3 Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

ESQUEMA DO CAPÍTULO

Objetivos de Aprendizagem

Após estudo cuidadoso deste capítulo você deverá ser capaz de:

1. Determinar probabilidades a partir de funções de probabilidade e o inverso;
2. Determinar probabilidades a partir funções de distribuições cumulativa, determinar funções de distribuições cumulativas a partir de funções de probabilidade e o inverso;
3. Calcular médias e variâncias de variáveis aleatórias discretas;
4. Compreender os pressupostos de cada uma das distribuições de probabilidades discretas apresentadas;
5. Selecionar a distribuição de probabilidades discreta apropriada para calcular probabilidades em aplicações específicas;
6. Calcular probabilidades, determinar médias e variâncias para cada uma das distribuições de probabilidade apresentadas.

3.1 Variáveis Aleatórias Discretas

- Neste capítulo, apresentaremos modelos comuns de variáveis aleatórias discretas:
  - Exemplo 1: Um sistema de comunicação contém 48 linhas. A variável aleatória X denota o número de linhas que estão sendo usadas em determinado momento;
  - Exemplo 2: Em um processo de fabricação, duas peças são testadas e recebem a classificação *passa* ou *falha*. A variável aleatória X é definida como sendo igual ao número das que passaram;
  - Exemplo 3: Defina a variável aleatória X como sendo o número de partículas contaminantes em uma pastilha em um processo de fabricação de semicondutores.

3.2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Probabilidade

- **Definição:**
  A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é uma descrição das probabilidades associadas com os valores possíveis de X:
  - É frequentemente especificada por apenas uma lista de valores possíveis, juntamente com a probabilidade de cada um;
  - Em alguns casos é expressa em termos de uma fórmula;

3.2 Distribuições de Probabilida-des e Funções de Probabilidade

- **Exemplo:**
  Há uma chance de que um *bit* transmitido através de um canal de transmissão digital seja recebido com erro. Denote X o número de bits com erro nos quatro próximos bits transmitidos. Suponha que a distribuição de probabilidades de X seja a especificada (vide Fig. 3.1):

  $P(X = 0) = 0{,}6561$
  $P(X = 1) = 0{,}2916$
  $P(X = 2) = 0{,}0486$
  $P(X = 3) = 0{,}0036$
  $P(X = 4) = 0{,}0001$

3.2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Probabilidade

- **Exemplo (continuação):**

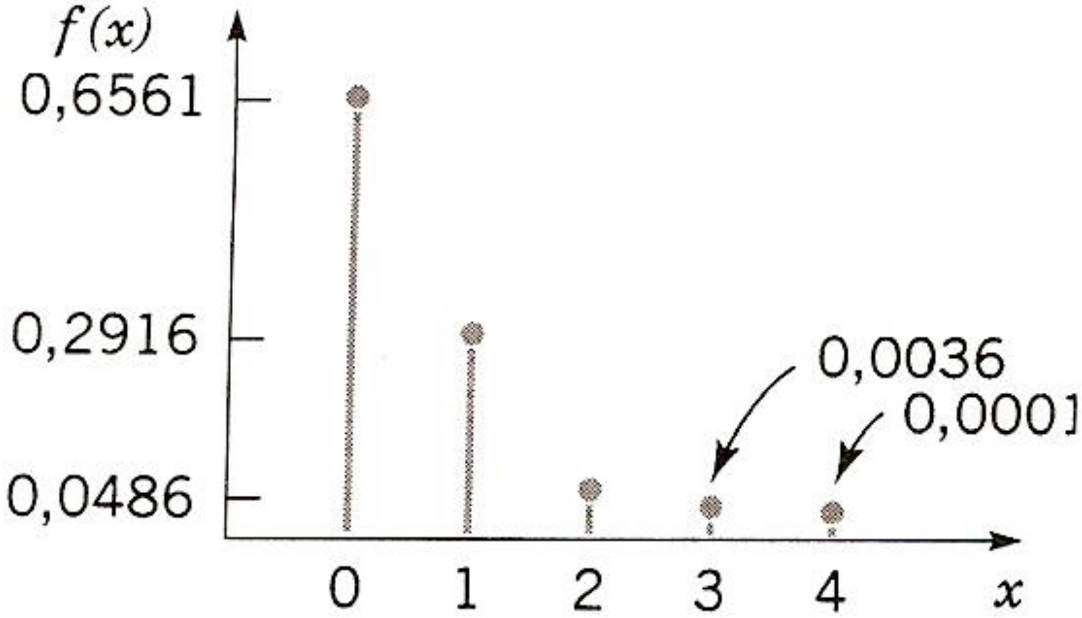


Fig. 3.1 Distribuição de probabilidades para *bits* com erros

3.2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Probabilidade

- **Definição:**
  Para uma variável aleatória discreta com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a função de probabilidade é uma função tal que

a) $f(x_i) \geq 0,$

b) $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = 1,$

c) $f(x_i) = P(X = x_i).$

3.2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Probabilidade

- **Exemplo II:**

Faça a variável aleatória X denotar o número de pastilhas de semicondutores que necessitam ser analisadas, de modo a detectar uma grande partícula de contaminação. Considere que a probabilidade de uma pastilha conter uma grande partícula é 0,01 e que as pastilhas sejam independentes. Determine a distribuição de probabilidades de X.

3.2 Distribuições de Probabilidades e Funções de Probabilidade

- **Exemplo II (continuação):**

Seja p uma pastilha em que uma grande partícula esteja presente e seja a uma pastilha em que essa partícula esteja ausente. O espaço amostral do experimento é infinito, podendo ser representado como todas as seqüências possíveis que comecem com um conjunto de caracteres de a's e terminem com p. Isto é,

$$s = \{p, ap, aap, aaap, aaaap, aaaaap, \text{ e assim por diante}\}$$

Considere uns poucos casos especiais. Temos $P(X = 1) = P(p) = 0{,}01$. Também, usando a suposição de independência,

$$P(X = 2) = P(ap) = 0{,}99(0{,}01) = 0{,}0099$$

Uma fórmula geral é

$$P(X = x) = \underbrace{P(aa \ldots ap)}_{(x-1)a\text{'s}} = 0.99^{x-1}(0{,}01),$$

$$\text{para } x = 1, 2, 3, \ldots$$

3.3 Funções de Distribuição Cumulativa

- **Definição:**

Definição

A **função distribuição cumulativa** de uma variável aleatória discreta X, denotada por $F(x)$, é

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Para uma variável aleatória discreta X, $F(x)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$

(2) $0 \leq F(x) \leq 1$

(3) Se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$ (4.2)

3.3 Funções de Distribuição Cumulativa

- **Exemplo:**

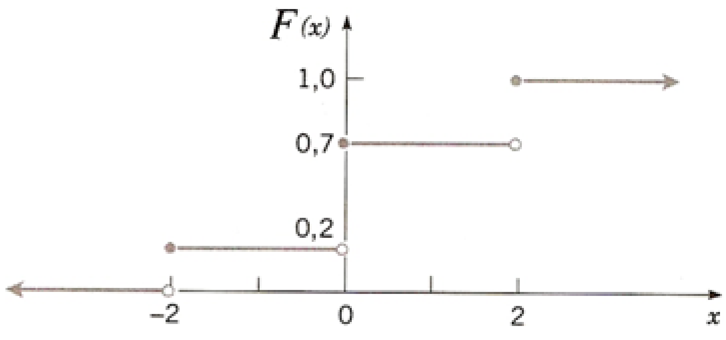


Fig. 3.3 Função de distribuição cumulativa para o exemplo

Suponha que a função de distribuição cumulativa da variável aleatória X seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0{,}2 & -2 \le x < 0 \\ 0{,}7 & 0 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

Determine a função de probabilidade de X.

A Fig. 4.3 apresenta um gráfico de $F(x)$, onde se pode ver que os únicos pontos que recebem probabilidade diferente de zero são -2, 0 e 2 e

$$f(-2) = 0{,}2 - 0 \quad = 0{,}2$$

$$f(0) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$$

e

$$f(2) = 1{,}0 - 0{,}7 = 0{,}3$$

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Definição:**

Definição

A **média** ou **valor esperado** de uma variável aleatória discreta X, denotada(o) como μ ou $E(X)$, é

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \tag{4.3}$$

A **variância** de X, denotada por σ^2 ou $V(X)$, é

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - \mu^2$$

O **desvio-padrão** de X é $\sigma = [V(X)]^{1/2}$.

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo:**

No Exemplo 4.4, houve uma chance de que um *bit* transmitido através de um canal digital de transmissão fosse recebido com erro. Seja X o número de *bits* com erro nos quatro próximos *bits* transmitidos. Os valores possíveis para X são $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Baseado no modelo apresentado na seção seguinte para os erros, as probabilidades para esses valores serão determinadas. Suponha que as probabilidades sejam

$$P(X = 0) = 0{,}6561 \qquad P(X = 2) = 0{,}0486$$
$$P(X = 1) = 0{,}2916 \qquad P(X = 3) = 0{,}0036$$
$$P(X = 4) = 0{,}0001$$

Agora

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)\\ &= 0(0{,}6561) + 1(0{,}2916) + 2(0{,}0486)\\ &\quad + 3(0{,}0036) + 4(0{,}0001) = 0{,}4\end{aligned}$$

Embora X nunca assuma o valor 0,4, a média ponderada dos valores possíveis é 0,4.

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo (continuação):**

Para calcular $V(X)$, uma tabela é conveniente.

x	$x - 0{,}4$	$(x - 0{,}4)^2$	$f(x)$	$f(x)(x - 0{,}4)^2$
0	−0,4	0,16	0,6561	0,104976
1	0,6	0,36	0,2916	0,104976
2	1,6	2,56	0,0486	0,124416
3	2,6	6,76	0,0036	0,024336
4	3,6	12,96	0,0001	0,001296

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)(x_i - 0{,}4)^2 = 0{,}36$$

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo II:**

Dois projetos novos de produto devem ser comparados, baseando-se no potencial de retorno. O setor de comercialização (*marketing*) sente que o retorno do Projeto A pode ser previsto bem acuradamente como sendo US$ 3 milhões. O potencial de retorno do Projeto B é mais difícil de estimar. O setor de comercialização conclui que há uma probabilidade de 0,3 de que o retorno do Projeto B seja de US$ 7 milhões, mas há uma probabilidade igual a 0,7 de que o retorno seja de apenas US$ 2 milhões. Qual o projeto que você prefere?

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo II (continuação):**

Seja X o retorno do Projeto A. Devido à certeza no retorno do Projeto A, podemos modelar a distribuição da variável aleatória X como US$ 3 milhões com probabilidade igual a um. Por conseguinte, $E(X)$ = US$ 3 milhões.

Seja Y o retorno do Projeto B. O valor esperado de Y, em milhões de reais, é

$$E(Y) = \$7(0{,}3) + \$2(0{,}7) = \$3{,}5$$

Pelo fato de $E(Y)$ exceder $E(X)$, podemos preferir o Projeto B. No entanto, a variabilidade do resultado do Projeto B é maior. Ou seja,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (7 - 3{,}5)^2(0{,}3) + (2 - 3{,}5)^2(0{,}7)\\ &= 5{,}25 \text{ (milhões de dólares)}^2\end{aligned}$$

3.4 Média e Variância de Uma Variável Aleatória Discreta

- **Exemplo III:**

O número de mensagens enviadas por hora, através de uma rede de computadores, tem a seguinte distribuição:

x = número de mensagens	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	0,08	0,15	0,30	0,20	0,20	0,07

Determine a média e o desvio-padrão do número de mensagens enviadas por hora.

$$E(X) = 10(0{,}08) + 11(0{,}15) + \cdots + 15(0{,}07) = 12{,}5$$

$$V(X) = 10^2(0{,}08) + 11^2(0{,}15) + \cdots + 15^2(0{,}07) - 12{,}5^2 = 1{,}85$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}85} = 1{,}36$$

3.5 Distribuição Uniforme Discreta

- **Definição:**

Definição

Uma variável aleatória X será **uma variável aleatória discreta uniforme**, se cada um dos n valores em sua faixa, isto é, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tiver igual probabilidade. Então,

$$f(x_i) = 1/n$$

3.5 Distribuição Uniforme Discreta

- **Exemplo:**

O primeiro dígito de um número serial de uma peça é igualmente provável de ser qualquer um dos dígitos de 0 a 9. Se uma peça for selecionada de uma grande batelada e X for o primeiro dígito do número serial, então X terá uma distribuição discreta uniforme, com probabilidade igual a 0,1 para cada valor em $R = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Isto é,

$$f(x_i) = 1/n$$

para cada valor em R. A função de probabilidade de X é mostrada na Fig. 3.5.

3.5 Distribuição Uniforme Discreta

- **Exemplo (continuação):**

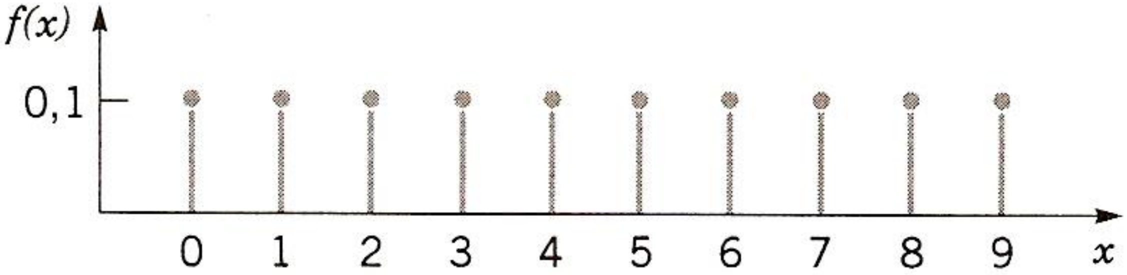


Fig. 3.5 Função de probabilidade para uma variável aleatória discreta uniforme

3.5 Distribuição Uniforme Discreta

- **Definição:**

Suponha que X seja uma variável aleatória discreta uniforme nos inteiros consecutivos a, $a + 1$, $a + 2$, ..., b, para $a \leq b$. A média de X é

$$\mu = E(X) = (b + a)/2$$

O desvio-padrão de X é

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}} \qquad (4.4)$$

3.5 Distribuição Uniforme Discreta

- **Exemplo:**

No Exemplo 4.1, faça a variável aleatória X denotar o número das 48 linhas telefônicas que estão em uso em um certo tempo. Considere que X seja uma variável aleatória discreta uniforme com uma faixa de 0 a 48. Então,

$$E(X) = (48 + 0)/2 = 24$$

e

$$\sigma = \{[(48 - 0 + 1)^2 - 1]/12\}^{1/2} = 14{,}14$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo:**

A chance de que um *bit* transmitido através de um canal digital de transmissão seja recebido com erro é de 0,1. Suponha também que as tentativas de transmissão sejam independentes. Faça X = número de *bits* com erro nos próximos quatro *bits* transmitidos. Determine $P(X = 2)$.

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

Considere que a letra *E* designa um *bit* com erro e que a letra *O* designa um *bit* que esteja bom, ou seja, recebido sem erro. Podemos representar os resultados deste experimento como uma lista de quatro letras, que indicam os *bits* que estão com erro e aqueles que estão bons. Por exemplo, o resultado *OEOE* indica que o segundo e quarto *bits* estão com erro e que os outros dois *bits* estão sem erro (bons). Os valores correspondentes para *x* são:

Resultado	x	Resultado	x
OOOO	0	*EOOO*	1
OOOE	1	*EOOE*	2
OOEO	1	*EOEO*	2
OOEE	2	*EOEE*	3
OEOO	1	*EEOO*	2
OEOE	2	*EEOE*	3
OEEO	2	*EEEO*	3
OEEE	3	*EEEE*	4

O evento em que $X = 2$ consiste em seis resultados.

$$\{EEOO,\ EOEO,\ EOOE,\ OEEO,\ OEOE,\ OOEE\}$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

Usando a suposição de que as tentativas sejam independentes, a probabilidade de $\{EEOO\}$ é

$$P(EEOO) = P(E)P(E)P(O)P(O) = (0{,}1)^2(0{,}9)^2 = 0{,}0081$$

qualquer um dos seis resultados mutuamente excludentes, para o qual $X = 2$, tem a mesma probabilidade de ocorrer. Logo,

$$P(X = 2) = 6(0{,}0081) = 0{,}0486$$

Em geral,

$$P(X = x) = (\text{número de resultados que resultam em } x \text{ erros}) \times (0{,}1)^x \times (0{,}9)^{4-x}$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

Para completar uma fórmula geral de probabilidade, necessita-se somente de uma expressão para o número de resultados que contêm x erros. Um resultado que contenha x erros pode ser construído dividindo as quatro tentativas (letras) no resultado em dois grupos. Um grupo tem tamanho x e contém os erros e o outro grupo tem tamanho $n - x$ e consiste nas tentativas que estão sem erros. O número de maneiras de dividir quatro objetos em dois grupos, um dos quais com tamanho x, é $\binom{4}{x} = 4!/[x!(4 - x)!]$. Por conseguinte, neste exemplo

$$P(X = x) = \binom{4}{x}(0{,}1)^x(0{,}9)^{4-x}$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Definição:**

Definição

Um experimento aleatório, consistindo em n repetidas tentativas, de modo que

(1) as tentativas sejam independentes,
(2) cada tentativa resulte em somente dois resultados possíveis, designados como "sucesso" e "falha",
(3) a probabilidade de um sucesso em cada tentativa, denotada por p, permaneça constante

é chamado de *um experimento binomial.*

A variável aleatória X, que é igual ao número de tentativas que resultam em um sucesso, tem uma **distribuição binomial** com parâmetros p e $n = 1, 2, ...$

A função de probabilidade de X é

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n \qquad (4.5)$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo:**

Cada amostra de ar tem 10% de chance de conter uma certa molécula rara. Considere que as amostras sejam independentes com relação à presença da molécula rara. Encontre a probabilidade de que nas próximas 18 amostras, exatamente 2 contenham a molécula rara.

Seja X = número de amostras de ar que contenham a molécula rara nas próximas 18 amostras analisadas. Então X é a variável aleatória binomial com $p = 0{,}1$ e $n = 18$. Assim,

$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0{,}1)^2(0{,}9)^{16}$$

Agora $\binom{18}{2} = (18!/[2!\ 16!]) = 18(17)/2 = 153.$

Conseqüentemente,

$$P(X = 2) = 153(0{,}1)^2(0{,}9)^{16} = 0{,}284$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

Determine a probabilidade de que no mínimo 4 amostras contenham a molécula rara. A probabilidade requerida é

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{18} \binom{18}{x} (0{,}1)^x (0{,}9)^{18-x}$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

No entanto, é mais fácil usar o evento complementar,

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\
&= 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{18}{x} (0{,}1)^x (0{,}9)^{18-x} \\
&= 1 - [0{,}150 + 0{,}300 + 0{,}284 + 0{,}168] \\
&= 0{,}098
\end{aligned}
$$

Determine a probabilidade de que $3 \leq X < 7$. Agora,

$$
\begin{aligned}
P(3 \leq X < 7) &= \sum_{x=3}^{6} \binom{18}{x} (0{,}1)^x (0{,}9)^{18-x} \\
&= 0{,}168 + 0{,}070 + 0{,}022 + 0{,}005 \\
&= 0{,}265
\end{aligned}
$$

3.6 Distribuição Binomial

- **Definição:**

Se X for uma variável aleatória binomial com parâmetros p e n, então

$$\mu = E(X) = np \qquad \text{e}$$
$$\sigma^2 = V(X) = np(1-p) \qquad (4.6)$$

- **Exemplo:**

Para o número de *bits* transmitidos recebidos com erro no Exemplo 4.15, $n = 4$ e $p = 0{,}1$; assim,

$$E(X) = 4(0{,}1) = 0{,}4$$

A variância de X é

$$V(X) = 4(0{,}1)(0{,}9) = 0{,}36$$

3.6 Distribuição Binomial

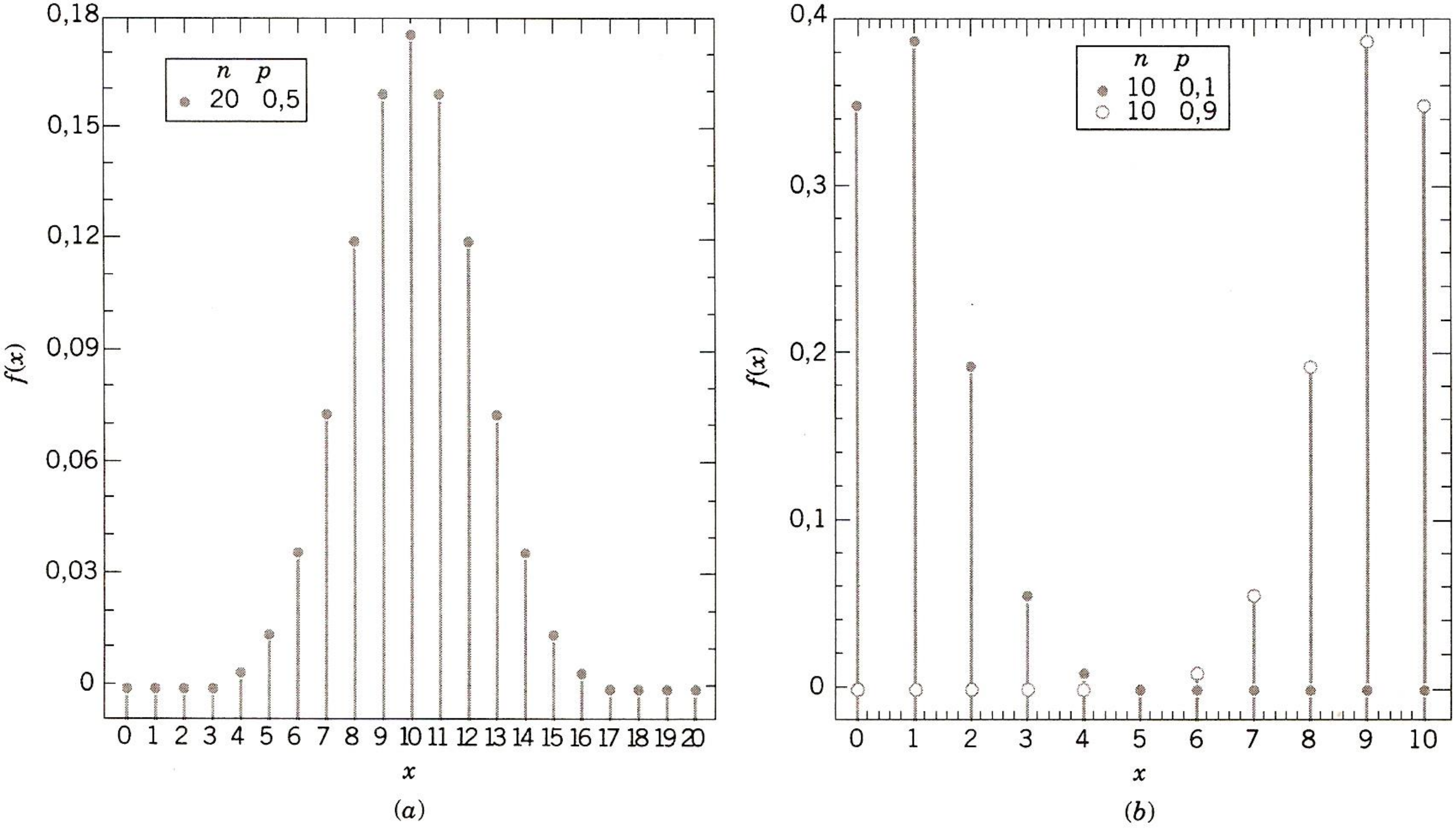


Fig. 4.6 Distribuições binomiais para valores selecionados de n e p.

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.1 Distribuição Geométrica

- **Exemplo:** A probabilidade com que um *bit* transmitido através de um canal digital de transmissão seja recebido com erro é de 0,1. Considere que as transmissões sejam eventos independentes e faça a variável aleatória X denotar o número de *bits* transmitidos *até* que o primeiro erro seja encontrado.

  Então, $P(X = 5)$ é a probabilidade de que os quatro primeiros *bits* sejam transmitidos corretamente e de que o quinto *bit* tenha erro. Esse evento pode ser denotado por $\{OOOOE\}$, em que O denota um *bit* correto. Pelo fato de as tentativas serem independentes e a probabilidade de uma transmissão correta ser 0,9

$$P(X = 5) = P(OOOOE) = 0{,}9^4 0{,}1 = 0{,}066$$

Note que há alguma probabilidade de X ser igual a qualquer valor inteiro. Também, se a primeira tentativa for um sucesso, então $X = 1$. Logo, a faixa de X é $\{1, 2, 3, \ldots\}$, isto é, todos os inteiros positivos.

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.1 Distribuição Geométrica

- **Definição:**

Definição

Em uma série de tentativas independentes de Bernoulli, com probabilidade constante p de um sucesso, faça a variável aleatória X denotar o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra. Então X tem uma **distribuição geométrica**, com parâmetro p e

$$f(x) = (1 - p)^{x-1}p, \qquad x = 1, 2, \ldots \qquad (4.7)$$

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.1 Distribuição Geométrica

- **Exemplo II:**

A probabilidade de uma pastilha conter uma partícula grande de contaminação é de 0,01. Se for considerado que as pastilhas sejam independentes, qual será a probabilidade de que exatamente 125 pastilhas necessitem ser analisadas antes que uma partícula grande seja detectada?

Faça X denotar o número de amostras analisadas até que uma partícula grande seja detectada. Então X é uma variável aleatória geométrica com $p = 0{,}01$. A probabilidade requerida é

$$P(X = 125) = (0{,}99)^{124} 0{,}01 = 0{,}0029$$

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.1 Distribuição Geométrica

Fig. 3.9 Distribuições geométricas para valores selecionados do parâmetro *p*

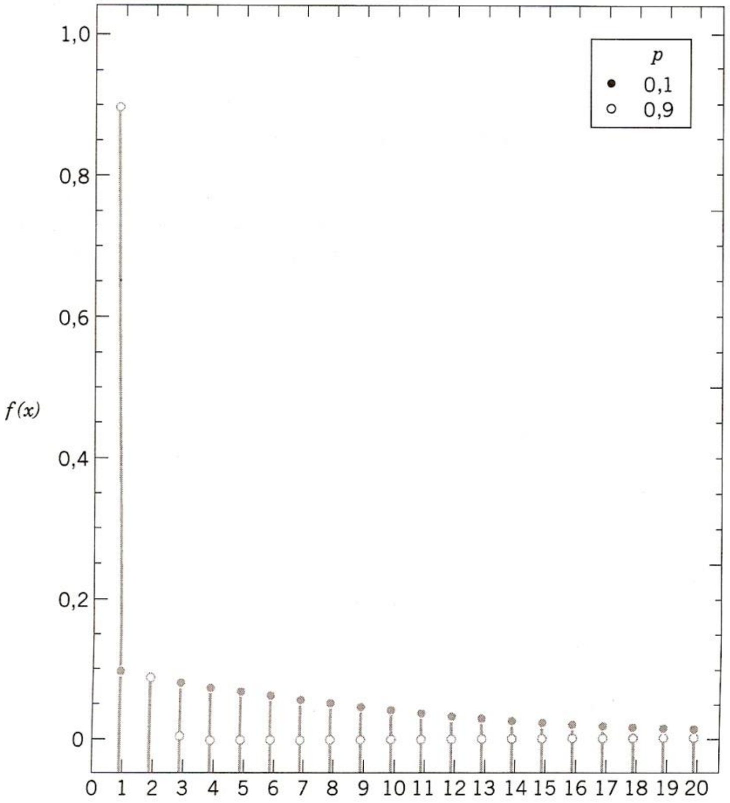


Fig. 4.7 Distribuições geométricas para valores selecionados do parâmetro *p*.

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.1 Distribuição Geométrica

- **Definição:**

Se X for uma variável aleatória geométrica com parâmetro p, então a média e a variância de X serão

$$\mu = E(X) = 1/p \quad \text{e} \quad \sigma^2 = V(X) = (1 - p)/p^2 \qquad (4.8)$$

- **Exemplo:**

Considere a transmissão de *bits* no Exemplo 4.19. Aqui, $p = 0{,}1$. O número médio de transmissões até que o primeiro erro seja encontrado é igual $1/0{,}1 = 10$. O desvio-padrão do número de transmissões antes do primeiro erro é

$$\sigma = [(1 - 0{,}1)/0{,}1^2]^{1/2} = 9{,}49$$

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.2 Distribuição Binomial Negativa

- **Definição:**

Definição

Em uma série de tentativas independentes de Bernoulli, com probabilidade constante p de um sucesso, faça a variável aleatória X denotar o número de tentativas até que r sucessos ocorram. Então X tem uma **distribuição binomial negativa**, com parâmetros p e $r = 1, 2, 3, \ldots$, e

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r \qquad (4.9)$$

para $x = r, r+1, r+2, \ldots$

- **Definição:**

Se X for uma variável aleatória binomial negativa, com parâmetros p e r, então a média e a variância de X serão

$$\mu = E(X) = r/p \quad \text{e} \quad \sigma^2 = V(X) = r(1-p)/p^2 \qquad (4.10)$$

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.2 Distribuição Binomial Negativa

- **Exemplo:**

  Um avião de alto desempenho contém três computadores idênticos. Somente um deles é usado para operar o avião, os outros dois são sobressalentes que podem ser ativados no caso do sistema principal falhar. Durante uma hora de operação, a probabilidade de uma falha no sistema principal (ou em qualquer sistema sobressalente ativado) é de 0,0005. Supondo que cada hora represente uma tentativa independente, qual será o tempo médio para a falha de todos os três sistemas?

3.7 Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

3.7.2 Distribuição Binomial Negativa

- **Exemplo (continuação):**

Seja X o número de horas até que todos os três sistemas falhem e sejam X_1, X_2 e X_3 o número de horas de operação antes de uma falha do primeiro, segundo e terceiro computadores usados respectivamente. Agora, $X = X_1 + X_2 + X_3$. Também, as horas são consideradas como tentativas independentes, com probabilidade constante de falha $p = 0{,}0005$. Além disso, um computador sobressalente não é afetado pela quantidade de tempo decorrido antes dele ser ativado. Por conseguinte, X tem uma distribuição binomial negativa com $p = 0{,}0005$ e $r = 3$. Conseqüentemente,

$$E(X) = 3/0{,}0005 = 6.000 \text{ horas}$$

3.8 Distribuição Hipergeométrica

- **Definição I:**

Definição

Uma série de N objetos contém

K objetos classificados como sucessos e
$N - K$ objetos classificados como falhas

Uma amostra de tamanho n objetos é selecionada ao acaso (sem reposição) a partir de N objetos, em que $K \leq N$ e $n \leq N$.

Designe por X a variável aleatória que representa o número de sucessos na amostra. Então X tem uma **distribuição hipergeo-métrica** e

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$x = \text{máx}\{0, n + K - N\} \quad \text{a} \quad \text{mín}\{K, n\} \qquad (4.11)$$

3.8 Distribuição Hipergeométrica

- **Definição II:**

Se X for uma variável aleatória hipergeométrica, com parâmetros N, K e n, então a média e a variância de X serão

$$\mu = E(X) = np \quad \text{e}$$

$$\sigma^2 = V(X) = np(1 - p)\left(\frac{N - n}{N - 1}\right) \qquad (4.12)$$

sendo $p = K/N$.

3.9 Distribuição de Poisson

- **Definição I:**

Em geral, considere um intervalo T de números reais, dividido em subintervalos com comprimentos pequenos Δt, e considere que quando Δt tende a zero,

(1) A probabilidade de mais de um evento em um subintervalo tende a zero.

(2) A probabilidade de um evento em um subintervalo tende a $\lambda\Delta t$.

(3) O evento em cada subintervalo é independente de outros subintervalos.

Um experimento aleatório com essas propriedades é chamado de **processo de Poisson**.

3.9 Distribuição de Poisson

- **Definição II:**

  A variável aleatória X, que é igual ao número de eventos no intervalo T, com taxa λ (por unidade), é uma **variável aleatória de Poisson** e:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Definição III:**

  Se X for uma variável aleatória de Poisson, ao longo do intervalo de comprimento T, com taxa λ, então:

$$\mu = E(X) = \lambda T \text{ e } \sigma^2 = V(X) = \lambda T$$

3.9 Distribuição de Poisson

- **Exemplo:**

Para o caso do fio delgado de cobre, suponha que o número de falhas siga a distribuição de Poisson, com uma média de 2,3 falhas por milímetro. Determine a probabilidade de existir exatamente 2 falhas em 1 milímetro de fio.

Designe por X o número de falhas em 1 milímetro de fio. Então, $E(X) = 2{,}3$ falhas e

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2,3}2{,}3^2}{2!} = 0{,}265$$

Determine a probabilidade de 10 falhas em 5 milímetros de fio. Seja X o número de falhas em 5 milímetros de fio. Então, X tem uma distribuição de Poisson com

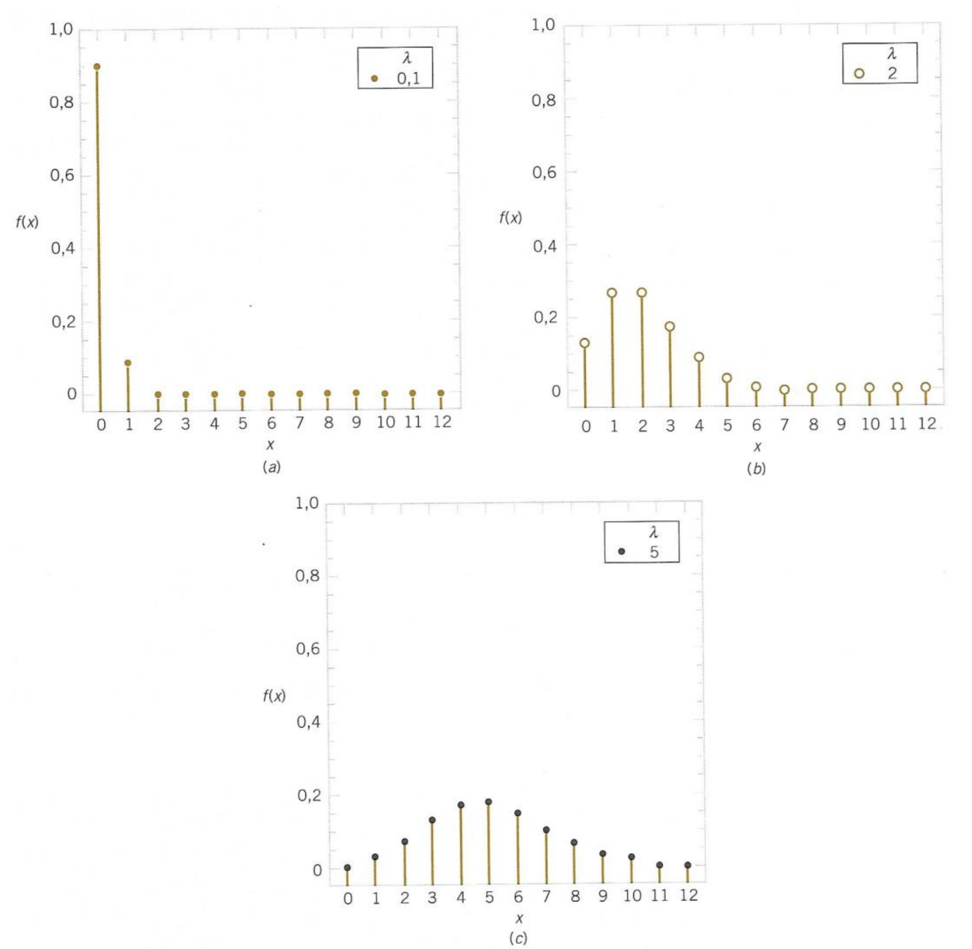
$$E(X) = 5 \text{ mm} \times 2{,}3 \text{ falhas/mm} = 11{,}5 \text{ falhas}$$

Conseqüentemente,

$$P(X = 10) = e^{-11,5}\, 11{,}5^{10}/10! = 0{,}113$$

3.9 Distribuição de Poisson

Fig. 3.14 Distribuições de Poisson para valores selecionados dos parâmetros



TERMOS E CONCEITOS IMPORTANTES

Experimentos de Bernoulli

Distribuição binomial

Função de distribuição cumulativa – variável aleatória discreta

Distribuição uniforme discreta

População finita

Distribuição geométrica

Distribuição hipergeométrica

Média – variável aleatória discreta

Média – função de uma variável aleatória discreta

Distribuição binomial negativa

Distribuição de Poisson

Distribuição de probabilidade

Função de distribuição

Desvio-padrão – variável aleatória discreta

Variância – variável aleatória discreta