1

Introdução à Probabilidade

ESQUEMA DO CAPÍTULO

1.1 Modelos Matemáticos

- “Todas as vezes que empregarmos Matemática a fim de estudar alguns fenômenos de observação, deveremos essencialmente começar por construir um modelo matemático (determinístico ou probabilístico) para esses fenômenos. Inevitavelmente, o modelo dever simplificar as coisas e certos pormenores dever ser desprezados. O bom resultado do modelo depende de que os pormenores desprezados sejam ou não realmente sem importância na elucidação do fenômeno estudado. A resolução do problema matemático pode estar correta e, não obstante, estar em grande discordância com os dados observados. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo matemático especificado é ou não adequado, ***antes*** que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade do modelo, deveremos ***deduzir*** um certo número de consequências de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados ***previstos*** com observações.” *J. Neyman*.

1.1 Modelos Matemáticos

- Modelo determíníistico:
  - Modelo que estipule que as condições sob as quais um experimento seja executado determinem o resultado do experimento;
  - Exemplo: I=E/R, Lei de Ohm;
  - Outros exemplos: leis da gravitação, leis de Kepler etc.;
- Modelo não-determinístico ou probabilístico:
  - As condições sob as quais um experimento seja executado determinam somente o comportamento probabilístico (ou lei probabilística) do resultado observável;
  - Exemplo: Número de partículas α emitidas por um material radioativo;
  - Outros exemplos: observações meteorológicas etc.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Conjunto:
  - Coleção de objetos;
  - Representados por letras maiúsculas A, B etc.;
- Maneiras de descrever um conjunto:
  - Listagem explícita dos elementos de A:
    - A = {1, 2, 3, 4, 5, 6};
  - Por meio de palavras:
    - A é a face que cai para cima em um lançamento de um dado sobre uma superfície plana;
  - Notação matemática:
    - $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$;
- Membros ou elementos de um conjunto:
  - Objetos que individualmente formam a coleção ou conjunto;
  - Escrevemos $a \in A$, quando *a* for um elemento de A, e $a \notin A$, quando *a* não for um elemento de A;

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Conjunto fundamental:
  - Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, usualmente representado pela letra U;
- Conjunto vazio:
  - Notação: $\varnothing$;
- Subconjuntos:
  - Quando ser elemento do conjunto A implica em ser elemento do conjunto B, A é um subconjunto de B; notação:
    - $A \subset B$;
- Conjuntos iguais:
  - Quando dois conjuntos contiverem os mesmos elementos, eles serão iguais:
    - $A = B$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

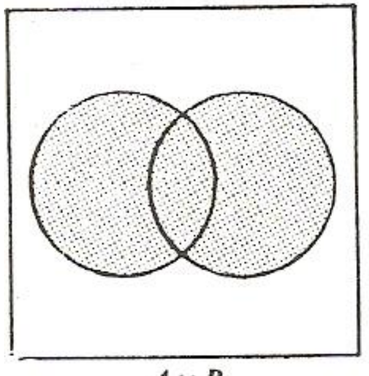
- Propriedades do conjunto vazio e do conjunto fundamental:
  - Para todo conjunto A, temos $\varnothing \subset$ A;
  - Desde que se tenha definido o conjunto fundamental, então para todo conjunto A, considerado na composição de U, teremos A $\subset$ U;
  - Exemplo: Seja
    U = todos os números reais,
    A = $\{x|\ x^2+2x-3 = 0\}$, B = $\{x|\ (x-2)(x^2+2x-3) = 0\}$, e
    C = $\{x|\ x = -3, 1, 2\}$. Então, A $\subset$ B e B = C;

1.2 Introdução aos Conjuntos

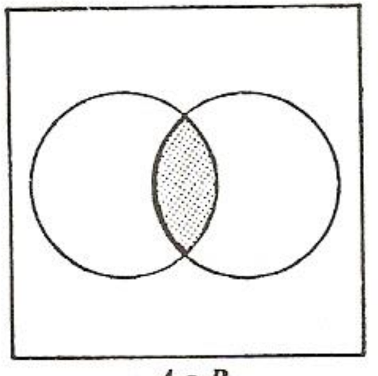
- Operações fundamentais com conjuntos:
  - União de conjuntos:
    - C é a união de A e B se C = $\{x \mid x \in A$ ou $x \in B$ (ou ambos)$\}$;
    - Notação: $C = A \cup B$;
  - Interseção de conjuntos:
    - D é a interseção de A e B se D = $\{x \mid x \in A$ e $x \in B\}$;
    - Notação: $D = A \cap B$;

1.2 Introdução aos Conjuntos

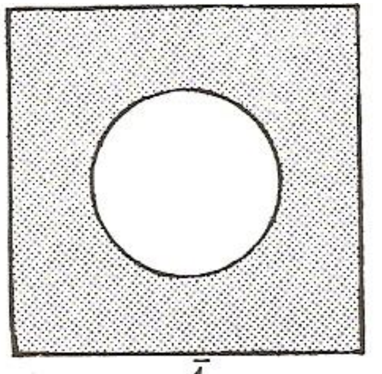
- Operações fundamentais com conjuntos (final):
  - Complemento de conjuntos:
    - $\bar{A}$ é o complemento de A se $\bar{A}=\{x \mid x \notin A\}$;
- Diagrama de Venn:



$A \cup B$



$A \cap B$



$\bar{A}$

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Leis comutativas:

a) $A \cup B = B \cup A$;

b) $A \cap B = B \cap A$;

- Leis associativas:

c) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

d) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Identidades de conjuntos:
  e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
  f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
  g) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
  h) $A \cup \emptyset = A$;
  i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; (obs.: $A^c = \bar{A}$)
  j) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  k) $A^{c^c} = A$;

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Definição:
  - Sejam dois conjuntos A e B. Denominaremos produto cartesiano de A e B, denotando-o por $A \times B$, o conjunto $\{(a,b),\ a \in A,\ b \in B\}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados nos quais o primeiro elemento é tirado de A e o segundo, de B.
- Exemplo:
  - Suponha que $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, $A \times B = \{(1,1), (1,2), ..., (1,4), (2,1), ..., (2,4), (3,1), ..., (3,4)\}$;
- Observação:
  - em geral, $A \times B \neq B \times A$, pois, por exemplo, $(3, 4) \neq (4, 3)$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Classificação dos conjuntos quanto ao número de elementos:
  - Conjunto finito
    - quando nele existir um número finito de elementos;
  - Conjunto infinito numerável
    - quando existir uma correspondência biunívoca entre os seus elementos e o conjunto dos inteiros positivos;
  - Conjunto infinito não-numerável
    - quando nele existir número infinito não-enumerável de elementos;

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- E_1: jogue um dados e observe o número mostrado na face de cima;
- E_2: jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido;
- E_3: jogue uma moeda quatro vezes e observe a frequência obtida de caras e coras;
- E_4: Em uma linha de produção, fabrique peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas;
- E_5: Um asa de um avião é fixada por um grande número de rebites; conte o número de rebites defeituosos;
- E_6: Um lâmpada é fabricada; em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar;
- E_7: Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas; as peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada; o número de peças retiradas do lote é contado;

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- E_8: Peças são fabricadas até que 10 peças defeituosas sejam produzidas; o número total de peças fabricadas é contado;
- E_9: Um míssil é lançado; em um momento específico t, suas três velocidades componentes v_x, v_y e v_z são observadas;
- E_{10}: Um míssil recém-lançado é observado nos instantes $t_1, t_2, ..., t_n$; em cada um destes instantes, a altura do míssil acima do solo é registrada;
- E_{11}: A resistência à tração de uma barra metálica é medida;
- E_{12}: De uma urna, que só contém bolas pretas, tira-se uma bola e verifica-se sua cor;
- E_{13}: Um termógrafo registra a temperatura continuamente, num período de 24 horas; em determinada localidade e uma data específica, esse termógrafo é lido;
- E_{14}: Na situação descrita em E_{13}, x e y, as temperaturas mínima e máxima, no período de 24 horas considerado, são registradas.

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- Pontos em comum dos experimentos anteriores:
  a) cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas;
  b) muito embora não sejamos capazes de afirmar que resultado particular ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento;
  c) quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental; contudo, quando e experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou uma regularidade surgirá.

1.4 O Espaço Amostral

- Definição:
  - Para cada experimento ε do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto S de todos os resultados possíveis de ε (neste contexto, S representa o conjunto fundamental U, anteriormente explicado);
- Exemplos:
  - S_1: {1, 2, 3, 4, 5, 6};
  - S_2: {0, 1, 2, 3, 4};
  - S_3: {todas a sequências possíveis da forma a_1, a_2, a_3, a_4}, em que a_i = H ou T, conforme apareça cara ou coroa na *i*-ésima jogada;
  - S_4: {0, 1, 2, ..., N}, em que N é o número máximo que pode ser produzido em 24 horas;
  - S_5: {0, 1, 2, ..., M}, em que M é o número de rebites empregado;
  - S_6: $\{t \mid t \geq 0\}$;
  - S_7: {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

1.4 O Espaço Amostral

- Exemplos (continuação):
  - S_8: {10, 11, 12, ...};
  - S_9: $\{v_x, v_y, v_z |\ v_x, v_y$ e v_z sejam número reais};
  - S_{10}: $\{h_1, ..., h_n \mid h_i \geq 0, i = 1, 2, ..., \text{n}\}$;
  - S_{11}: $\{\text{T}|\ \text{T} \geq 0\}$;
  - S_{12}: {preta};
  - S_{13}: $\{f|\ f$ uma função derivável que satisfaça $m \leq f(t) \leq M$, para todo $t\}$;
  - S_{14}: $\{(x,y)|\ m \leq x \leq y \leq M\}$, isto é, S_{14} é formado por todos os pontos dentro e sobre o triângulo no plano x, y bidimensional.

1.5 Eventos

- Definição:
  - O evento A, relativo a um particular espaço amostral S associado a um experimento ε, é um conjunto de resultados possíveis;
- Exemplos:
  - A_1: Um número par ocorre, isto é, A = {2, 4, 6};
  - A_2: {2}; isto é, exatamente duas caras ocorrem;
  - A_3: {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH,THHH}; isto é, mais caras do que coroas ocorreram;
  - A_4: {0}; isto é, todas as peças são perfeitas;
  - A_5: {3, 4, ..., M}; isto é, mais do que dois rebites eram defeituosos;
  - A_6: $\{t \mid t \leq 3\}$; isto é, a lâmpada queima em menos de 3 horas;
  - A_{14}: $\{(x,y) \mid y = x+20\}$; isto é, a temperatura máxima é 20° maior que a mínima.

1.5 Eventos

- Eventos:
  - Quando o espaço amostral S for finito ou infinito numerável, todo subconjunto poderá ser considerado um evento;
    - Se S contiver *n* elementos:
      - Número de eventos possíveis 2^n.
  - Para espaços amostrais não-numeráveis alguns subconjuntos 'não-admissíveis' devem ser excluídos (assunto fora do escopo deste texto).

1.5 Eventos

- Combinação de eventos:
  a) se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem;
  b) se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem;
  c) se A for um evento, $\bar{A}$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, não ocorrer A;
  d) se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então, $\cup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer;
  e) se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então, $\cap_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem;

1.5 Eventos

f) se $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer;

g) se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrerem;

h) suponha que S represente o espaço amostral associado a algum experimento ε, e que nós executemos ε duas vezes. Então $S \times S$ poderá ser empregado para representar todos os resultados dessas duas repetições. Portanto, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultou quando ε foi executado a primeira vez e que s_2, quando ε foi executado a segunda vez;

i) o exemplo contido em (h) pode, obviamente, ser generalizado para *n* execuções.

1.5 Eventos

- Definição:
  - Dois eventos, A e B, são denominados mutuamente excludentes, se eles não puderem ocorrer juntos. Exprimiremos isso escrevendo $A \cap B = \emptyset$, isto é, a interseção de A e B é o conjunto vazio.
- Exemplo:
  - Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $S = \{t \mid t \geq 0\}$. Sejam A, B e C três eventos definidos como $A = \{t \mid t < 100\}$, $B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}$, $C = \{t \mid t > 150\}$.
  - Consequentemente:
    - $A \cup B = \{t \mid t \leq 200\}$; $A \cap B = \{t \mid 50 \leq t < 100\}$;
    - $B \cup C = \{t \mid t \geq 50\}$; $B \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\}$;
    - $A \cup C = \{t \mid t < 100 \text{ ou } t > 150\}$; $A \cap C = \emptyset$;
    - $\bar{A} = \{t \mid t > 100\}$.

1.6 Frequência Relativa

- Definição:
  - $f_A = n_A/n$ é denominada *frequência relativa* do evento A nas n repetições de ε. A frequência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades, de fácil verificação:

1) $0 \leq f_A \leq 1$;
2) $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em *todas* as n repetições;
3) $f_A = 0$ se, e somente se, A nunca ocorrer nas n repetições;
4) se A e B forem eventos mutuamente excludentes, e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa associada ao evento $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$;
5) f_A, com base em n repetições do experimento e considerada como uma função de n, "converge"em certo sentido probabilístico para P(A), quando $n \to \infty$.

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Problema:
  - atribuir um número a cada evento A, o qual avaliará quão verossímil será a ocorrência de A quando o experimento for realizado;
- Definição (definição axiomática da probabilidade):
  - Seja ε um experimento. Seja S um espaço amostral associado a ε. A cada evento A associaremos um número real representando por P(A) e denominado probabilidade de A, que satisfaça às seguintes propriedades:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(S) = 1$;
3) se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
4) se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então, $P(\cup^{\infty}_{i=1} A) = P(A_1) + P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 1:
  - Se $\varnothing$ for o conjunto vazio, então
    $P(\varnothing) = 0$.
- Demonstração:
  - Para qualquer evento A, podemos escrever $A = A \cup \varnothing$. Uma vez que A e $\varnothing$ são mutuamente excludentes, decorre da Propriedade 3 que $P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$. Daqui, a conclusão é imediata.
- Teorema 2:
  - Se $\bar{A}$ for o evento complementar de A, então
    $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- Demonstração:
  - Podemos escrever $S = A \cup \bar{A}$ e, empregando as Propriedades 2 e 3, obteremos
    $P(S) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$.

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 3:
  - Se A e B forem dois eventos quaisquer, então
    $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Demonstração:
  - A ideia desta demonstração é decompor $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente excludentes e, em seguida, aplicar a Propriedade 3 (veja o Diagrama de Venn na figura). Deste modo escrevemos

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}),$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$$

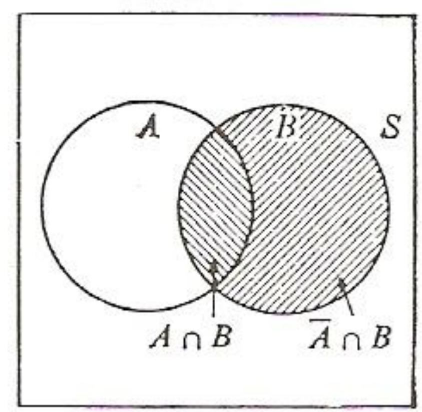
Consequentemente,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}),$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}).$$

Subtraindo-se a segunda igualdade da primeira, obtém-se:

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

qqd.



1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 4:
  - Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) – P(A \cap B) – P(A \cap C) – P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
- Demonstração:
  - (deixada como exercício)
- Teorema 5:
  - Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
- Demonstração:
  - Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$.

    Consequentemente, $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$, porque $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, pela Propriedade 1.

1.8 Algumas Observações

Observações:

a) não estamos abandonando todas as relações determinísticas;

b) a escolha entre a adoção de um modelo determinístico ou um modelo probabilístico pode depender da complicação de nossa técnica de mensuração e da exatidão associada a ela;

c) sob certas circunstâncias teremos condições de chegar a um método baseado em considerações físicas para avaliação das probabilidades básicas (que devem satisfazer aos axiomas básicos da probabilidade); exemplo: $P(H) = P(T) = 0.5$, para moedas honestas;

d) no desenvolvimento das ideias básicas da teoria da probabilidade, faremos referências a analogias mecânicas;

e) sob certas circunstâncias, poderemos fazer suposições adicionais que conduzam a um método para avaliação das probabilidades ou poderemos ter que recorrer à experimentação, quando a frequência relativa desempenhará um papel importante, pois $f_A \approx P(A)$.