

2

Espaços Amostrais Finitos

ESQUEMA DO CAPÍTULO

1.1 ESPAÇO AMOSTRAL FINITO

1.2 RESULTADOS IGUALMENTE VEROSSÍMEIS

1.3 MÉTODOS DE ENUMERAÇÃO

2.1 Espaço Amostral Finito

- O espaço amostral S é formado por um número *finito* de elementos;
- S pode ser escrito sob a forma:
 - $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$;
- Exemplos:
 - São finitos os espaços $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7, S_{12}$, anteriormente descritos Cap. 1.

2.1 Espaço Amostral Finito

- Caracterização da probabilidade $P(A)$, para $A = \{a_i\}$, ou seja, um **resultado simples**, ou **evento simples** ou **evento elementar**:
 - A cada evento simples a_i associa-se um número p_i que satisfaça às seguintes propriedades
 - a) $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$;
 - b) $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$.

Obs: Essas condições devem ser (e são!) **coerentes** com aquelas postuladas para as probabilidades dos eventos em geral (definição axiomática da probabilidade).

2.1 Espaço Amostral Finito

- Caracterização da probabilidade $P(A)$, para eventos constituídos por r resultados, $1 \leq r \leq k$, a saber

$$A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}\},$$

em que j_1, j_2, \dots, j_r representam qualquer um dos r índices, de 1 a k :

- $P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + \dots + p_{j_r}$.

Obs: Essa é uma conclusão direta da Propriedade 4 da definição axiomática da probabilidade.

2.1 Espaço Amostral Finito

- Exemplo:
 - Suponha que somente três resultados sejam possíveis em um experimento, a saber a_1 , a_2 e a_3 . Além disso, suponha-se que a_1 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_2 , o qual por sua vez é duas vezes mais provável de ocorrer que a_3 .

Portanto, $p_1 = 2p_2$ e $p_2 = 2p_3$. Já que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, teremos $4p_3 + 2p_3 + p_3 = 1$, o que finalmente dá

$$p_3 = 1/7, p_2 = 2/7 \text{ e } p_1 = 4/7.$$

2.2 Resultados Iguualmente Verossímeis

- Hipótese mais frequente para espaços amostrais finitos:
 - Eventos elementares são **igualmente verossímeis** (igualmente prováveis);
 - É uma hipótese **errada**, entretanto, para muitas situações experimentais;
- Se todos os k resultados possíveis a_1, a_2, \dots, a_k forem igualmente verossímeis, segue-se que:
 - $p_i = P(a_i) = 1/k$,
pois a condição $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ torna-se $kp_i = 1$ para todo i ;
- Além disso, para qualquer evento A formado por r resultados, teremos:
 - $P(A) = r/k$.

2.2 Resultados Iguualmente Verossímeis

- O método anteriormente descrito para avaliar $P(A)$ é frequentemente enunciado da seguinte maneira:
 - $P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A \text{ pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}$;
- Exemplo:
 - Um dados equilibrado é lançado (todos os resultados se supõem igualmente verossímeis).
O evento A ocorrerá se, e somente se, um número maior que 4 aparecer, isto é, $A = \{5, 6\}$. Consequentemente,
$$P(A) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3.$$

2.2 Resultados Igualmente Verossímeis

- Exemplo:
 - Um moeda equilibrada é atirada duas vezes. Seja A o evento {aparece uma cara}. Na avaliação de $P(A)$, a análise (errada!) do problema poderia ser a seguinte:
O espaço amostral é $S = \{0, 1, 2\}$, em que cada resultado representa o número de caras que ocorrer. Portanto, sob a hipótese (errada!) de eventos igualmente verossímeis seria encontrada
$$P(A) = 1/3.$$
 - Na verdade, o espaço amostral (de eventos igualmente verossímeis) é
$$S' = \{HH, HT, TH, TT\},$$
em que H (*head*) representa cara e T (*tail*), coroa. Assim, a solução correta do problema proposto é
$$P(A) = \text{números de casos favoráveis} / \text{número de casos possíveis} = 2/4 = 1/2.$$
 - **Obs.:** Poderíamos obviamente utilizar corretamente o espaço amostral S se lembrarmos que os resultados 0 e 2 são igualmente verossímeis, enquanto o resultado 1 é duas vezes mais provável, pois pode ocorrer de duas formas, HT e TH.

2.2 Resultados Iguualmente Verossímeis

- Definições:

- a) **Escolher ao acaso um objeto**, dentre N objetos a_1, a_2, \dots, a_N , significa que cada objeto tem a mesma probabilidade de ser escolhido, isto é,

$$P(a_i) = 1/N, i = 1, 2, \dots, N;$$

- b) **Escolher ao acaso dois objetos**, dentre N objetos, significa que cada par de objetos (deixada a ordem à parte) tem a mesma probabilidade de ser escolhido que qualquer outro par;

Obs.: Esta formulação levanta a questão de **quantos** pares K diferentes existem, a ser resolvida mais adiante;

- c) **Escolher ao acaso n objetos** ($n \leq N$) dentre N objetos significa que cada ênupla, a saber $a_{a1}, a_{a2}, \dots, a_{iN}$, é tão provável de ser escolhida quanto qualquer outra ênupla.

2.3 Métodos de Enumeração

- **Exemplo:**

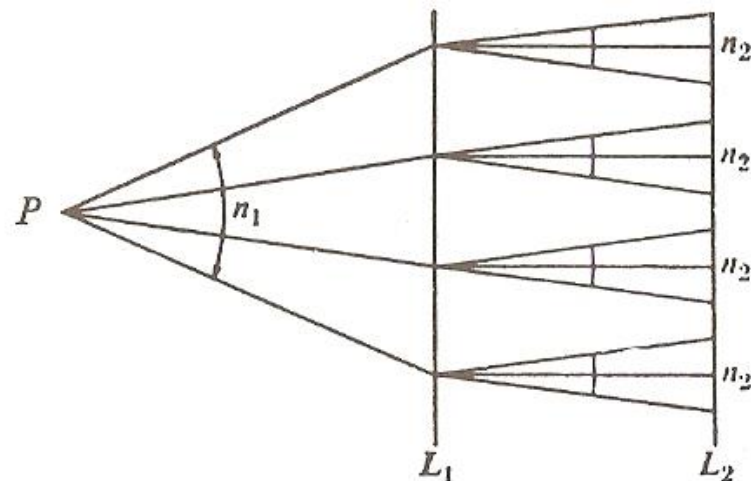
Uma partida de cem peças é composta de 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas. Dez dessas peças são escolhidas ao acaso, sem reposição de qualquer peça escolhida antes que a seguinte seja escolhida. Qual é a probabilidade de que exatamente metade das peças escolhidas seja defeituosa?

Solução: Precisamos ter condições de responder (a) quantos resultados $(i_1, i_2, \dots, i_{10})$ existem no espaço amostral S , em que i_i é o tipo (defeituosa ou perfeita) de peça na i -ésima extração e (b) dentre estes quanto têm a característica de que exatamente a metade das peças seja defeituosa?

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

- A. **Regra da Multiplicação:** Se o procedimento 1 puder ser executado de n_1 maneiras distintas e o procedimento 2, de n_2 maneiras distintas, então o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser executado de $n_1 \times n_2$ maneiras distintas.



2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

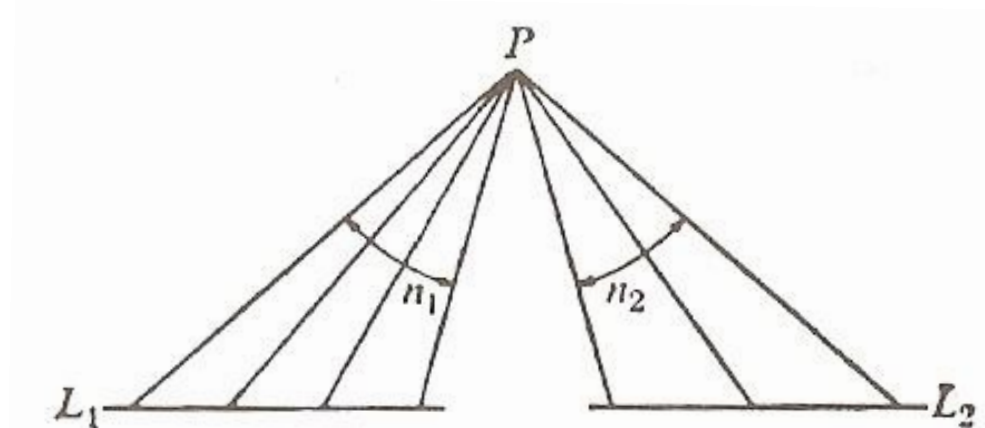
A. **Regra da Multiplicação - Exemplo:** Uma peça manufaturada deve passar por três estações de controle. Em cada estação, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente. Na primeira estação, três classificações são possíveis, enquanto nas duas últimas, quatro classificações são possíveis. De quantas maneiras a peça pode ser marcada?

Solução: Existem $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneiras.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

- B. **Regra da Adição:** Se o procedimento 1 puder ser executado de n_1 maneiras distintas e o procedimento 2, de n_2 maneiras distintas, e os dois procedimentos não puderem ocorrer simultaneamente, então o número de maneiras pelas quais poderemos realizar **ou 1 ou 2** será $n_1 + n_2$ maneiras distintas.



2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

B. Regra da Adição - Exemplo: Uma viagem está sendo planejada e deve-se escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existem três rodovias possíveis e duas ferrovias, quantos caminhos disponíveis há para a viagem?

Solução: Existem $3 + 2 = 5$ caminhos disponíveis.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

C. Permutação e Arranjos:

- a) Se temos n objetos diferentes, podemos dispor (permutar) estes n objetos de ${}_n P_n$ maneiras, igual a

$${}_n P_n = n!,$$

em que $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ é denominado fatorial de n .

- b) Se temos n objetos diferentes para escolher r destes objetos, $0 \leq r \leq n$, e permutar os r escolhidos, podemos dispor (arranjar) estes objetos de ${}_n A_r$ maneiras, igual a

$${}_n A_r = n! / (n - r)!.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações:

- a) Se temos n objetos diferentes, podemos dispor .sem considerar a ordem (combinar), r destes objetos de C maneiras, igual a

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Obs.: Um símbolo empregado este número, que surge em muitas passagens é

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Em probabilidade, $\binom{n}{k}$ somente fica definido para n inteiro positivo e r um inteiro tal que $0 \leq r \leq n$. Contudo, ele pode ser definido de modo mais geral, para qualquer número real n e para qualquer inteiro não negativo r , na forma seguinte:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações:

- Os números $\binom{n}{k}$ são frequentemente denominados coeficientes binomiais, pois aparecem como coeficientes no desenvolvimento da expressão binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Propriedades:
 - a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$;
 - b) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$;

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** Dentre oito pessoas, quantas comissões (a ordem não importa) distintas de três membros podem ser escolhidas?

Solução: $\binom{8}{3} = 56$ comissões distintas.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** Um grupo de oito pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Quantas comissões de três pessoas podem ser constituídas, que incluam exatamente dois homens?

Solução: Devemos escolher inicialmente dois homens (entre os cinco) e depois escolher um mulher (dentre as três possíveis), o que resulta em

$$\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 30 \text{ comissões distintas.}$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** Quantos subconjuntos (ou partes) há de um conjunto constituído de n elementos?

Solução 1: Associando-se a cada elemento o valor *um* ou *zero*, conforme este elemento *esteja* ou *não* no subconjunto, podemos usar a **Regra da Multiplicação** que nos diz que existem $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ subconjuntos;

Solução 2: Para obter subconjuntos podemos escolher um conjunto vazio, ou um conjunto constituído exatamente por um elemento ou um conjunto constituído exatamente por dois elementos e assim sucessivamente, o que pelo da **Regra da Adição** fornece

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ maneiras,
que é exatamente o desenvolvimento de $(1 + 1)^n = 2^n$.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** De uma partida formada por 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas, escolhemos ao acaso 10 (sem reposição). Qual a probabilidade de achar exatamente 5 peças defeituosas?

Solução: Se utilizarmos a definição

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } A \text{ pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}};$$

temos $\binom{100}{10}$ formas de escolher 10 peças ao acaso, $\binom{20}{5}$ formas de escolher exatamente 5 peças defeituosas entre as 20 possíveis e $\binom{80}{5}$ formas de escolher exatamente 5 peças perfeitas entre as 80 possíveis, o que fornece

$$P(A) = \frac{\binom{20}{5} \binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = 0,021.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** A generalização do exemplo anterior consiste em considerar N peças, r_1 das quais pertencente à classe A e r_2 , à classe B (com $r_1 + r_2 = N$). A probabilidade de que as n peças escolhidas sejam exatamente s_1 da classe A e $(n-s_1)$ da classe B será dada

por

$$\frac{\binom{r_1}{s_1} \binom{r_2}{n-s_1}}{\binom{N}{n}}.$$

(a expressão acima é denominada **probabilidade hipergeométrica**)

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. **Combinações - Exemplo:** Dois objetos são escolhidos ao acaso, dentre quatro, denominados a , b , c e d . Qual a probabilidade de ocorrência do evento $A = \{\text{o objeto } c \text{ é escolhido}\}$, sem reposição e com reposição?

Solução (sem reposição): sem reposição o espaço amostral poderá ser representado por $S = \{(a, b); (a, c); (b, c); (b, d); (c, d); (a, d)\}$, que possui $\binom{4}{2} = 6$ resultados possíveis e igualmente prováveis. (Cada um dos resultados indica quais objetos escolhidos e não a ordem.) Logo:

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Solução (com reposição): com reposição o espaço amostral poderá ser representado por $S' = \{(a, a); (a, b); (a, c); (a, d); \dots (d, d)\}$, que conta com $4^2 = 16$ resultados possíveis e igualmente prováveis. (Cada resultado indica os objetos e a ordem.) Logo:

$$P(A) = 7/16.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

E. Permutação com Alguns Elementos Repetidos:

- a) Se temos n objetos, tais que n_1 sejam de uma primeira espécie, n_2 de uma segunda espécie, ..., n_k de uma k -ésima espécie, com $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, então o número de permutações possíveis destes n objetos é dado por

$$n!/(n_1! n_2! \dots n_k!).$$