4

Variáveis Aleatórias Unidimensionais

ESQUEMA DO CAPÍTULO

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- O espaço amostral de um experimento não necessariamente é um número, embora em muitas situações experimentais, desejamos atribuir um número real x a todo elemento s do espaço amostral S, $x = X(s)$;
- Definição:

  Sejam ε um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$, é denominada variável aleatória;

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

a) A definição pode trazer confusão (variável aleatória = função), mas será **mantida** por já ser bem aceita;

b) **Nem** toda função imaginável pode ser uma variável aleatória; um requisito é que, para todo número real x, o evento $[X(s) = x]$ e, para todo intervalo I, o evento $[X(s) \in I]$ têm probabilidades bem definidas, consistentes com os axiomas básicos;

c) Em algumas situações, o resultado s do espaço amostral **já** constitui a característica numérica que desejamos registrar, quando simplesmente tomaremos a função identidade, $X(s) = s$;

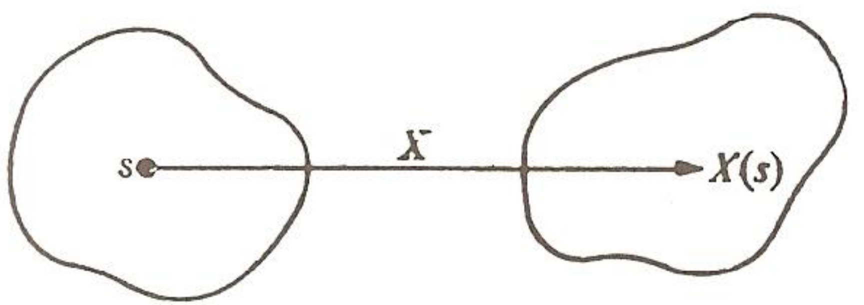
4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

d) Geralmente estaremos mais interessados nos valores de X do que na natureza **funcional** de X;

Exemplo: No lançamento de duas moedas, cujo espaço amostral é S = {HH, HT, TH, TT}, definindo X como o número de caras (H), temos X(HH) = 2, X(HT) = X(TH) = 1, X(TT) = 0;

e) Um exigência fundamental é que a função seja **unívoca**, i.e., a cada $s \in S$, corresponderá exatamente um valor $X(s)$, embora diferentes valores de s possam levar ao mesmo valor de X (vide figura).

S = espaço amostral de $\mathcal{E}$ R_X = valores possíveis de X



4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- Observações:
  - Espaço amostral R_x, conjunto de todos os valores possíveis de X, é denominado **contradomínio**;
  - R_X pode ser considerado como um **outro** espaço amostral;
  - O espaço amostral original S corresponde ao resultado (que pode ser não-numérico) do experimento, enquanto R_X corresponde ao espaço amostral associado à variável aleatória X; se $X(s) = s$, então $S = R_X$.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Duas** interpretações para uma variável aleatória:
  a) Realizamos um experimento ε, que dá um resultado $s \in S$, e a seguir calculamos X(*s*);
  b) Realizamos ε, obtemos o resultado *s*, e imediatamente calculamos X(*s*), caso em que o número X(*s*) é pensado como o próprio resultado do experimento e R_X se torna o espaço amostral do experimento
- **Observações**:
  - Embora a interpretação (a) seja a que descreve melhor o que ocorre na prática, a (b) pode ser mais útil;
  - Em outras palavras, estaremos mais interessados nos valores que X toma do que em sua forma funcional.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

  Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Tão logo as moedas repousem, a fase "aleatória" do experimento terminou. Um resultado simples *s* poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pousaram, mas mais comumente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento. Poderíamos estar interessados em avaliar:

  a) X(*s*) = número de caras que apareceram,

  b) Y(*s*) = distância máxima entre duas moedas quaisquer,

  c) Z(*s*) = distância mínima das moedas a um bordo qualquer da mesa.

- **Observações:**
  - Podemos **incluir** a avaliação de X(*s*) na descrição do experimento e afirmar que S = {0, 1, 2, 3};
  - A avaliação, entretanto, dá-se **depois** que os aspectos aleatórios do experimento tem terminado.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Comentários:**

  Um distinção muito importante que deve feita é que, referindo-se a variáveis aleatórias, emprega-se letras maiúsculas:

  – Ex.: X, Y, Z etc.;

  Referindo-se ao valor que essas variáveis assumem resultante do experimento, usa-se letras minúsculas:

  – Ex.: x, y, z etc.

  Quando falamos em escolher um recém nascido ao acaso e medirmos sua altura, podemos então formular questões sobre X, tal como qual seja a probabilidade de que a altura seja maior que 60 centímetros, $P(X \geq 60)$;

  No entanto, uma vez que a pessoa tenha sido selecionada e medida a sua altura, não há sentido em procurar $P(x \geq 60)$, uma vez que x já tem o valor conhecido e é ou não ≥ 60, com certeza.

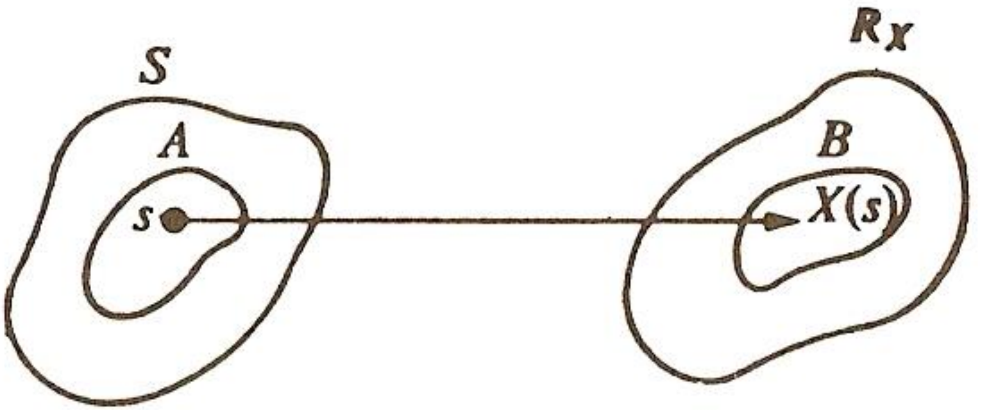
4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Definição:**

  Sejam um experimento ε e seu espaço amostral S. Seja X uma variável aleatória definida em S e seja R_X seu contra-domínio. Seja B um evento definido em relação a R_X, isto é, $B \subset R_X$. Então A será definido assim:

  $$A = \{s \in S |\ X(s) \in B\}.$$

  Obs.: Assim, A será constituído por todos os resultados em S para os quais $X(s) \in B$ (vide figura). A e B são eventos equivalentes.



4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Comentários:**
  a) A e B serão equivalentes sempre que ocorram juntos; i.e., se A tiver ocorrido, então um resultado s terá ocorrido, para o qual $X(s) \in B$ e, portanto, B ocorreu; reciprocamente, se B ocorreu, um valor $X(s)$ terá sido observado, para o qual $s \in A$ e, portanto, A ocorreu;
  b) Entretanto, A e B são associados a espaços amostrais diferentes.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

  Duas moedas são lançadas, com S = {HH, HT, TH, TT}. Seja X o número de caras (H) obtido. Logo, $R_X = \{0, 1, 2\}$.

  Seja B = {1}. Já que X(HT) = X(TH) = 1 se, e somente se, X(*s*) = 1, temos que A = {HT, TH} é equivalente a B.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Definição:**

  Seja B um evento no contradomínio R_X. Nesse caso, definimos P(B) da seguinte maneira

  $$P(B) = P(A), \text{ em que } A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}.$$

  Obs.: Definimos P(B) igual à probabilidade do evento $A \subset S$, o qual é equivalente a B.

4.1 Noção Geral de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

  Se as moedas consideradas anteriormente forem equilibradas, teremos P(HT) = P(TH) = ¼. Portanto, P(HT, TH) = ¼ + ¼ = ½.

- **Obs.:**
  - Visto que o evento {X = 1} é equivalente ao evento {HT, TH}, teremos que P(X = 1) = P(HT, TH).
  - Note que uma vez que o valor da probabilidade de P(HT, TH) tenha sido determinada, não há outra escolha possível para P(X = 1), que não seja P(HT, TH).
  - As probabilidades associadas a eventos em R_x são ditas induzidas.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Definição:**

  Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X (isto é, o contradomínio R_x) for finito ou se for infinito numerável, denominaremos X de variável aleatória discreta.

- **Obs.:**
  - Em outras palavras, os valores possíveis de X podem ser postos em uma lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$;
  - Se a lista acaba, o caso é finito, e se a lista não acaba, o caso é infinito numerável.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo:**

  Uma fonte radioativa está emitindo partículas α, cuja emissão é observada por um dispositivo contador. A variável aleatória de interesse é

  X = número de partículas observadas.

- **Obs.:**

  $R_X = \{0, 1, ..., N\}$.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Definição:**

  Seja X uma variável aleatória discreta. Portanto, o contradomínio R_X de X será formado no máximo por um número infinito numerável de valores x_1, x_2, ... A cada possível resultado x_i associaremos um número $p(x_i) = P(X = x_i)$, denominado probabilidade de x_i. Os números $p(x_i)$, $i = 1, 2, ...$, devem satisfazer às seguintes condições:

  a) $p(x_i) \geq 0$, para todo i;

  b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

  A função p, definida acima, é denominada função de probabilidade, (ou função de probabilidade no ponto), da variável aleatória X;

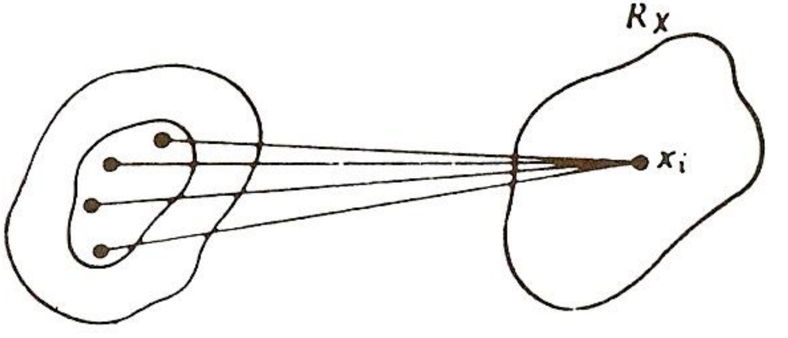
  A coleção de pares $[x_i, p(x_i)]$, $i = 1, 2, ...$, é algumas vezes denominada distribuição de probabilidade de X.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Observações:**

a) A escolha dos números $p(x_i)$ é determinada a partir da função de probabilidade associada aos eventos no espaço amostral S, no qual X seja definida, isto é (vide figura)

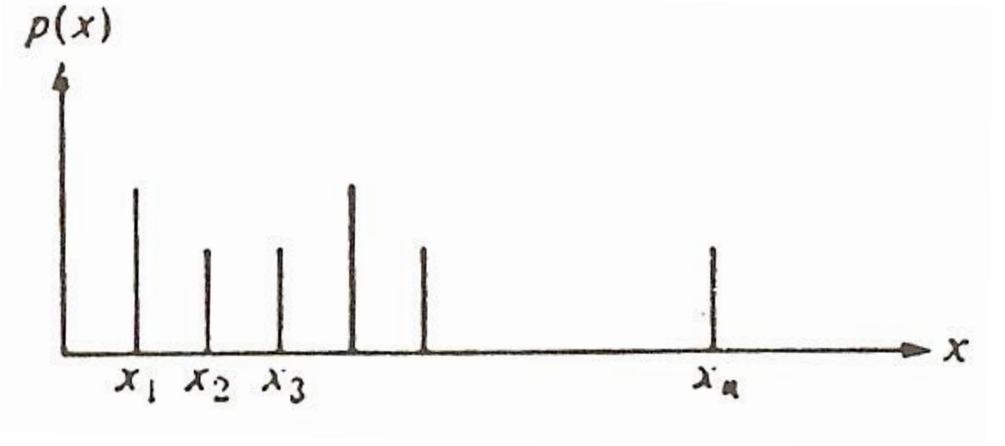
$$p(x_i) = P[s|\ X(s) = x_i];$$



b) Se X tomar apenas um número finito de valores, $x_1, x_2, \ldots, x_N$, então $p(x_i) = 0$, para i > N, e a série infinita $\Sigma^{\infty}_{i=1}\ p(x_i) = 1$ da definição transforma-se em uma soma finita;

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

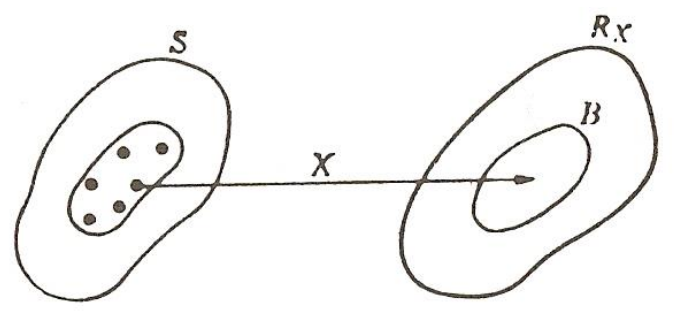
- **Observações (final):**
  - c) Por analogia com a Mecânica, se considerarmos a massa total de um unidade distribuída sobre a reta real, com massa total concentrada nos pontos x_1, x_2, ..., os números $p(x_i)$ representam a quantidade de massa no ponto x_i.
  - d) A representação gráfica de uma distribuição é bastante útil (vide figura).



4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Observação:**

  Seja B um evento associado à variável aleatória X, isto é, $B \subset R_x$ (vide figura).



Suponha que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots\}$. Daí

$$P(B) = P[s|\ X(s) \in B] = P[s|\ X(s) = x_{ij}\ ,\ j = 1, 2, \ldots] = \Sigma^{\infty}_{j=1}\ p(x_{ij}).$$

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo:**

  Suponha que uma válvula eletrônica seja posta em um soquete e ensaiada. Admitamos que a probabilidade de que o teste seja positivo seja ¾. Segue daí que a probabilidade de que seja negativo é igual a ¼. Admitamos também que estejamos ensaiando uma partida grande dessas válvulas. Os ensaios continuam até que a primeira válvula positiva apareça. Definamos a variável aleatória X como o número de testes necessários até a conclusão do experimento.

  O espaço amostral associado ao experimento é

  S = {+, -+, --+, ---+, ...}.

  A distribuição de probabilidade de X pode ser determinada pelo seguinte raciocínio. Os valores de X são, 1, 2, ..., n, ..., e será X = n se, e somente se, as primeiras (n-1) válvulas forem negativas e a n-ésima válvula for positiva. Assim, assumindo independência entre as válvulas, temos

  $p(n) = P(X = n) = (1/4)^{n-1} \times (3/4)$, $n = 1, 2, \ldots$.

4.2 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Comentários:**

  Obviamente temos que os valores $p(n) \geq 0$.

  Para verificarmos se $\Sigma^{\infty}_{i=1}\, p(x_i) = 1$, observaremos que

  $$\Sigma^{\infty}_{i=1}\, p(x_i) = ¾ \times (1 + ¼ + 1/16 + ...) =$$

  $$= ¾ \times (1/(1-¼\,)) = 1.$$

- **Observação:**

  Empregamos aqui a soma de uma P.G., $1 + r + r^2 + ...$, que converge para $1/(1-r)$, quando $|r| < 1$.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Exemplo:**

  Suponha que peças saiam de uma linha de produção e sejam classificadas como defeituosas (D) e como não-defeituosas (N). Admita que três dessas peças sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com esse esquema. O espaço amostral para esse experimento pode assim ser apresentado

  $S = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}$.

  Suponha que seja 0,2 a probabilidade de uma peça ser defeituosa e 0,8 a de ser não-defeituosa. Admitamos que essas probabilidades sejam as mesmas para cada peça e que a classificação de uma peça seja independente da da outra. Assim, as probabilidades associadas aos vários resultados do espaço amostral S são

  $(0{,}2)^3$, $(0{,}8)(0{,}2)^2$, $(0{,}8)(0{,}2)^2$, $(0{,}8)(0{,}2)^2$, $(0{,}2)(0{,}8)^2$, $(0{,}2)(0{,}8)^2$, $(0{,}2)(0{,}8)^2$, $(0{,}8)^3$.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Exemplo (continuação):**

  Geralmente nosso interesse está no número de peças defeituosas, isto é, desejamos estudas a variável aleatória X, a qual atribui a cada resultado de $s \in S$ o número de peças defeituosas encontradas em s. Consequentemente temos

  $R_x = \{0, 1, 2, 3\}$.

  Para obtermos a distribuição de probabilidade de X, $p(x_i) = P(X=x_i)$ fazemos

  X = 0 se, e somente se, ocorrer NNN;

  X = 1 se, e somente se, ocorrer DNN, NDN, ou NND;

  X = 2 se, e somente se, ocorrer DDN, DND, ou NDD;

  X = 3 se, e somente se, ocorrer DDD.

  Então

  $p(0) = P(X=0) = (0,8)^3$; $p(1) = P(X=1) = 3(0,2)(0,8)^2$;

  $p(2) = P(X=2) = 3(0,2)^2(0,8)$; $p(3) = P(X=3) = (0,2)^3$.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Definição:**

  Consideremos um experimento ε e seja A algum evento associado a ε. Admita-se que P(A) = *p* e consequentemente P($\bar{A}$) = 1-*p*. Considerem-se *n* repetições de ε. O espaço amostral será formado por todas as sequências possíveis $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, em que cada a_i é A ou $\bar{A}$, dependendo de o que tenha ocorrido na *i*-ésima repetição de ε (há 2^n dessas sequências). Além disso, suponha-se que P(A) = *p* permaneça a mesma para todas as repetições. A variável aleatória X será definida como sendo o número de vezes que o evento A tenha ocorrido. Denominaremos X de variável aleatória binomial, com parâmetros *n* e *p*.

- **Obs.:**

  Os valores possíveis de X são evidentemente 0, 1, 2, ..., *n*;

  Diz-se que X tem distribuição binomial;

  As repetições individuais serão denominadas Provas de Bernoulli.

4.3 A Distribuição Binomial

- **Teorema:**

  Seja X uma variável binomial, baseada em *n* repetições. Então

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\ldots,n.$$

- **Demonstração:**

  Considere-se um particular elemento do espaço amostral de ε que satisfaça à condição X = *k*. Um resultado como esse poderia surgir, em particular, se nas primeiras *k* repetições de ε ocorresse A, enquanto que nas últimas *n*-*k* repetições ocorresse Ā, isto é

$$\underbrace{AA\ldots A}_{k}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-k}.$$

4.3 A Distribuição Binomial

- **Demonstração (continuação):**

  A sequência anterior teria probabilidade $p^k(1-p)^{n-k}$, assim como qualquer outra para a qual X = k. O número total de tais sequências é igual ao número de combinações de n elementos k a k, $\binom{n}{k}$, pois devemos escolher exatamente k posições dentre n, para a ocorrência do evento A. Isto dá o resultado do teorema, porque esses $\binom{n}{k}$ resultados são todos mutuamente excludentes.

- **Obs.:**

  a) Obviamente observamos $\Sigma^{\infty}_{i=1}\, p(x_i) = 1$, pelo teorema binomial;

  b) Sempre que realizarmos repetições independentes de um experimento com resultados dicotômicos,estaremos lidando com uma variável aleatória binomial; enquanto as condições de experimentação se mantiverem, podemos empregar o modelo acima;

  c) Se n for grande, os cálculos podem ficar incômodos (usa-se, então, tabelas).

4.3 A Distribuição Binomial

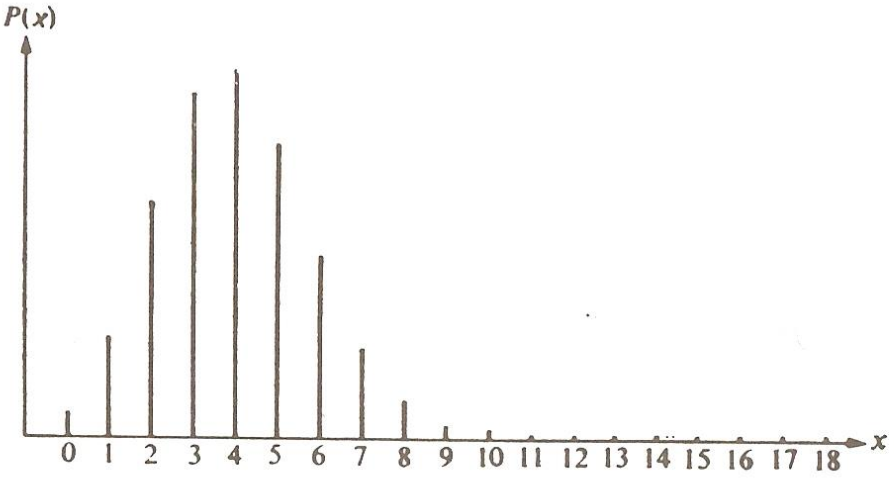
- **Exemplo:**

  Suponha-se que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0,2 de funcionar mais do que 500 horas. Se ensaiarmos 20 válvulas, qual será a probabilidade de que delas, exatamente *k* funcionem mais de 500 horas, *k* = 0, 1, ..., 20?

  Se X for o número de válvulas que funcionem mais de 500 horas, admitiremos que X tenha uma distribuição binomial. Então

  $$P(X = k) = \binom{20}{k} (0,2)^k (0,8)^{20-k}.$$

  Os valores podem ser visto na figura, que apresenta uma configuração bastante geral.



4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Definição:**

  Diz-se que X é uma variável aleatória contínua, se existir uma função *f*, denominada função de densidade de probabilidade (*fdp*) de X que satisfaça às seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0$, para todo x;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

c) para quaisquer a, b, com $-\infty < a < b < +\infty$, teremos

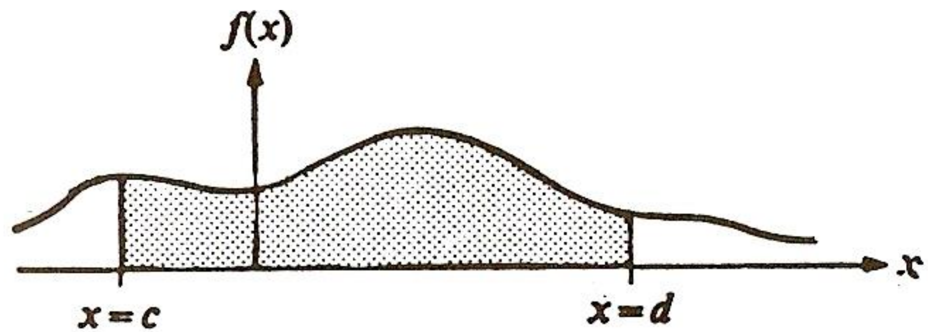
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários:**

a) Dizemos que X é uma variável aleatória contínua, se X puder tomar todos os valores em algum intervalo (c, d), em que c e d podem ser $-\infty$ e $+\infty$, respectivamente;

b) P(c < X < d) representa a área sob a curva da fdp f, entre $x = c$ e $x = d$ (vide figura);



c) Constitui uma consequência da descrição probabilística de X que, para qualquer valor especificado x_0 de X teremos P(X = x_0) = 0;

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários (continuação):**

d) Pode-se mostrar que essa atribuição de probabilidades a eventos em R_X satisfaz aos axiomas básicos da probabilidade, em que podemos tomar $\{x|\ -\infty < x < +\infty, \}$ como espaço amostral;

e) Se uma função f^* satisfizer às condições $f^* \geq 0$, para todo x, e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)dx = K,$$

em que K é um número real positivo não necessariamente igual a 1, então f^* não satisfaz a todas as condições para uma fdp, mas uma f assim definida satisfará

$$f(x) = f^*(x)/\mathrm{K}, \text{ para todo } x;$$

f) Se X assumir valores somente em algum intervalo finito $[a, b]$, poderemos simplesmente colocar $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a, b]$.

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Comentários (final):**

g) $f(x)$ não representa a probabilidade de coisa alguma; somente quando a função for integrada entre dois limites, ela produzirá uma probabilidade;

h) A distribuição de probabilidade (neste caso a fdp) é induzida em R_X pela probabilidade subjacente associada com eventos em S; quando escrevemos $P(c < X < d)$, queremos dizer $P[c < X(s) < d]$, que por sua vez é igual a $P[s|\ c < X(s) < d]$;

i) O caso contínuo também admite a analogia com a Mecânica, em que $f(x)$ representa a densidade de massa no ponto x e a massa contida no intervalo $c \le x \le d$ corresponde à integral

$$\int_c^d f(x)dx.$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo:**

  A existência de uma fdp foi admitida na exposição de uma variável aleatória contínua. Vamos considerar um exemplo simples, no qual poderemos facilmente determinar a fdp, fazendo uma suposição apropriada sobre o comportamento probabilístico da variável aleatória. Suponhamos que um ponto seja escolhido no intervalo (0,1). Representemos por X a variável aleatória cujo valor seja a abscissa *x* do ponto escolhido. Suponhamos também que se I for qualquer intervalo em (0,1), então $P[X \in I]$ será diretamente proporcional ao comprimento de I, designado por L(I). Assim, $P[X \in I] = kL(I)$, em que *k* é a constante de proporcionalidade. Portanto, encontramos

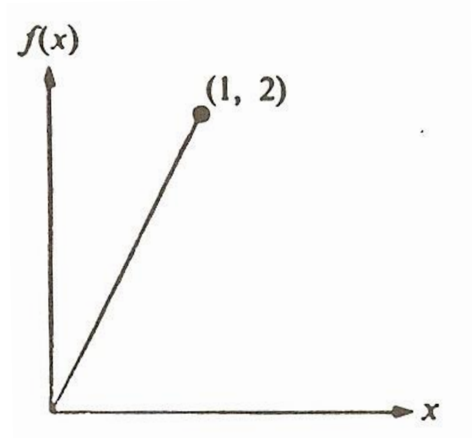
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

4.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II:**

  Suponhamos que a variável aleatória X seja contínua (vide figura). Seja a fdp dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Para calcular P(X ≤ ½), deve-se apenas calcular a integral

$$\int_0^{1/2} 2x dx = 1/4.$$

Para calcular P(X ≤ ½| 1/3 ≤ X ≤ 2/3), aplica-se

P(A| B) = P(A∩B)/P(B).

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Definição:**

  Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua. Define-se a função F como a função de distribuição acumulada da variável aleatória X (abreviadamente fd) como $F(x) = P(X \leq x)$.

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Teorema:**

  a) Se X for uma variável aleatória discreta

  $$F(x) = \sum_{j} p(x_j).$$

  em que o somatório é estendido a todos os índices *j* que satisfaçam à condição $x_j \leq x$;

  b) Se X for uma variável aleatória contínua com fdp *f*,

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds.$$

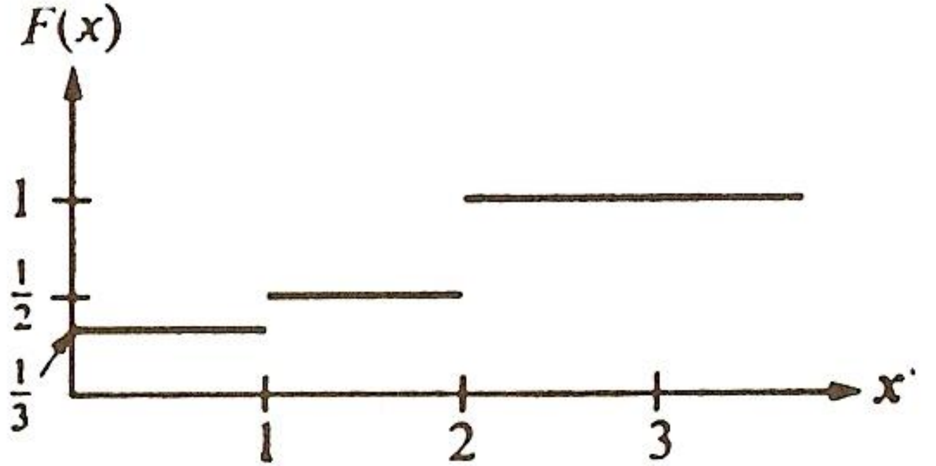
- **Demonstração:**

  Decorrem da definição.

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Exemplo:**

  Suponhamos que a variável aleatória X tome os três valores 0, 1 e 2, com probabilidades 1/3, 1/6 e 1/2, respectivamente. Então F(x) pode ser vista na figura.



4.5 Função de Distribuição Acumulada

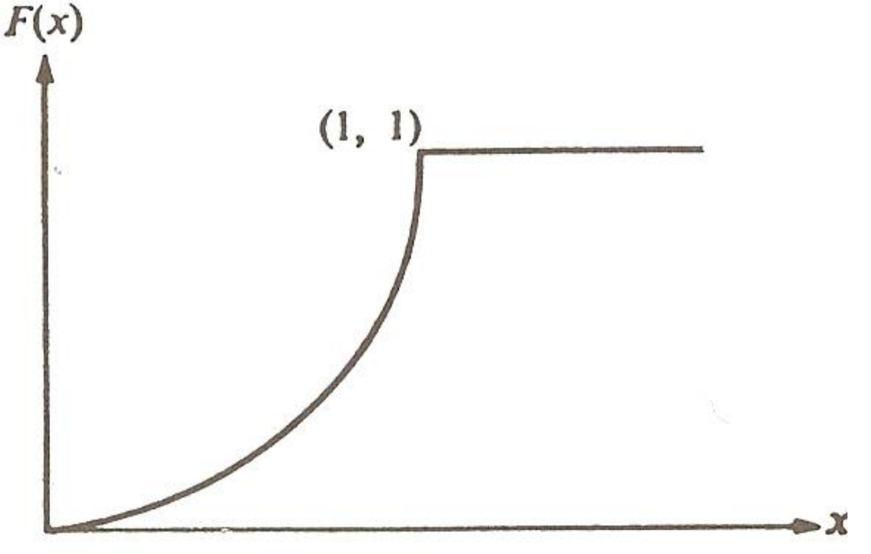
- **Exemplo II:**

  Suponhamos que X seja uma variável contínua com fdp

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{se } 0<x<1,\\ 0, & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

  Portanto, F é dada por (vide figura)

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{se x} \le 0,\\ \int_0^x 2s\,ds = x^2, & \text{se } 0<x\le 1,\\ 1, & \text{se } x>1.\end{cases}$$



4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Observações:**

  Os gráficos apresentados para as fd são, em cada caso, bastante típicos

  a) Se X for uma variável aleatória discreta, com um número finito de valores possíveis, o gráfico da fd será constituído por segmentos de reta horizontais;
  b) Se X for uma variável aleatória contínua, F será uma função contínua para todo x;
  c) A fd F é definida para todos os valores de x.

4.5 Função de Distribuição Acumulada

- **Teorema:**
  a) A função F é não-decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$, teremos $F(x_1) \leq F(x_2)$;
  b) $\lim_{x\to-\infty} F(x_1) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x_1) = 1$.
- **Demonstração:**
  a) Definamos os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$, teremos $A \subset B$, o que, por teorema anteriormente visto, implica $P(A) \leq P(B)$.
  b) No caso contínuo (o discreto é análogo), teremos

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = 1.$$

4.5 Função de Distribuição Acumulada

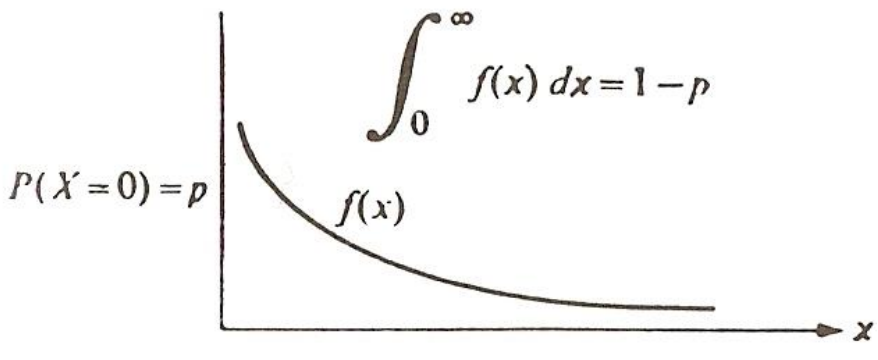
- **Teorema II:**
  a) Seja F a fd de uma variável aleatória contínua, com fdp *f*. Então
  $$f(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$
  para todo x no qual F seja derivável;
  b) Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis x_1, x_2, ..., e suponha-se que esses valores tenham sido indexados de modo que $x_1 < x_2 < \ldots$. Seja F a fd de X. Então
  $$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}).$$
- **Demonstração:**
  a) (do teorema fundamental do Cálculo);
  b) ...

4.6 Distribuições Mistas

- **Exemplo:**

  Suponha-se que estejamos ensaiando algum equipamento e façamos igual a X o tempo de funcionamento. Normalmente pensaríamos em X como uma variável puramente contínua, mas podem surgir situações nas quais queiramos atribuir uma probabilidade $p > 0$ ao resultado $X = 0$ (isto é, há uma probabilidade de que o equipamento não funcione de modo algum). Teríamos, assim, $P(X = 0) = p$ e $P(X > 0) = 1 - p$.

  Deste modo, p descreveria a distribuição de X no ponto 0, enquanto a fdp f descreveria a distribuição de valores para $X > 0$ (vide figura).



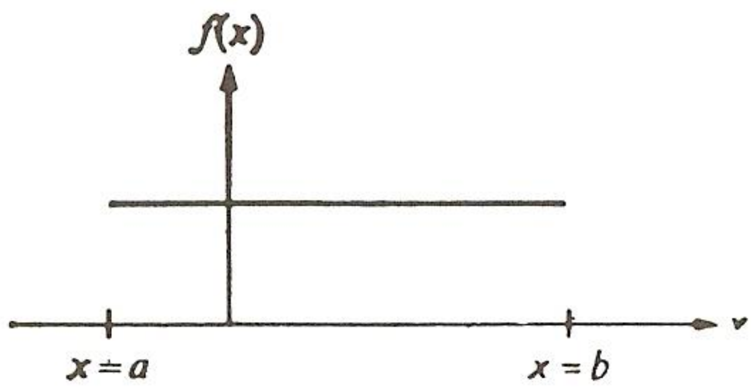
4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Definição:**

  Suponha-se que X seja uma variável aleatória contínua que tome todos os valores no intervalo [a, b], no qual a, b sejam ambos finitos. Se a fdp de X for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b, \\ \quad 0, \text{para quaisquer outros valores,} \end{cases}$$

  diremos que X é uniformemente distribuída sobre o intervalo [a, b] (vide figura).



4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Comentários:**

a) Uma variável aleatória uniformemente distribuída tem uma fdp constante, $f(x) = K$, sobre o intervalo de definição. A fim de satisfazer à condição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1,$$

essa constante K deve ser igual ao inverso do comprimento do intervalo;

b) Uma variável aleatória uniformemente distribuída representa o análogo contínuo dos resultados igualmente prováveis, no sentido de que a probabilidade para qualquer subintervalo é a mesma para todos aquele que tenham o mesmo comprimento;

c) Temos agora uma forma de tornar mais precisa a noção intuitiva de escolher ao acaso um ponto P em um intervalo [a, b].

4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Exemplo:**

  Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta [0, 2]. Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e 3/2?
- **Solução:**

  Fazendo-se X representar a coordenada do ponto escolhido, temos que a fdp de X é dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 < x < 2$, e portanto, $P(1 \leq X \leq 3/2) = \frac{1}{4}$.

4.7 Variáveis Aleatórias Uniformemente Distribuídas

- **Exemplo II:**

  Vamos obter a expressão da fd de uma variável aleatória uniformemente distribuída.

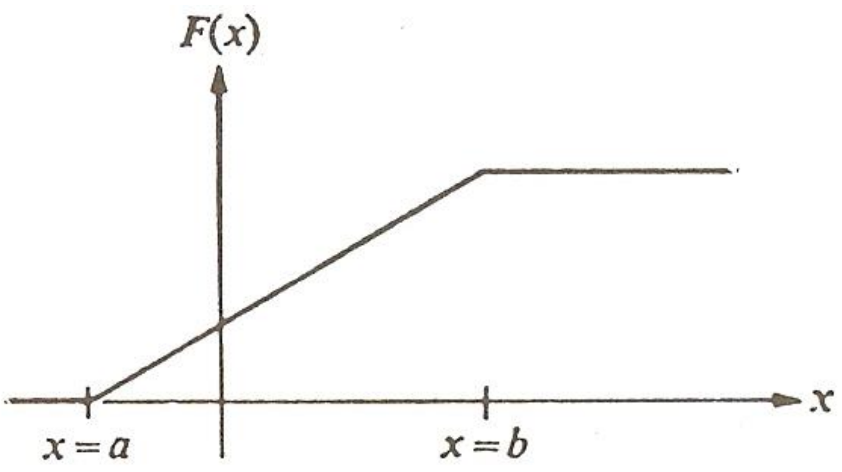
- **Solução (vide figura):**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

$$= 0, \qquad \text{se } x < a,$$

$$= \frac{x-a}{b-a}, \text{se } a \leq x < b,$$

$$= 1, \qquad \text{se } x \geq b.$$



4.8 Uma Observação

- Por que não podemos obter todas as probabilidades em que estejamos interessados por meio não-dedutivos (tais como, com base em evidência experimental, p.e., frequências relativas, ou a experiência passada com o fenômeno)?
- Resposta: Alguns eventos cujas probabilidades desejamos conhecer são tão complicados que nosso conhecimento intuitivo é insuficiente.
- Os vários métodos (estudados e a serem estudados) para cálculo de probabilidades são de enorme importância para tais situações complicadas, de difícil obtenção por meios intuitivos ou empíricos.