Amostras de Ar

| | | Molécula 1 presente | | |
|---|---|---|---|---|
| | | não | sim | |
| **Molécula 2 presente** | não | 212 | 24 | 236 |
| | sim | 18 | 12 | 30 |
| | | 230 | 36 | 266 |

Um grupo de 266 amostras de ar foi classificado com base na presença de duas moléculas raras. Faça A denotar o evento que consiste em todas as amostras de ar em que o molécula rara 1esteja presente e B, em que a molécula rara 2 esteja presente. Usando resultados da Tab. 3.3 encontramos que

$$P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = 12/266 \div 36/266 = 12/36.$$

# 2.5 Regras da Multiplicação e da Probabilidade Total

**2.5.1 Regra da Multiplicação**:

- **Definição:**

  A definição de probabilidade condicional pode ser rescrita para fornecer uma expressão geral para a probabilidade de interseção de dois eventos:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A).$$

# 2.5 Regras da Multiplicação e da Probabilidade Total

## 2.5.1 Regra da Multiplicação:

- **Exemplo**:

A probabilidade de que uma bateria de automóvel, sujeita a alta temperatura no compartimento do motor, sofra baixa corrente de carga é de 0,7. A probabilidade da bateria estar sujeita a alta temperatura no compartimento do motor é de 0,05.

Faça *A* denotar o evento em que a bateria sofra baixa corrente de carga e faça *B* denotar o evento em que a bateria esteja sujeita a alta temperatura no compartimento do motor. A probabilidade da bateria estar sujeita a baixa corrente de carga e a alta temperatura no compartimento do motor é

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}035$$

# 2.5 Regras da Multiplicação e da Probabilidade Total

**2.5.2 Regra da Probabilidade Total**

- **Definição (dois eventos)**:

  Para quaisquer dois eventos A e B, temos

  $$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B|A) \times P(A) + P(B|A') \times P(A')$$

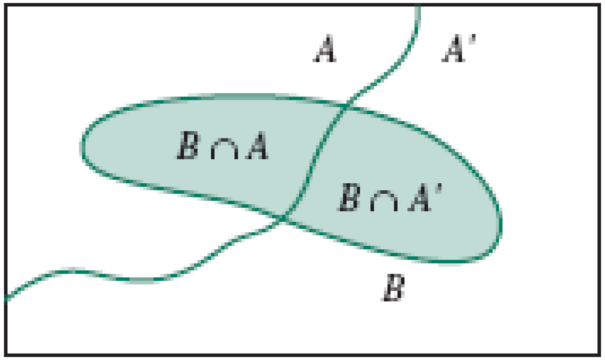



**Fig. 2.15** Divisão de um evento em dois subconjuntos mutuamente excludentes

# 2.5 Regras da Multiplicação e da Probabilidade Total

## 2.5.2 Regra da Probabilidade Total

- **Exemplo**: Considere o estudo sobre contaminação, no começo desta seção. Faça $F$ denotar o evento em que o produto falhe e faça $A$ denotar o evento em que um *chip* seja exposto a altos níveis de contaminação. A probabilidade requerida é $P(F)$ e a informação dada pode ser representada como

$$P(F \mid A) = 0{,}10$$

$$P(F \mid A') = 0{,}005$$

$$P(A) = 0{,}20$$

Por conseguinte,

$$P(A') = 0{,}80$$

usando a Eq. 3.7, obtemos

$$P(F) = 0{,}10(0{,}20) + 0{,}005(0{,}80) = 0{,}024$$

que pode ser interpretada como apenas a média ponderada de duas probabilidades de falha.

# 2.5 Regras da Multiplicação e da Probabilidade Total

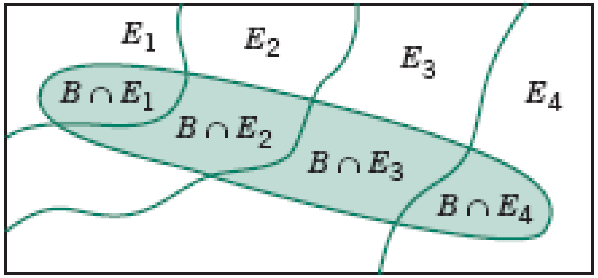
**2.5.2 Regra da Probabilidade Total**

- **Definição (múltiplos eventos)**:

Suponha que $E_1, E_2, ..., E_k$, sejam $k$ conjuntos mutuamente excludentes e exaustivos (isto é, $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_k = S$), então

$$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + ... + P(B \cap E_k)$$

$$= P(B|E_1) \times P(E_1) + P(B|E_2) \times P(E_2) + ... + P(B|E_k) \times P(E_k)$$




$$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$$

**Fig. 2.16** Divisão de um evento em vários subconjuntos mutuamente excludentes

# 2.6 Independência

- **Definição (dois eventos):**

  Dois eventos são **independentes** se qualquer uma das seguintes afirmações for verdadeira:

1. $P(A|B) = P(A)$
2. $P(B|A) = P(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- **Definição (múltiplos eventos):**

  Os eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$, são **independentes** se e somente se qualquer conjunto $E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{ik}$

1. $P(E_{i1} \cap E_{i2} \cap \ldots \cap E_{ik}) = P(E_{i1}) \times P(E_{i2}) \times \ldots \times P(E_{ik})$

# 2.6 Independência

- **Exemplo**:

Suponha que um dia de produção de 850 peças fabricadas contenha 50 peças que não satisfaçam as exigências dos consumidores. Suponha que duas peças sejam selecionadas da batelada, porém a primeira peça é reposta antes da segunda peça ser selecionada.

Qual é a probabilidade de que a segunda peça seja defeituosa, dado que a primeira peça é defeituosa? Faça $B$ denotar o evento em que a segunda peça selecionada seja defeituosa e faça $A$ denotar o evento em que a primeira peça selecionada seja defeituosa. A probabilidade necessária pode ser expressa como $P(B \mid A)$.

Pelo fato de a primeira peça ser reposta antes da seleção da segunda peça, a batelada ainda contém 850 peças, 50 das quais são defeituosas. Assim, a probabilidade de $B$ não depende de a primeira peça ser ou não defeituosa. Ou seja,

$$P(B \mid A) = 50/850$$

# 2.6 Independência

- **Exemplo II**:

**Tab. 2.4** Moléculas em amostras de ar

| | | Molécula 1 presente | |
|---|---|---|---|
| | | não | sim |
| **Molécula 2 presente** | não | 32 | 24 |
| | sim | 16 | 12 |

A Tabela 2.4 descreve a história de 84 amostras de ar, com base na presença de duas moléculas raras.

# 2.6 Independência

- **Exemplo II (cont.)**:

Faça $A$ denotar o evento que consiste em todas as amostras de ar em que a molécula 1 esteja presente. Faça $B$ denotar o evento que consiste em todas as amostras de ar com a molécula 2 presente. Então, $P(B) = 28/84 = 1/3$. Também,

$$P(B \mid A) = P(B \cap A)/P(A) = (12/84)/(36/84) = 1/3$$

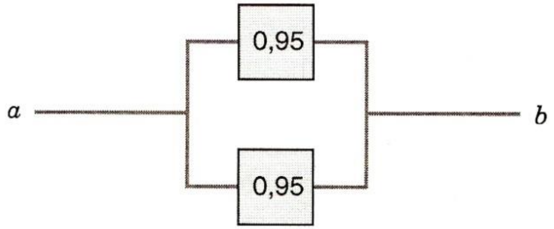
Nesse exemplo, o conhecimento de que a molécula 1 está presente numa amostra não muda a probabilidade de que a molécula 2 esteja presente. O evento $B$ consiste na mesma proporção do número total de amostras, como a proporção de amostras em $A$.

Além disso, $P(A \mid B) = P(A) = 3/7$ e $P(A \cap B) =$
$= P(A)P(B) = 1/7$.

# 2.6 Independência

- **Exemplo III:**

O circuito mostrado a seguir opera somente se houver um caminho de equipamentos funcionais, da esquerda para a direita. A probabilidade de que cada aparelho funcione é mostrada no gráfico. Suponha que os equipamentos falhem independentemente. Qual será a probabilidade de que o circuito opere?




Faça $T$ e $B$ denotarem os eventos em que os equipamentos da parte superior e da parte inferior operem, respectivamente. Haverá um caminho se, no mínimo, um equipamento operar. A probabilidade de que o circuito opere é

$$P(T \text{ ou } B) = 1 - P[(T \text{ ou } B)'] = 1 - P(T' \text{ e } B')$$

Da suposição de independência,

$$P(T' \text{ e } B') = P(T')P(B') = (1 - 0{,}95)^2 = 0{,}05^2$$

de modo que

$$P(T \text{ ou } B) = 1 - 0{,}05^2 = 0{,}9975$$

# 2.7 Teorema de Bayes

- **Definição**:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} \quad \text{para} \quad P(B) > 0 \qquad (3.11)$$

que capacita a resolver P(A|B) em termos de P(B|A);

- **Teorema de Bayes**:

**Teorema de Bayes**

Se $E_1, E_2, \ldots, E_k$ forem eventos mutuamente excludentes e exaustivos e $B$ for qualquer evento, então

$$P(E_1 \mid B) = \frac{P(B \mid E_1)P(E_1)}{P(B \mid E_1)P(E_1) + P(B \mid E_2)P(E_2) + \cdots + P(B \mid E_k)P(E_k)}$$

para $P(B) > 0$

# 2.7 Teorema de Bayes

- **Exemplo:** A probabilidade de que um teste identifique corretamente alguém com uma doença, dando positivo, é 0,99; e a probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual é a probabilidade de que você tenha a doença?
  **Solução:** Faça D denotar o evento em que você tenha a doença e faça S denotar o evento em que o teste seja positivo. A probabilidade requerida pode ser denotada como P(D|S). A probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. Consequentemente, a probabilidade de um teste positivo sem a doença é P(S|D′) = 0,05. Do Teorema de Bayes,

$$P(D \mid S) = \frac{P(S \mid D) \times P(D)}{P(S \mid D) \times P(D) + P(S \mid D') \times P(D')} = \frac{0,99 \times 0,0001}{0,99 \times 0,0001 + 0,05 \times (1 - 0,0001)} = 0,002.$$

# 2.8 Variáveis Aleatórias

- **Definição**:

  Uma **variável aleatória** é uma função que confere um número real a cada resultado do espaço amostral de um experimento aleatório.

- **Definição II**:

  Uma variável aleatória **discreta** é uma variável aleatória com uma faixa finita (ou infinita contável).

- **Definição III**:

  Uma variável aleatória **contínua** é uma variável aleatória com um intervalo (tanto finito como infinito) de números reais para sua faixa.

# 2.8 Variáveis Aleatórias

- **Exemplos de variáveis aleatórias contínuas:**

  Corrente elétrica, comprimento, pressão, temperatura, tempo, tensão elétrica, peso.

- **Exemplos de variáveis aleatórias discretas:**

  Número de arranhões em uma superfície, proporção de partes defeituosas entre 1.000 testadas, número de *bits* transmitidos que foram recebidos com erro.

## TERMOS E CONCEITOS IMPORTANTES

**Regra da adição**

**Axiomas da probabilidade**

**Teorema de Bayes**

**Probabilidade condicional**

**Resultados igualmente prováveis**

**Independência**

**Regra da multiplicação**

**Eventos mutuamente exclusivos**

**Resultado**

**Probabilidade**

**Experimento aleatório**

**Variável aleatória – discreta e contínua**

**Espaço amostral – discreto e contínuo**

**Regra da probabilidade total**

**Diagrama de árvore**

**Diagrama de Venn**

**Com e sem reposição**