



Lista 1

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.185:**

Denotemos L um pacote ser pequeno e leve e Q , um pacote ser quebrado. Como $P(L)=0,40$, $P(L')=0,60$, $P(Q|L)=0,02$ e $P(Q|L')=0,01$, então:

a) Pela regra da probabilidade total, tem-se que

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(Q \cap L) + P(Q \cap L') = \\ &= P(Q|L) \times P(L) + P(Q|L') \times P(L') = \\ &= 0,02 \times 0,40 + 0,01 \times 0,60 = 0,014 \end{aligned}$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.187:**

a) $P(A) = \frac{80+2}{100} = 0,82$

b) $P(B) = \frac{80+10}{100} = 0,90$

c) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0,82 = 0,18$

d) $P(A \cap B) = \frac{80}{100} = 0,80$

e) $P(A \cup B) = \frac{80+2+10}{100} = 0,92$

ou alternativamente

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0,82 + 0,90 - 0,80 = 0,92 \end{aligned}$$

f) $P(A' \cup B) = \frac{80+10+8}{100} = 0,98$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.188:**

Denotemos A o eixo atende aos requisitos de acabamento de superfície, B o eixo atende aos requisitos de bordas arredondadas e F o eixo ser proveniente da ferramenta 1. Então:

$$\text{a) } P(A \cup B \cup F) = \frac{(200+1+145+4)+(4+8)+2}{370} = \frac{364}{370} = 0,984$$

$$\text{b) } P(A \cup B' \cup F') = \frac{200+1+145+4+2+6+8}{370} = \frac{366}{370} = 0,989$$

$$\text{c) } P(A \cap B \cup F') = \frac{200+145+8+4+6}{370} = \frac{363}{370} = 0,981$$

$$\text{d) } P(A \cup F') = \frac{200+1+145+4+8+6}{370} = \frac{364}{370} = 0,984$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.189:**

Não é possível que A, B e C sejam mutuamente excludentes, pois, se fossem, então teríamos que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) = \\ &= 0,3 + 0,4 + 0,5 = 1,2 > 1, \end{aligned}$$

o que viola um dos axiomas da probabilidade.

Logo, pelo menos dois dos eventos podem ocorrer simultaneamente e não podem ser, portanto, mutuamente excludentes.

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.190:**

Denotemos A o eixo atende aos requisitos de acabamento de superfície, B o eixo atende aos requisitos de bordas arredondadas. Então:

$$\text{a) } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{345}{370}}{\frac{345+12}{370}} = \frac{345}{357} = 0,966$$

$$\text{b) } P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{5}{370}}{\frac{5+8}{370}} = \frac{5}{13} = 0,385$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.196:**

Denotemos A , se peça de alumínio tem acabamento de superfície excelente, e B , se a peça tem comprimento excelente. Tem-se que

$$P(A) = \frac{80 + 2}{100} = 0,820$$

e que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{80}{100}}{\frac{90}{100}} = \frac{80}{90} = 0,889.$$

Como $P(A) \neq P(A|B)$, então A e B são eventos **dependentes**.

Note-se que seria possível chegar à mesma conclusão verificando alternativamente que $P(B) \neq P(B|A)$ ou que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.202:**

Denotemos A, a peça usinada ter uma extremidade em condição moderada e B, a peça ter uma profundidade do orifício abaixo do valor alvo. Então:

$$\text{a) } P(A \cap B) = \frac{20}{200} = 0,100$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= \frac{25+20}{200} + \frac{10+20+80}{200} - \frac{20}{200} = \frac{135}{200} = 0,675 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P(A' \cup B') &= P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = \\ &= \frac{15+10+50+80}{200} + \frac{15+25+50}{200} - \frac{15+50}{200} = \\ &= \frac{180}{200} = 0,900 \end{aligned}$$

ou, mais facilmente, por uma das Leis de De Morgan

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,100 = 0,900$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 1.207:**

a) Denotemos A_i ao evento do i -ésimo parafuso *estar apertado* apropriadamente. Então, por probabilidade condicionada, tem-se

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_1) = \\ &= \frac{12}{17} \times \frac{13}{18} \times \frac{14}{19} \times \frac{15}{20} = 0,282 \end{aligned}$$

Nota: Outra forma de resolver o problema consiste em dividir o número de formas pelas quais podemos selecionar 4 parafusos apertados entre 15, isto é, combinação de 15, 4 a 4, $(^{15}_4) = 1365$, pelo número de formas pelas quais podemos selecionar 4 parafusos entre os 20 totais, $(^{20}_4) = 4845$, que é 0,282, com $(^n_k) = n! / [(n-k)!k!]$.

b) Denotemos B ao evento de que ao menos um parafuso não esteja apertado apropriadamente. Então

$$P(B) = 1 - P(\text{todos estejam apertados}) = 1 - 0,282 = 0,718$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.211:**

Denotemos A , se a operação de enchimento for incorreta, e B , se o processo for operado em baixa velocidade. São conhecidas as probabilidades $P(A|B) = 0,001$, $P(A|B') = 0,01$ e $P(B') = 0,30$. Então:

a) A probabilidade de a operação ser incorreta pode ser encontrada pela *Regra da Probabilidade Total*,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B') = \\ &= P(A|B) \times P(B) + P(A|B') \times P(B') = \\ &= 0,001 \times (1 - 0,30) + 0,01 \times 0,30 = 0,0037 \end{aligned}$$

b) A probabilidade $P(B'|A)$ pode ser encontrada pela *Regra de Bayes*,

$$P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B') \times P(B')}{P(A)} = \frac{0,01 \times 0,30}{0,0037} = 0,811$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.216:**

Denotemos por A_i o evento de a ferramenta de usinagem estar ociosa no tempo i e $P(A_i) = 0,15$, para todo i . Portanto:

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_i)^5 = 0,15^5 = 0,0001$

b) $P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A'_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) +$
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A'_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A'_4 \cap A_5) +$
 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A'_5) = 5 \times P(A_i)^4 \times [1 - P(A_i)] = 0,0022$

c) Por raciocínio análogo àquele desenvolvido na letra anterior, a probabilidade de se encontrar exatamente 3 períodos ociosos é

$$(\text{número de combinações de 5, 2 a 2}) \times P(A_i)^3 \times [1 - P(A_i)]^2 =$$
$$10 \times 0,15^3 \times 0,85^2 = 0,0244$$

A probabilidade de se encontrar 3 ou mais períodos ociosos é, portanto,
 $0,0001 + 0,0022 + 0,0244 = 0,0266$