4

Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

ESQUEMA DO CAPÍTULO

Objetivos de Aprendizagem

Após estudo cuidadoso deste capítulo você deverá ser capaz de:

1. Determinar probabilidades a partir de funções de densidade de probabilidade;
2. Determinar probabilidades a partir funções de distribuições cumulativa, determinar funções de distribuições cumulativas a partir de funções de probabilidade e o inverso;
3. Calcular médias e variâncias de variáveis aleatórias contínuas;
4. Compreender os pressupostos de cada uma das distribuições de probabilidades contínuas apresentadas;
5. Selecionar a distribuição de probabilidade contínua apropriada para calcular probabilidades em aplicações específicas;
6. Calcular probabilidades, determinar médias e variâncias para cada uma das distribuições de probabilidade apresentadas;
7. Padronizar variáveis aleatórias normais;
8. Utilizar tabelas de distribuições cumulativas da distribuição normal padronizada para calcular probabilidades;
9. Aproximar probabilidades para algumas distribuições binomiais e de Poisson.

4.1 Variáveis Aleatórias Contínuas

- Neste capítulo, apresentaremos modelos comuns de probabilidade de variáveis aleatórias contínuas:
  - Exemplo 1: A medida X da corrente em um fio delgado de cobre é uma variável aleatória contínua; de fato, replicações podem diferir por causa de pequenas variações nas variáveis não controladas no experimento; além disso, o valor de X pode ser pensado como um *continuum*;
  - Exemplo 2: Uma peça é selecionada de uma produção diária com uma medição muito acurada de um comprimento Y; de fato, a medida pode sofre variações devido a muitas causas, tais como vibrações, flutuações na temperatura, diferenças entre operadores, calibrações, desgaste e mesmo variação na matéria prima.

4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Funções densidade são comumente utilizadas em engenharia (vide figura)

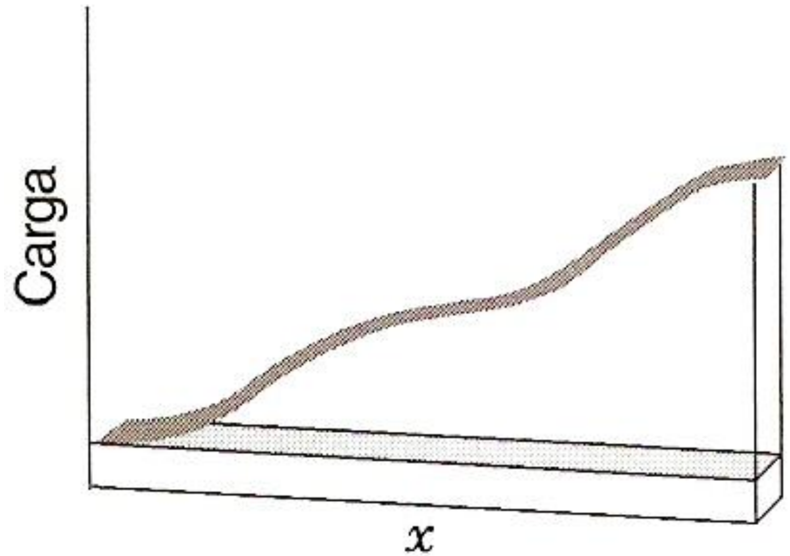


Fig. 4.1 Função de densidade de uma carga ao longo de uma viga

4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Função densidade de probabilidade

Definição

Para uma variável aleatória contínua X, uma **função densidade de probabilidade** é uma função tal que

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

(3) $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx =$ área sob $f(x)$ de a a b

para qualquer a e b (5.1)

4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Cálculo de probabilidades em variáveis aleatórias contínuas:

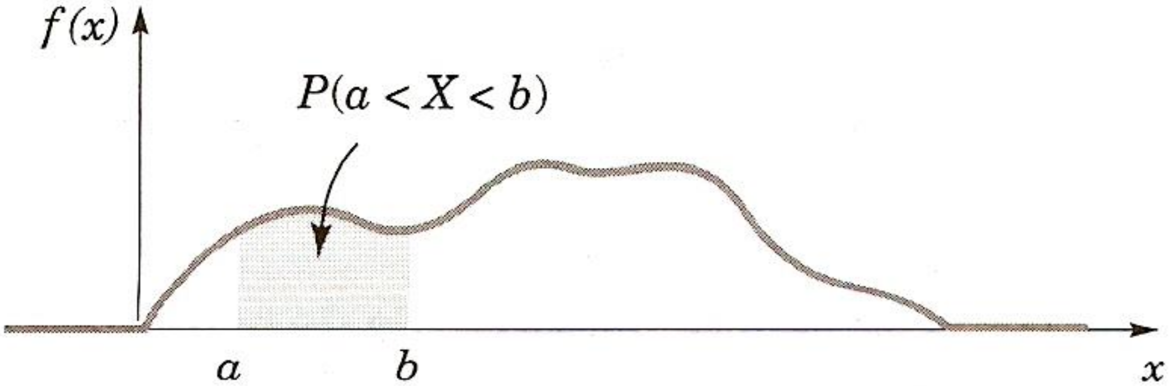


Fig. 4.2 Probabilidade determinada a partir da área sob a curva

4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Funções densidade de probabilidade:

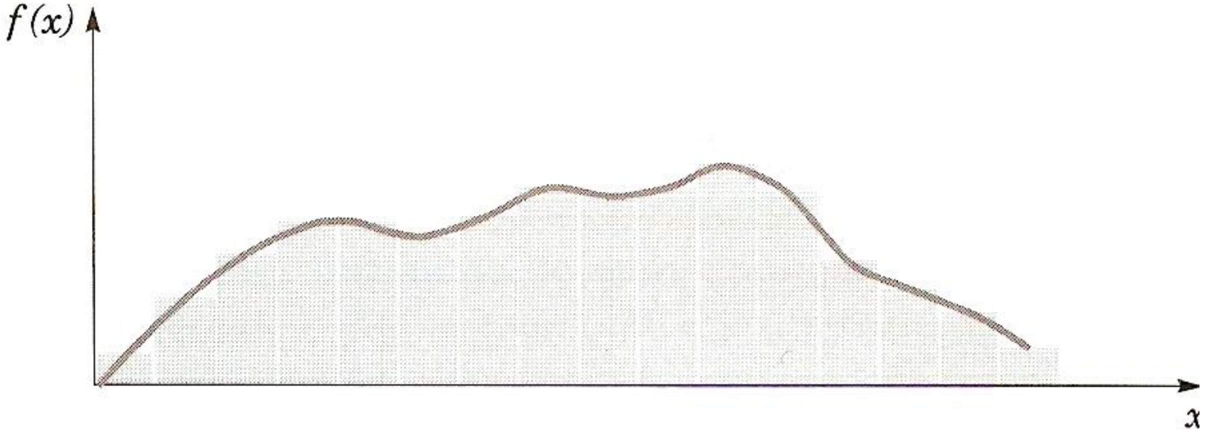


Fig. 4.2 O histograma aproxima a função densidade de probabilidade

4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Particularidades no cálculo de probabilidades com variáveis aleatórias contínuas:

Se X for uma variável aleatória contínua, então para qualquer x_1 e x_2,

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = \\ = P(x_1 < X < x_2) \qquad (5.2)$$

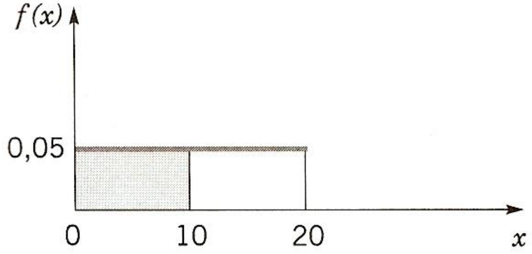
4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Exemplo 4.1:

Faça a variável aleatória contínua X denotar a corrente em um fio delgado de cobre, medida em miliampères. Suponha que a faixa de X seja [0,20 mA] e considere que a função densidade de probabilidade de X seja $f(x) = 0{,}05$ para $0 \le x \le 20$. Qual é a probabilidade de que uma medida da corrente seja menor que 10 miliampères?

- Solução:

$$P(X < 10) = \int_0^{10} f(x)\, dx = 0{,}5$$

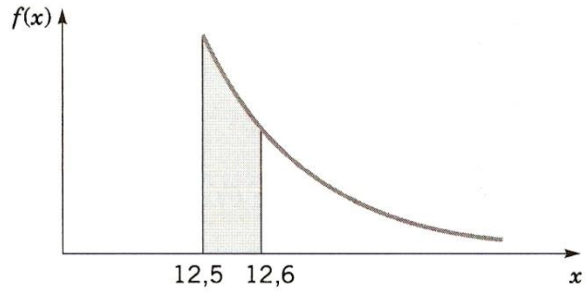


4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Exemplo 4.2:

Faça a variável aleatória contínua *X* denotar o diâmetro de um orifício perfurado em uma placa com um componente metálico. O diâmetro que se quer atingir, o chamado diâmetro alvo, é 12,5 milímetros. A maioria dos distúrbios aleatórios no processo resulta em diâmetros maiores. Dados históricos mostram que a distribuição de *X* pode ser modelada por uma função densidade de probabilidade $f(x) = 20e^{-20(x - 12,5)}$, $x \geq 12,5$.

Se uma peça com um diâmetro maior que 12,60 milímetros for descartada, qual será a proporção de peças descartadas? A



4.2 Distribuições de Probabilidades e Funções Densidade de Probabilidade

- Exemplo 4.2 (solução):

$$P(X > 12{,}60) = \int_{12{,}6}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{12{,}6}^{\infty} 20e^{-20(x-12{,}5)}\,dx$$

$$= -e^{-20(x-12{,}5)}\Big|_{12{,}6}^{\infty} = 0{,}135$$

4.3 Funções de Distribuições Cumulativas

- Definição:

Definição

A **função de distribuição cumulativa** de uma variável aleatória contínua X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \qquad (5.3)$$

para $-\infty < x < \infty$.

4.3 Funções de Distribuições Cumulativas

- Exemplo 4.3:

Para a medida de corrente no fio de cobre no Exemplo 4.1, a função de distribuição cumulativa da variável aleatória X consiste em três expressões. Se $x < 0$, então $f(x) = 0$. Conseqüentemente,

$$F(x) = 0, \quad \text{para} \quad x < 0$$

e

$$F(x) = \int_0^x f(u)\, du = 0{,}05x, \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 20$$

4.3 Funções de Distribuições Cumulativas

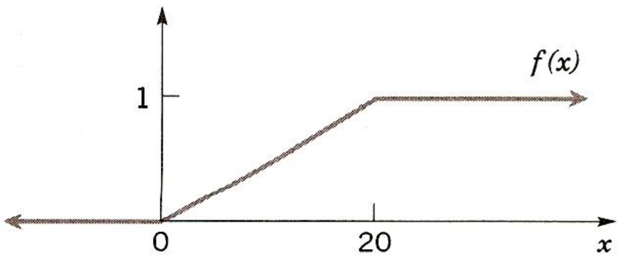
- Exemplo 4.3 (continuação):

Finalmente,

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,du = 1, \quad \text{para} \quad 20 \le x$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}05x & 0 \le x < 20 \\ 1 & 20 \le x \end{cases}$$



4.3 Funções de Distribuições Cumulativas

- Exemplo 4.4:

Para a operação de perfuração no Exemplo 4.2, *F(x)* consiste em duas expressões.

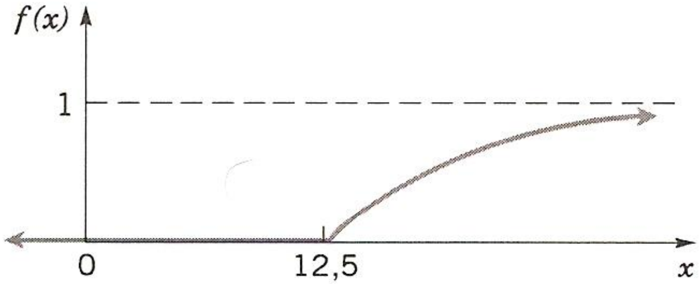
$$F(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 12{,}5$$

e

$$F(x) = \int_{12{,}5}^{x} 20e^{-20(u-12{,}5)}\,du$$
$$= 1 - e^{-20(x-12{,}5)}$$

para $12{,}5 \le x$. Por conseguinte,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 12{,}5 \\ 1 - e^{-20(x-12{,}5)} & 12{,}5 \le x \end{cases}$$



A Fig. 5.7 apresenta um gráfico de *F(x)*.

4.3 Funções de Distribuições Cumulativas

- Exemplo 4.5: O tempo (em milissegundos) até que uma reação química esteja completa é aproximado pela função de distribuição cumulativa.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-0,01x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Determine a função densidade de probabilidade de X. Que proporção de reações é completada dentro de 200 milissegundos? Usando o resultado de que a função densidade de probabilidade é a derivada de $F(x)$, obtemos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,01e^{-0,01x} & 0 \leq x \end{cases}$$

A probabilidade da reação se completar dentro de 200 milissegundos é

$$P(X < 200) = F(200) = 1 - e^{-2} = 0,8647.$$

4.4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

- Definição:

Definição

Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com uma função densidade de probabilidade $f(x)$.
A **média** ou **o valor esperado** de X, denotado por m ou $E(X)$, é

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad (5.4)$$

A **variância** de X, denotada por $V(X)$ ou σ^2, é

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \mu^2 \qquad (5.5)$$

O **desvio-padrão** de X é $\sigma = [V(X)]^{1/2}$.

4.4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

- Exemplo:

Para a medida da corrente no fio de cobre no Exemplo 4.1, a média de X é

$$E(X) = \int_0^{20} x f(x)\, dx = 0{,}05x^2/2 \Big|_0^{20} = 10$$

A variância de X é

$$V(X) = \int_0^{20} (x - 10)^2 f(x)\, dx$$

$$= 0{,}05(x - 10)^3/3 \Big|_0^{20} = 33{,}33$$

4.4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

- Exemplo II:

Para a operação de perfuração no Exemplo 4.2, a média de X é

$$E(X) = \int_{12,5}^{\infty} x f(x)\, dx$$

A integração por partes pode ser usada para mostrar que

$$E(X) = -xe^{-20(x-12,5)} - \left.\frac{e^{-20(x-12,5)}}{20}\right|_{12,5}^{\infty}$$

$$= 12,5 + 0,05 = 12,55$$

4.4 Média e Variância de uma Variável Aleatória Contínua

- Exemplo II (final):

A variância de X é

$$V(X) = \int_{12,5}^{\infty} (x - 12{,}55)^2 f(x)\, dx$$

A integração por partes pode ser usada para mostrar que

$$V(X) = 0{,}0025$$

4.5 Distribuição Uniforme Contínua

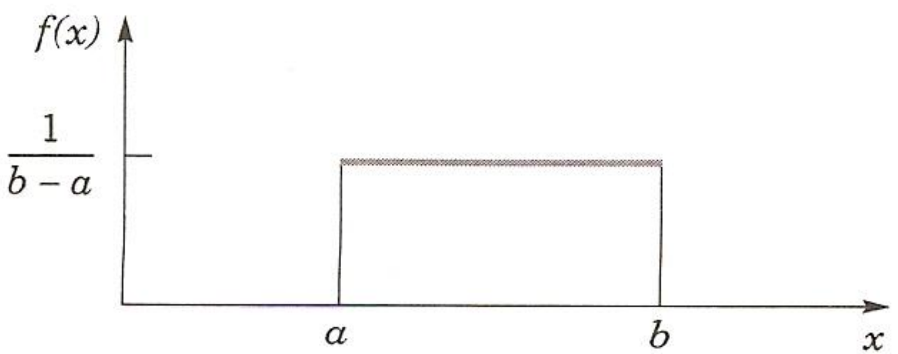
- Definição:

Definição

Uma variável aleatória contínua X com uma função densidade de probabilidade

$$f(x) = 1/(b - a), \qquad a \le x \le b \qquad (5.6)$$

tem uma **distribuição uniforme contínua**.



4.5 Distribuição Uniforme Contínua

- Média e variância de uma variável aleatória contínua uniforme:

A média de uma variável aleatória contínua uniforme X é

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{0{,}5x^2}{b-a}\bigg|_a^b$$

$$= (a+b)/2$$

A variância de X é

$$V(X) = \int_a^b \frac{\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2}{b-a}\,dx = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b$$

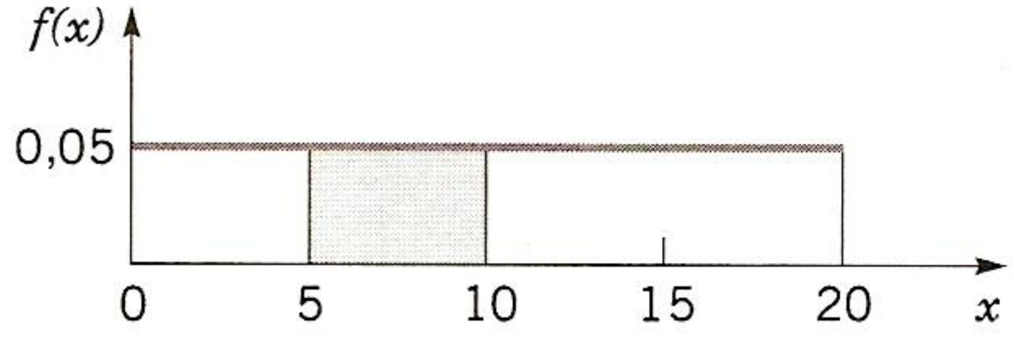
$$= (b-a)^2/12$$

4.5 Distribuição Uniforme Contínua

- Exemplo:

Faça a variável aleatória contínua X denotar a corrente medida em um fio delgado de cobre em miliampères. Considere que a faixa de X seja [0, 20 mA] e suponha que a função densidade de probabilidade de X seja $f(x) = 0{,}05$, $0 \leq x \leq 20$.

Qual é a probabilidade da medida da corrente estar entre 5 e 10 miliampères? A probabilidade requerida é mostrada como uma área sombreada na Fig. 5.9.



4.5 Distribuição Uniforme Contínua

- Exemplo (solução):

$$P(5 < X < 10) = \int_{5}^{10} f(x)\,dx$$

$$= 5(0{,}05) = 0{,}25$$

Também

$$E(X) = 10 \text{ mA} \quad \text{e} \quad V(X) = 20^2/12 = 33{,}33 \text{ mA}^2$$

Conseqüentemente, o desvio-padrão de X é 5,77 mA.

4.6 Distribuição Normal

- Definição:

Definição

Uma variável aleatória X, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty \qquad (5.8)$$

tem uma **distribuição normal**, com parâmetros μ, em que $-\infty < \mu < \infty$, e $\sigma > 0$. Também

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad V(X) = \sigma^2 \qquad (5.9)$$

4.6 Distribuição Normal

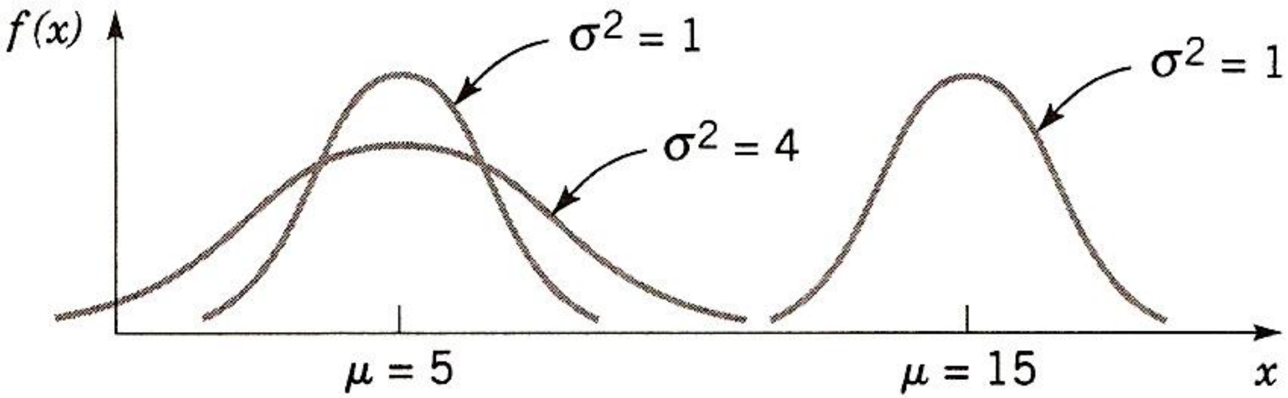


Fig. 4.10 Função densidade de probabilidade normal para valores selecionados dos parâmetros μ e σ^2.

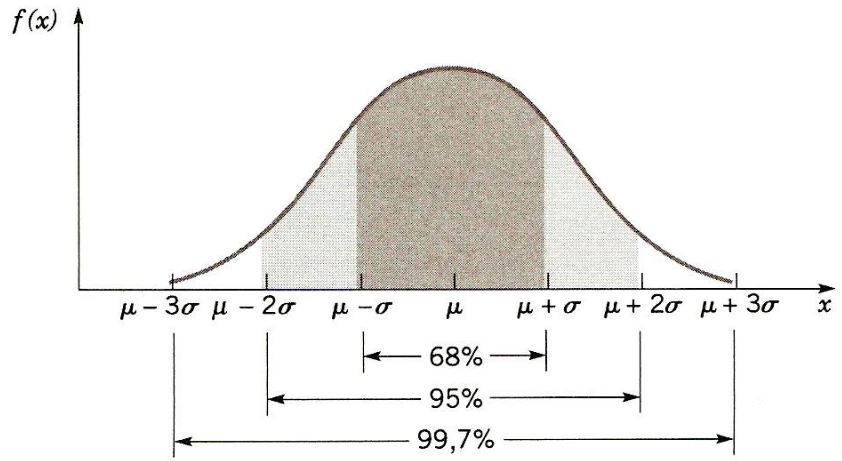
4.6 Distribuição Normal

- Alguns resultados úteis da distribuição normal:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$$

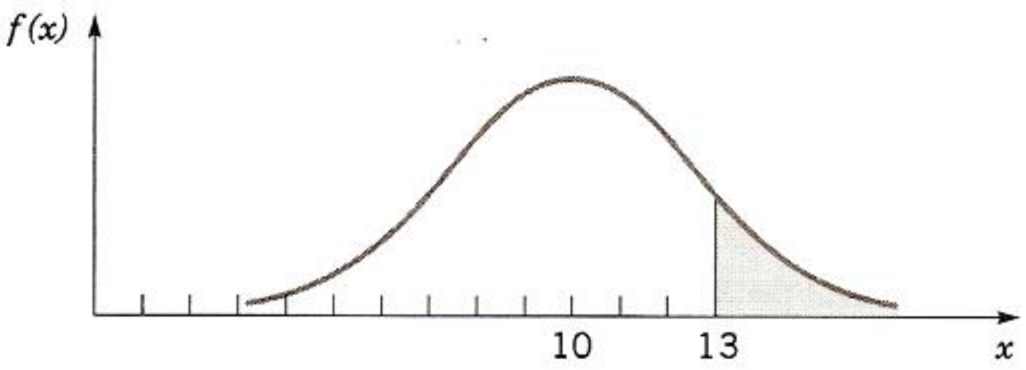
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$$



4.6 Distribuição Normal

- Exemplo:

Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal com uma média de 10 miliampères e uma variância de 4 (miliampères)^2. Qual é a probabilidade da medida exceder 13 miliampères?



4.6 Distribuição Normal

- A normal padrão:

Definição

Uma variável aleatória normal com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ é chamada de **variável aleatória normal padrão**. Uma variável aleatória normal padrão é denotada por Z.

- Definição:

Definição

A função de distribuição cumulativa de uma variável aleatória normal padrão é denotada por

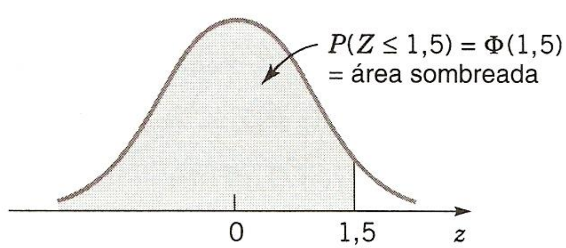
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo:

Considere que Z seja uma variável aleatória normal padrão. A Tabela II do Apêndice fornece probabilidades da forma $P(Z \leq z)$. O uso da Tabela II para encontrar $P(Z \leq 1{,}5)$ é ilustrado na Fig. 5.13. Leia a coluna z para baixo até encontrar o valor 1,5. A probabilidade de 0,93319 é lida na coluna adjacente, marcada como 0,00.

- Probabilidades cumulativas da variável normal padrão, $\Phi(z)$, são encontradas em tabelas:

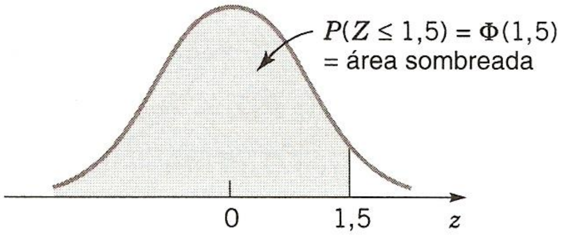


z	0,00	0,01	0,02	0,03
0	0,50000	0,50399	0,50398	0,51197
⋮		⋮		
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo II:

O topo das colunas se refere às casas decimais dos valores de z em $P(Z \leq z)$. Por exemplo, $P(Z \leq 1{,}53)$ é encontrado lendo a coluna de z até o valor de 1,5 e, então, selecionando a coluna marcada como 0,03, encontrando-se assim a probabilidade de 0,93699.



z	0,00	0,01	0,02	0,03
0	0,50000	0,50399	0,50398	0,51197
⋮		⋮		
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699

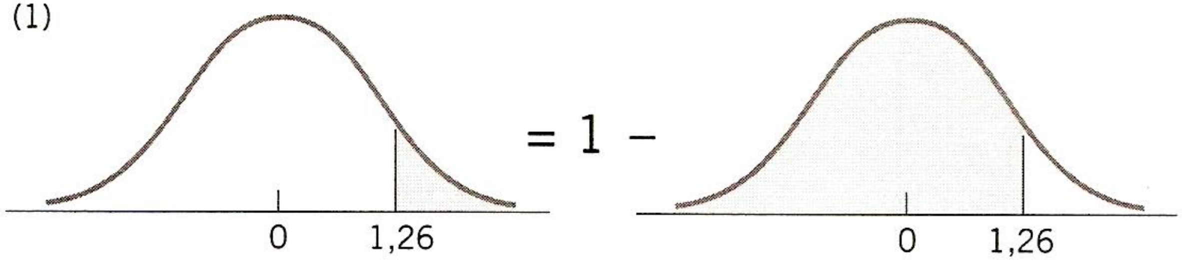
4.6 Distribuição Normal

- Caso (1):

Os seguintes cálculos são mostrados de forma diagramática na Fig. 5.14. Na prática, uma probabilidade é freqüentemente arredondada para um ou dois algarismos significativos.

$$\textbf{(1)}\ P(Z > 1{,}26) = 1 - P(Z \leq 1{,}26)$$
$$= 1 - 0{,}89616 = 0{,}10384$$

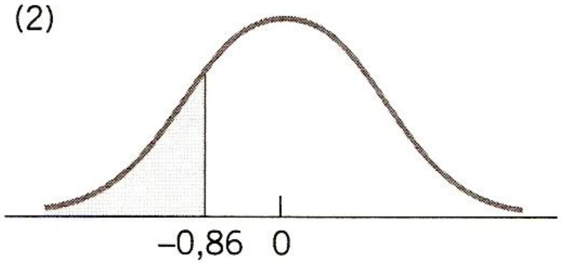
(1)



4.6 Distribuição Normal

- Caso (2):

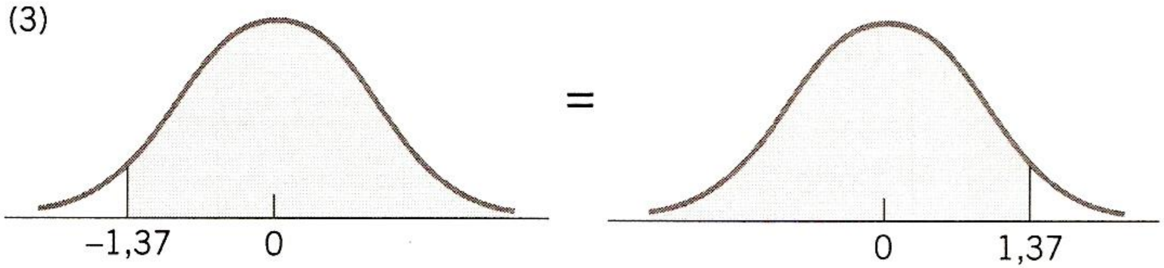
(2) $P(Z < -0{,}86) = 0{,}19490.$



4.6 Distribuição Normal

- Caso (3):

(3) $P(Z > -1{,}37) = P(Z < 1{,}37) = 0{,}91465$



4.6 Distribuição Normal

- Caso (4):

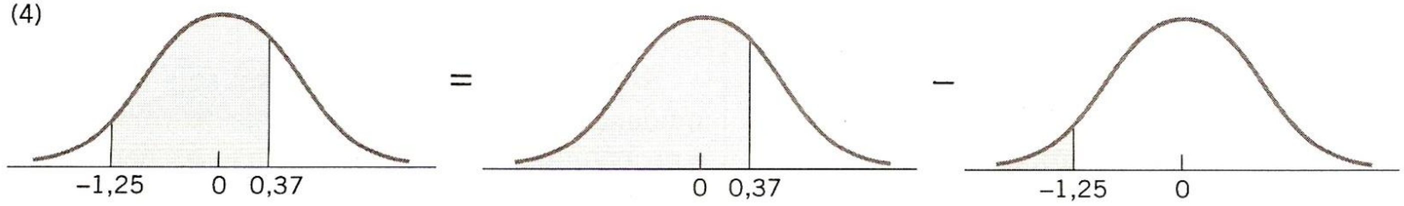
(4) $P(-1{,}25 < Z < 0{,}37)$. Essa probabilidade pode ser encontrada da diferença de duas áreas, $P(Z < 0{,}37) - P(Z < -1{,}25)$. Agora,

$$P(Z < 0{,}37) = 0{,}64431 \quad \text{e}$$

$$P(Z < -1{,}25) = 0{,}10565$$

Por conseguinte,

$$P(-1{,}25 < Z < 0{,}37) = 0{,}64431 - 0{,}10565 = 0{,}53866$$

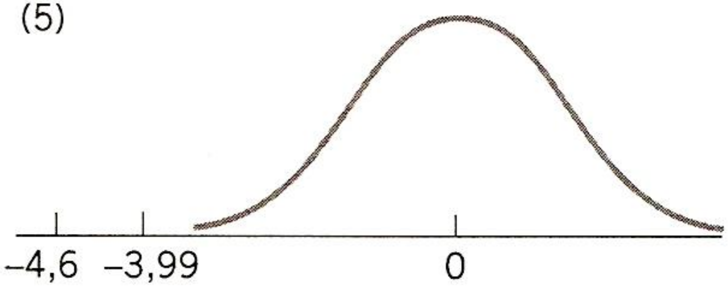


4.6 Distribuição Normal

- Caso (5):

(5) $P(Z \leq -4{,}6)$ não pode ser encontrada exatamente a partir da Tabela II. No entanto, a última entrada na tabela pode ser usada para encontrar que $P(Z \leq -3{,}99) = 0{,}00003$. Pelo fato de $P(Z \leq -4{,}6) < P(Z \leq 3{,}99)$, $P(Z \leq -4{,}6)$ é aproximadamente zero.

(5)

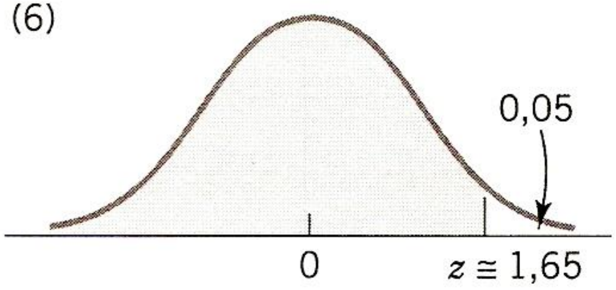


4.6 Distribuição Normal

- Caso (6):

(6) Encontre o valor z tal que $P(Z > z) = 0{,}05$. Essa expressão de probabilidade pode ser escrita como $P(Z \leq z) = 0{,}95$. Agora, a Tabela II é usada ao contrário. Procuramos através das probabilidades até encontrar o valor que corresponda a 0,95. A solução é ilustrada na Fig. 5.14. Não encontramos exatamente 0,95, sendo o valor mais próximo igual a 0,95053, correspondendo a $z = 1{,}65$.

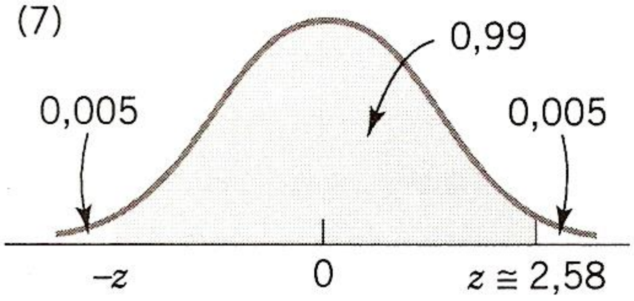
(6)



4.6 Distribuição Normal

- Caso (7):

(7) Encontre o valor de z tal que $P(-z < Z < z) = 0{,}99$. Por causa da simetria da distribuição normal, se a área da região sombreada na Fig. 5.14(7) for igual a 0,99, então a área em cada extremidade da distribuição deverá ser igual a 0,005. Logo, o valor de z corresponde a uma probabilidade de 0,995 na Tabela II. A probabilidade mais próxima desse valor na Tabela II é 0,99506, quando $z = 2{,}58$.



4.6 Distribuição Normal

- Padronização:

Se X for uma variável aleatória normal com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$, então a variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (5.10)$$

será uma variável aleatória normal, com $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$. Ou seja, Z é uma variável aleatória normal padrão.

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo: Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal, com uma média de 10 miliampères e uma variância de 4 $(\text{miliampères})^2$. Qual é a probabilidade da medida exceder 13 miliampères?

Faça X denotar a corrente em miliampères. A probabilidade requerida pode ser representada por $P(X > 13)$. Faça $Z = (X - 10)/2$. A relação entre os vários valores de X e os valores transformados de Z é mostrada na Fig. 5.15. Notamos que $X > 13$ corresponde a $Z > 1{,}5$. Assim, da Tabela II,

$$P(X > 13) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}93319 = 0{,}06681$$

Em vez de usar a Fig. 5.15, a probabilidade pode ser encontrada a partir da desigualdade $X > 13$. Isto é,

$$P(X > 13) = P((X - 10)/2 > (13 - 10)/2)$$
$$= P(Z > 1{,}5) = 0{,}06681$$

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo (continuação):

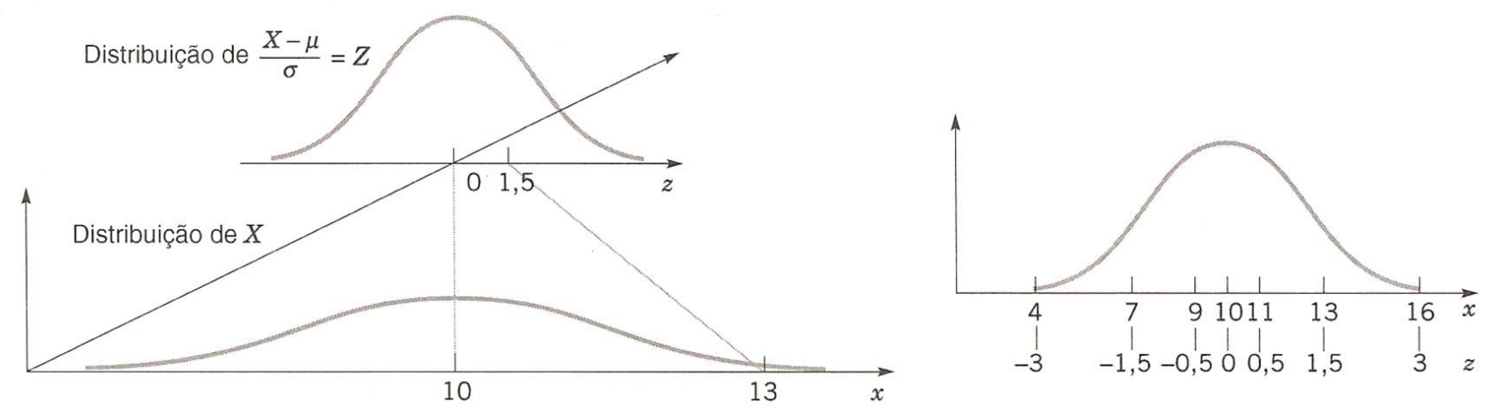


Fig. 4.15 Padronização de uma variável aleatória normal

4.6 Distribuição Normal

- Procedimento geral para o cálculo de probabilidades de variáveis aleatórias normais:

Suponha que X seja uma variável aleatória com média μ e σ^2. Então,

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z) \quad (5.11)$$

em que

Z é uma **variável aleatória normal padrão** e
$z = (x-\mu)/\sigma$ é o **valor z**, obtido pela **padronização** de X.

A probabilidade é obtida entrando na **Tabela II do Apêndice** com $z = (x-\mu)/\sigma$.

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo II:

Continuando o exemplo prévio, qual é a probabilidade da medida da corrente estar entre 9 e 11 miliampères? Da Fig. 5.15, ou procedendo algebricamente, temos

$$
\begin{aligned}
P(9 < X < 11) &= P((9-10)/2 < (X-10)/2 < (11-10)/2) \\
&= P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) \\
&= P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}5) \\
&= 0{,}69146 - 0{,}30854 \\
&= 0{,}38292
\end{aligned}
$$

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo II (continuação):

Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98. O valor requerido é mostrado graficamente na Fig. 5.16. O valor de x é tal que $P(X < x) = 0{,}98$. Pela padronização, essa expressão de probabilidade pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P((X - 10)/2 < (x - 10)/2) \\ &= P(Z < (x - 10)/2) \\ &= 0{,}98 \end{aligned}$$

A Tabela II é usada para encontrar o valor de z, tal que $P(Z < z) = 0{,}98$. A probabilidade mais próxima da Tabela II resulta em

$$P(Z < 2{,}05) = 0{,}97982$$

Conseqüentemente, $(x - 10)/2 = 2{,}05$ e a transformação padronizada são usadas ao contrário para determinar x. O resultado é

$$x = 2(2{,}05) + 10 = 14{,}1 \text{ miliampères}$$

4.6 Distribuição Normal

- Exemplo II (final):

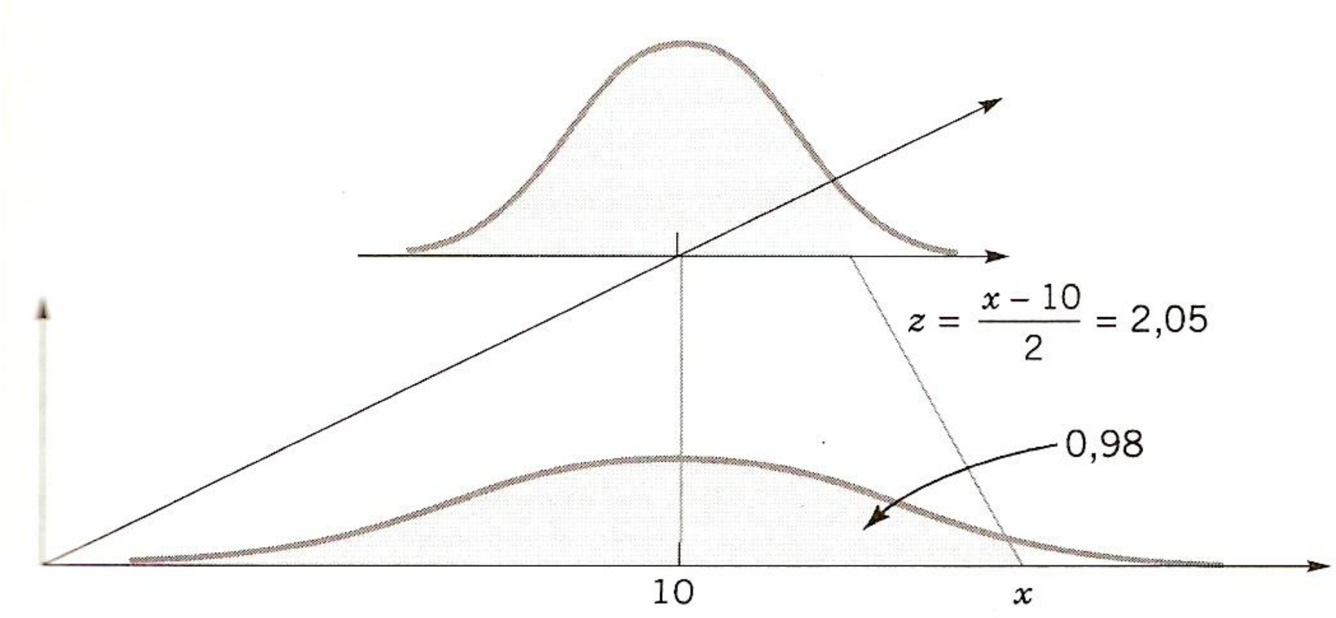


Fig. 4.16 Determinação de um valor *x* para o qual se tenha uma probabilidade especificada

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Exemplo:

Em um canal digital de comunicação, suponha que o número de *bits* recebidos com erro possa ser modelado por uma variável aleatória binomial. Suponha que a probabilidade de um *bit* ser recebido com erro seja de 1×10^{-5}. Se 16 milhões de *bits* forem transmitidos, qual será a probabilidade de se ter mais de 150 erros?

Faça a variável aleatória X denotar o número de erros. Então X é uma variável aleatória binomial e

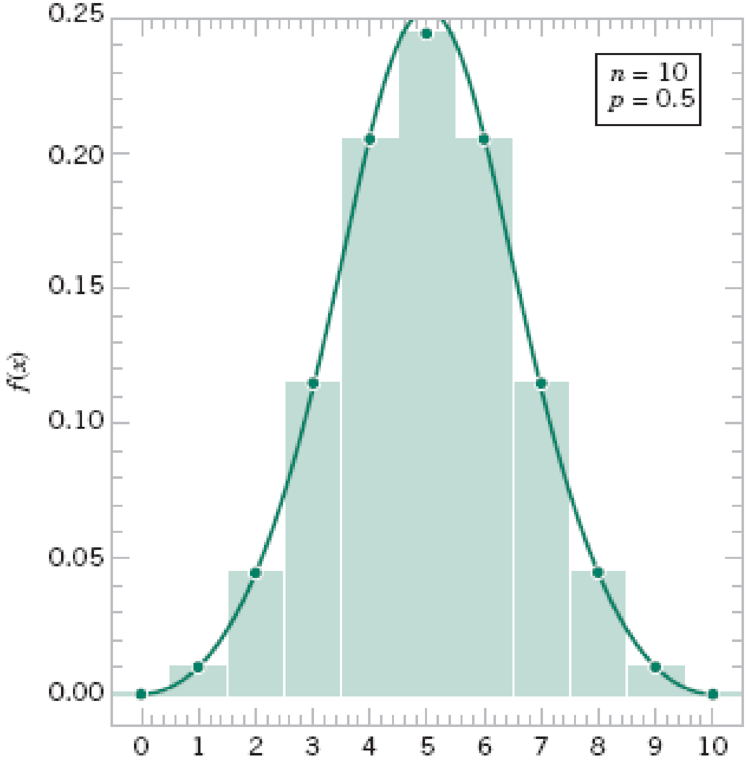
$$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16.000.000}{x} (10^{-5})^x (1 - 10^{-5})^{16.000.000 - x}$$

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Sob certas condições, a distribuição normal pode ser utilizada para aproximar as distribuições binomial e de Poisson.

Fig. 4.19 Aproximação da distribuição binomial pela normal



4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Exemplo:

Em um canal digital de comunicação, suponha que o número de *bits* recebidos com erro possa ser modelado por uma variável aleatória binomial. Suponha que a probabilidade de um *bit* ser recebido com erro seja de 1×10^{-5}. Se 16 milhões de *bits* forem transmitidos, qual será a probabilidade de se ter mais de 150 erros?

Faça a variável aleatória X denotar o número de erros. Então X é uma variável aleatória binomial e

$$P(X > 150) = 1 - P(X \leq 150)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{150} \binom{16.000.000}{x} (10^{-5})^x (1 - 10^{-5})^{16.000.000 - x}$$

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Aproximação da distribuição binomial pela normal:

Se X for uma variável aleatória binomial, então

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{5.12}$$

é aproximadamente uma variável aleatória normal padrão. A aproximação é boa para

$$np > 5 \quad \text{e} \quad n(1-p) > 5$$

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Exemplo (conclusão):

O problema de comunicação digital no exemplo prévio é resolvido como segue.

$$P(X > 150) = P\left(\frac{X - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}} > \frac{150 - 160}{\sqrt{160(1 - 10^{-5})}}\right)$$
$$= P(Z > -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) = 0{,}785$$

- Obs.: porque $np = (1{,}6\times10^{7})(1\times10^{-5}) = 160$ e $n(1\text{-}p)$ é muito maior, espera-se que a aproximação funcione bem nesse caso.

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

distribuição hipergeométrica	$\approx$	distribuição binomial	$\approx$	distribuição normal
	$\dfrac{n}{N} < 0{,}1$		$np > 5$ $n(1 - p) > 5$	

Fig. 4.21 Condições para aproximar as probabilidades hipergeométrica e binomial

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Aproximação da distribuição de Poisson pela normal:

Se X for uma variável aleatória de Poisson, com $E(X) = \lambda$ e $V(X) = \lambda$, então

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.13}$$

é aproximadamente uma variável aleatória normal padrão. A aproximação é boa para

$$\lambda > 5$$

4.7 Aproximações das Distribuições Binomial e de Poisson pela Normal

- Exemplo:

Considere que o número de partículas de asbestos em um centímetro quadrado de poeira siga a distribuição de Poisson com uma média de 1.000. Se um centímetro quadrado de poeira for analisado, qual será a probabilidade de que menos de 950 partículas sejam encontradas?

Esta probabilidade pode ser expressa exatamente como

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000} x^{1000}}{x!}$$

A dificuldade computacional é clara. A probabilidade pode ser aproximada por

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{950 - 1000}{\sqrt{1000}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1{,}58) = 0{,}057$$

4.8 Distribuição Exponencial

- Definição:

A variável aleatória X, que é igual à distância entre contagens sucessivas de um processo de Poisson, com média $\lambda > 0$, tem uma **distribuição exponencial** com parâmetro λ. A função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ para } 0 \leq x < \infty \qquad (5.14)$$

- Média e variância:

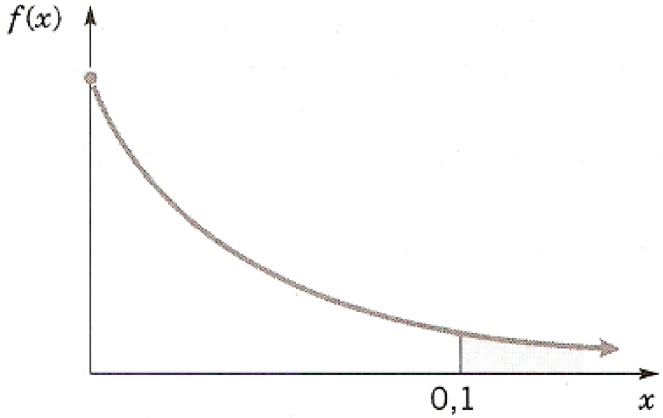
Se a variável aleatória X tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro λ, então

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (5.15)$$

4.8 Distribuição Exponencial

- Exemplo:

Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson, com uma média de 25 conexões por hora. Qual é a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?



4.8 Distribuição Exponencial

- Exemplo (final):

Faça X denotar o tempo, em horas, do início do intervalo até a primeira conexão. Então, X tem uma distribuição exponencial com $\lambda = 25$ conexões por hora. Estamos interessados na probabilidade de X exceder 6 minutos. Uma vez que λ é dado em conexões por hora, expressamos todas as unidades de tempo em horas. Ou seja, 6 minutos = 0,1 hora. A probabilidade requerida é mostrada como a área sombreada sob a função densidade de probabilidade na Fig. 5.25. Logo,

$$P(X > 0{,}1) = \int_{0,1}^{\infty} 25e^{-25x}\,dx$$

$$= e^{-25(0,1)} = 0{,}082$$

4.8 Distribuição Exponencial

- Exemplo II:

Seja X o tempo entre detecções de uma partícula rara em um contador geiger e considere que X tenha uma distribuição exponencial com $E(X)$=1,4 minuto. A probabilidade de detectarmos uma partícula dentro de 30 segundos a partir do começo da contagem é

$$P(X < 0{,}5\,\text{minuto}) = 1 - e^{-0{,}5/1{,}4} = 0{,}30$$

Nesse cálculo, convertemos todas as unidades para minutos. Agora, suponha que liguemos o contador geiger e esperemos 3 minutos sem detectar uma partícula. Qual é a probabilidade de uma partícula ser detectada nos próximos 30 segundos?

4.8 Distribuição Exponencial

- Exemplo II (final):

Visto que já esperamos 3 minutos, sentimos que já é tempo suficiente. Isto é, a probabilidade de uma detecção nos próximos 30 segundos deveria ser maior do que 0,3. No entanto, para uma distribuição exponencial, isso não é verdade. A probabilidade requerida pode ser expressa como uma probabilidade condicional de que $P(X < 3{,}5 \mid X > 3)$. Da definição de probabilidade condicional,

$$P(X < 3{,}5 \mid X > 3) = P(3 < X < 3{,}5)/P(X > 3)$$

em que

$$\begin{aligned} P(3 < X < 3{,}5) &= F(3{,}5) - F(3) \\ &= [1 - e^{-3{,}5/1{,}4}] - [1 - e^{-3/1{,}4}] \\ &= 0{,}0035 \end{aligned}$$

e

$$P(X > 3) = e^{-3/1{,}4} = 0{,}117$$

Assim,

$$P(X < 3{,}5 \mid X > 3) = 0{,}035/0{,}117 = 0{,}30$$

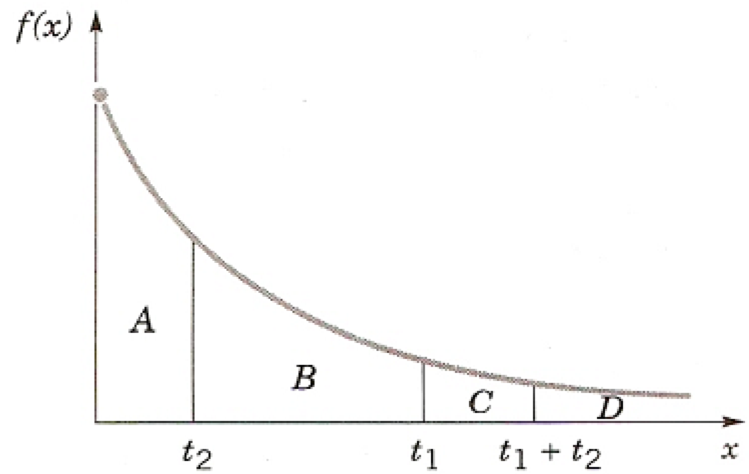
4.8 Distribuição Exponencial

- Propriedade interessante:

Propriedade de Falta de Memória

Para uma variável aleatória exponencial X,

$$P(X < t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X < t_2) \qquad (5.16)$$



4.9 Distribuição de Erlang e Gama

4.9.1 Distribuição de Erlang

- Definição:

Definição

A variável aleatória X, que é igual ao comprimento do intervalo até que r falhas ocorram em um processo de Poisson, com média $\lambda > 0$, tem uma **distribuição de Erlang** com parâmetros λ e r. A função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}, \quad \text{para} \quad x > 0 \ \text{e} \ r = 1, 2, \ldots \qquad (5.17)$$

- Média e variância:

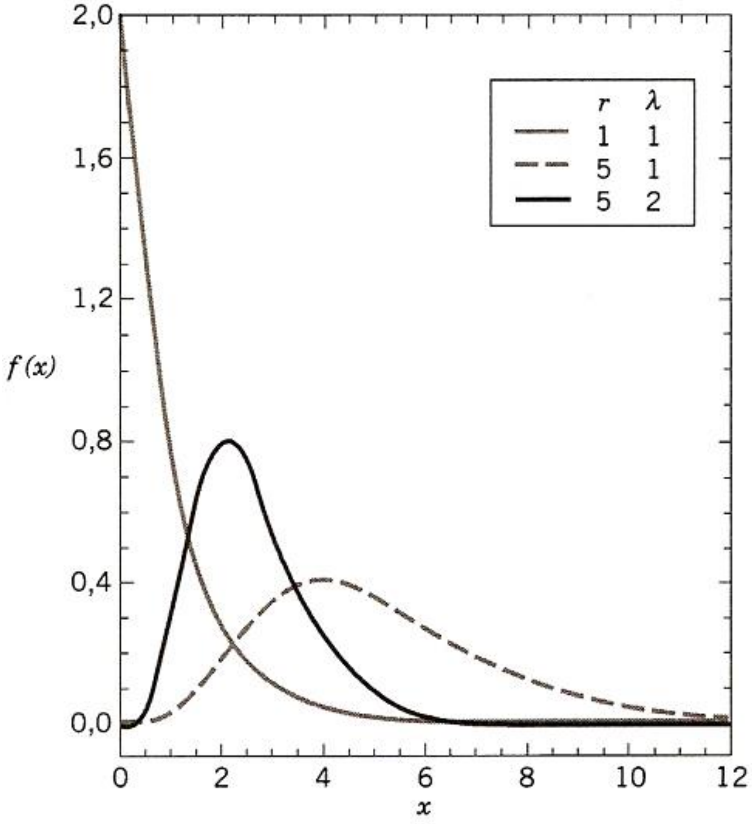
Se X for uma variável aleatória de Erlang, com parâmetros λ e r, então a média e a variância de X serão

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{e} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2 \qquad (5.18)$$

4.9 Distribuição de Erlang e Gama

4.9.1 Distribuição de Erlang

Fig. 4.xx Função densidade de probabilidade de Erlang para valores selecionados de *r* e λ.



4.9 Distribuição de Erlang e Gama

4.9.2 Distribuição Gama

- Definições:

Definição

A **função gama** é

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{para} \quad r > 0 \qquad (5.19)$$

Definição

A variável aleatória X, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad \text{para} \quad x > 0 \qquad (5.20)$$

tem uma **distribuição gama** com parâmetros $\lambda > 0$ e $r > 0$. Se r for um inteiro, então X terá uma distribuição de Erlang.

4.9 Distribuição de Erlang e Gama

4.9.2 Distribuição Gama:

- Média e variância

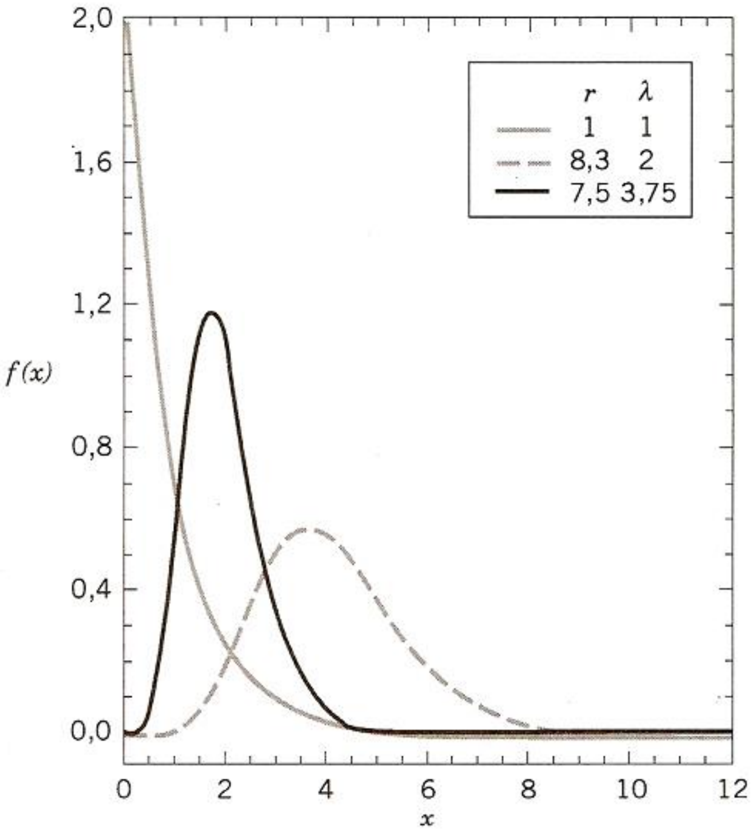
Se X for uma variável aleatória gama, com parâmetros λ e r, então a média e a variância de X serão

$$\mu = E(X) = r/\lambda \quad \text{e} \quad \sigma^2 = V(X) = r/\lambda^2 \qquad (5.21)$$

4.9 Distribuição de Erlang e Gama

4.9.2 Distribuição Gama

Fig. 5.25 Função densidade de probabilidade gama para valores selecionados de λ e *r*.



4.10 Distribuição de Weibull

- Definição:

Definição

A variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta-1} e^{-(x/\delta)^{\beta}}, \quad \text{para } x > 0 \qquad (5.22)$$

tem uma **distribuição de Weibull** com parâmetro de escala $\delta > 0$ e parâmetro de forma $\beta > 0$.

4.10 Distribuição de Weibull

- Distribuição cumulativa:

Se X tiver uma distribuição de Weibull, com parâmetros δ e β, então a função de distribuição cumulativa de X será

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^{\beta}} \tag{5.23}$$

- Média e variância:

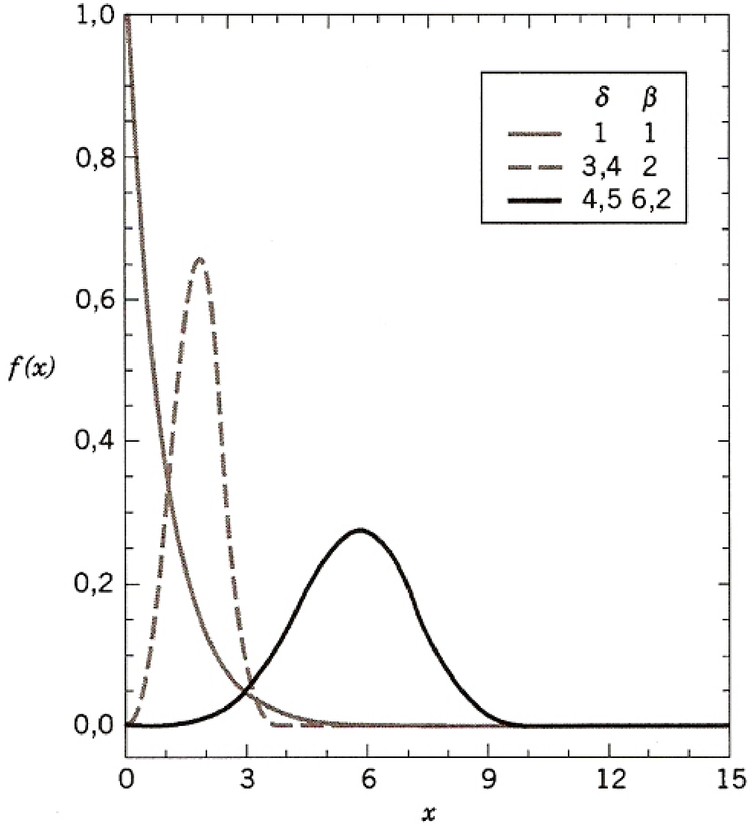
Se X tiver uma distribuição de Weibull, com parâmetros δ e β, então a média e a variância de x serão

$$\mu = \delta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{e}$$

$$\sigma^2 = \delta^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \delta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2 \tag{5.24}$$

4.10 Distribuição de Weibull

Fig. 4.26 Funções densidade de probabilidade de Weibull para valores selecionados de δ e β.



4.11 Distribuição de Lognormal

- Definição:

Distribuição Lognormal

Seja W tendo uma distribuição normal, com média θ e variância ω^2; então, $X = \exp(W)$ é uma **variável aleatória lognormal** com função densidade de probabilidade

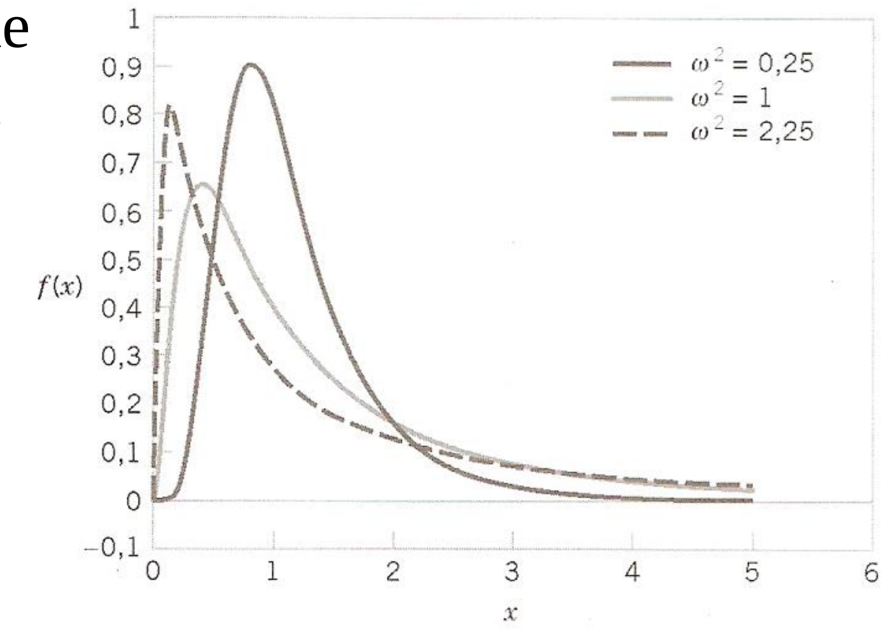
$$f(x) = \frac{1}{x\omega\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \theta)^2}{2\omega^2}\right] \qquad 0 < x < \infty$$

A média e a variância de X são

$$E(X) = e^{\theta + \omega^2/2} \text{ e } V(X) = e^{2\theta + \omega^2}\left(e^{\omega^2} - 1\right) \qquad (4\text{-}22)$$

4.11 Distribuição de Lognormal

Fig. 4.27 Funções densidade de probabilidade lognormal com $\theta = 0$, para valores selecionados de ω^2.



TERMOS E CONCEITOS IMPORTANTES

Distribuição uniforme contínua Correção de continuidade Função de distribuição cumulativa – variável aleatória contínua Distribuição de Erlang	Distribuição Gama Propriedade de falta de memória – variável aleatória contínua Média – variável aleatória contínua Média – função de uma variável aleatória contínua	Aproximação normal para as distribuições binomial e de Poisson Distribuição normal Distribuição de probabilidade – variável aleatória contínua	Desvio-padrão – variável aleatória discreta Distribuição normal padronizada Padronização Variância – variável aleatória contínua Distribuição de Weibull