5 Funções de Variáveis Aleatórias

ESQUEMA DO CAPÍTULO

5.1 Um Exemplo

- **Exemplo:**

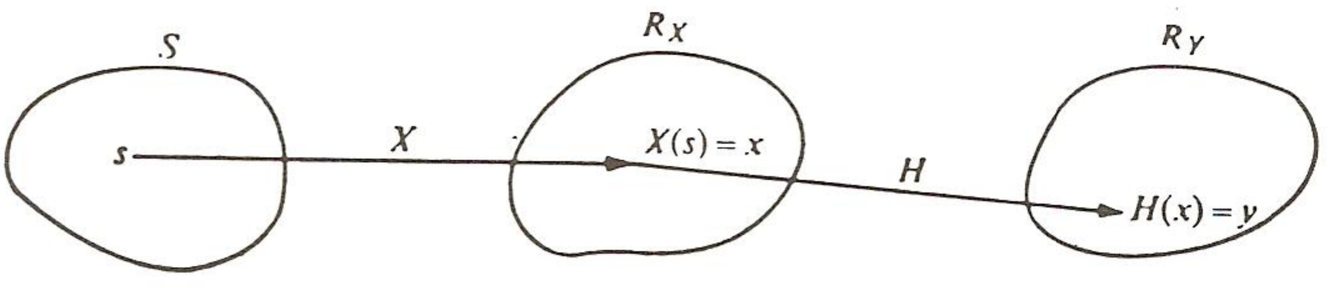
  Suponha que o raio do orifício de um tubo seja considerado uma variável aleatória X, com fdp *f*. Seja a área da secção transversal do orifício $A = \pi X^2$. Como o valor X é resultado de um experimento aleatório, logo o valor de A também.
- **Problema:** Se a fdp de X é *f*, qual é a fdp *g* de A?
- **Solução:** Esperamos que a fdp *g* seja de alguma forma dedutível da fdp *f*.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Eventos Equivalentes:**

  Seja ε um experimento e seja S um espaço amostral associado a ε. Seja X uma variável aleatória definida em S. Suponha que y = H(x) seja uma função real de x.

  Então, Y = H(X) é uma variável aleatória, porque para todo $s \in$ S, um valor de Y fica determinado, a saber y = H[X(x)] (vide figura).



5.2 Eventos Equivalentes

- **Definição:**

  Seja C um evento (subconjunto) associado ao contradomínio R_Y, de Y. Seja $B \subset R_X$ definido assim

  $$B = \{x \in R_X: H(x) \in C\}.$$

  B é o conjunto de todos os valores de X, tais que $H(x) \in C$. Se B e C forem relacionados desse modo, então B e C são denominados eventos equivalentes.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Observações:**

a) A interpretação não formal é que B e C serão eventos equivalentes se, e somente se, B e C ocorrerem conjuntamente;

b) Suponha-se que A seja um evento associado a S, o qual é equivalente a um evento B associado a R_X. Então, se C for um evento associado a R_Y o qual é equivalente a B, teremos que A será equivalente a C;

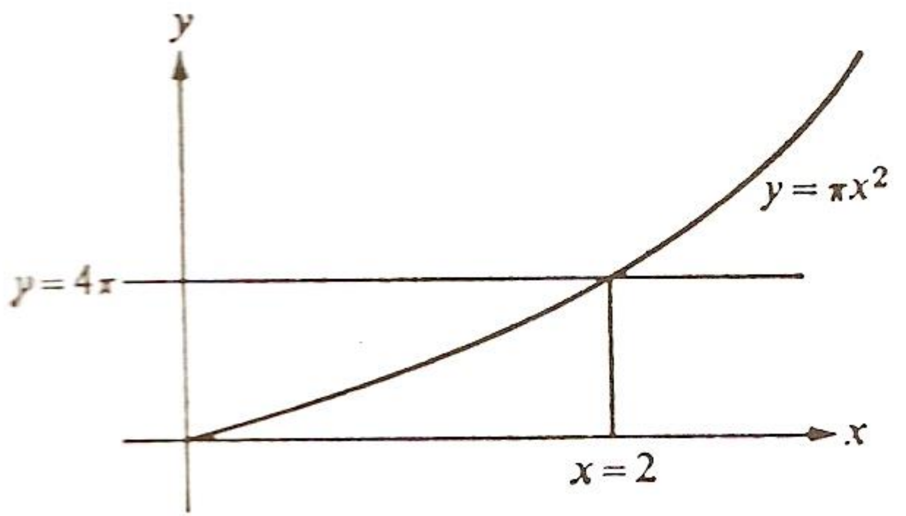
c) É importante ressaltar que quando falamos de eventos equivalentes, esses eventos são associados a diferentes espaços amostrais.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Exemplo:**

  Suponha que H(x) = πx^2. Então os eventos B: {X > 2} (isto é, {s| X(s) > 2}), e C: {Y > π4} (isto é, {x| Y(x) > 4π}), são equivalentes.

  De fato, se Y = πx^2, então {X > 2} ocorrerá se, e somente se, {Y > π4} ocorrer, desde que X não pode tomar valores negativos no caso presente (vide figura).



5.2 Eventos Equivalentes

- **Definição:**

  Seja uma variável aleatória X definida no espaço amostral S. Seja R_X o contradomínio de X. Seja H um função real e considere-se a variável aleatória Y = H(X) com contradomínio R_Y. Para qualquer evento $C \subset R_Y$, definiremos P(C) assim

  $$P(C) = P[\{x \in R_X : H(x) \in C\}].$$

  Em outras palavras, a probabilidade de um evento associado ao contradomínio de Y é definida como a probabilidade do evento equivalente.

5.2 Eventos Equivalentes

- **Comentários:**

a) A definição anterior torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y, se conhecemos a distribuição de probabilidades de X e se pudermos determinar o respectivo evento equivalente;

b) Uma vez que explicamos como relacionar probabilidades associadas a R_X com probabilidades associadas a S, podemos reescrever a equação

$$P(C) = P[\{x \in R_X : H(x) \in C\}]$$

assim

$$P(C) = P[\{s \in S : H[X(s)] \in C\}].$$

5.2 Eventos Equivalentes

- **Exemplo:**

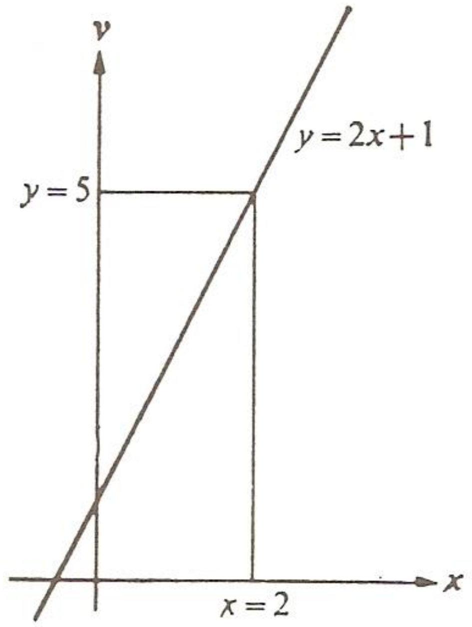
  Seja X uma variável aleatória contínua com fdp (uma integração simples confirma que $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$)

  $$f(x) = e^{-x},\ x > 0.$$

  Suponha que H(x) = 2x + 1. Em consequência, $R_X = \{x|\ x > 0\}$, enquanto $R_Y = \{y|\ y > 1\}$. Suponha que o evento C seja definido como C = {Y ≥ 5}.

  Então, $y \geq 5$ se, e somente se, $2x + 1 \geq 5$, o que por sua vez acarreta $x \geq 2$. Daí, C é equivalente a B = {X ≥ 2} (vide figura) e, assim,

  $$P(Y \geq 5) = P(X \geq 2) = \int_2^\infty e^{-x}dx = 1/e^2.$$



5.2 Eventos Equivalentes

- **Observações:**

a) É possível que consideremos a incorporação de ambas as avaliações, isto é, de $x = X(s)$ e de $y = H(x)$, no experimento ε e, consequentemente, consideremos apenas R_Y, o contradomínio de Y, como o espaço amostral do experimento ε;

b) Exatamente da mesma forma que a distribuição de probabilidade de X foi induzida em R_X pela distribuição de probabilidade sobre o espaço amostral original S, a distribuição de probabilidade de Y será determinada quando a distribuição de probabilidade de X for conhecida;

c) Ao considerar uma função de uma variável aleatória X, digamos $Y = H(X)$, devemos observar que nem toda função H poderá ser aceita. Felizmente, a funções que surgem na prática são aceitáveis.

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 1:**

  X é uma variável aleatória discreta e Y = H(X); logo, Y será também uma variável aleatória discreta e

  $y_i = H(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n, ...$.

- **Exemplo:**

  Suponha que a variável aleatória X tome os três valores, -1, 0 e 1, com probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6, respectivamente. Seja Y = 3X + 1. Nesse caso, os valores possíveis de Y são -2, 1 e 4, tomados com probabilidades 1/3, 1/2 e 1/6.

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Procedimento geral:**

  Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, os valores possíveis de X, com distribuição de probabilidade

  $$p(x_i) = P(X = x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

  e seja H for uma função tal que, a cada valor y corresponda exatamente um valor x.

  Então, a distribuição de probabilidade de Y pode ser obtida do seguinte modo

  $$y_i = H(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n, \ldots ;$$

  $$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_i).$$

5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Exemplo II:**

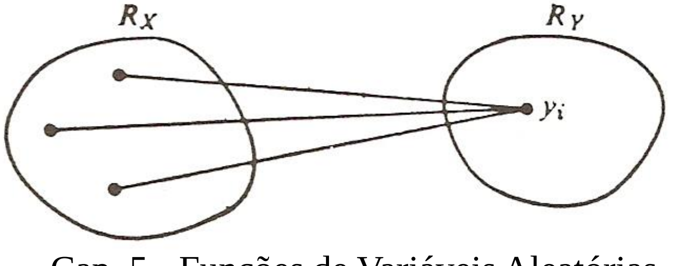
  Suponha-se que consideramos a mesma variável do exemplo anterior, mas agora $Y = X^2$. Nesse caso, os valores possíveis de Y são 0 e 1, tomados com probabilidades 1/2 e 1/2, porque Y = 1 se, e somente se, X = -1 ou X = 1 e a probabilidade do evento $\{X = -1\} \cup \{X = 1\}$ é 1/3 + 1/6 = 1/2.

- **Procedimento geral:**

  Sejam $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \ldots$, os valores de X que tenham a propriedade $H(x_{ij}) = y_i$, para todo j. Então

  $$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_{i1}) + p(x_{i2}) + \ldots ,$$

  isto é, deve-se achar o evento equivalente a $\{Y = y_i\}$ (ver figura).



5.3 Variáveis Aleatórias Discretas

- **Funções de Variáveis Aleatórias Discretas - Caso 2:**
  X é uma variável contínua enquanto Y é discreta.
- **Exemplo:**
  Suponha-se que X possa tomar todos os valores reais, enquanto Y seja definido igual a Y = 1, se $X \geq 0$, e $Y = -1$, se $X < 0$.

  A fim de obter a distribuição de probabilidade de Y, determina-se apenas o evento equivalente (no contradomínio R_X) correspondente aos diferentes valores de Y. Assim

  $$q(1) = P(Y = 1) = P(X \geq 0) = \int_0^{\infty} f(x)dx \text{ e}$$
  $$q(-1) = P(Y = -1) = P(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx.$$

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Funções de variáveis aleatórias contínuas:**

  O caso mais importante e mais frequentemente encontrado surge quando X for uma variável aleatória contínua com fdp *f* e H for uma função também contínua.

  Consequentemente, Y = H(X) será uma variável aleatória contínua e nossa tarefa será obter sua fdp *g*.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Procedimento geral:**

a) Obter G, a fd de Y, na qual $G(y) = P(Y \leq y)$, achando-se o evento A (no contradomínio X) o qual é equivalente ao evento $\{Y \leq y\}$;

b) Derivar $G(y)$ em relação a y, a fim de obter $g(y)$;

c) Determinar aqueles valores de y no contradomínio de Y, para os quais $g(y) > 0$.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo:**

  Suponhamos que X tenha fdp

  $f(x) = 2x$, se $0 < x < 1$, e

  $f(x) = 0$, caso contrário.

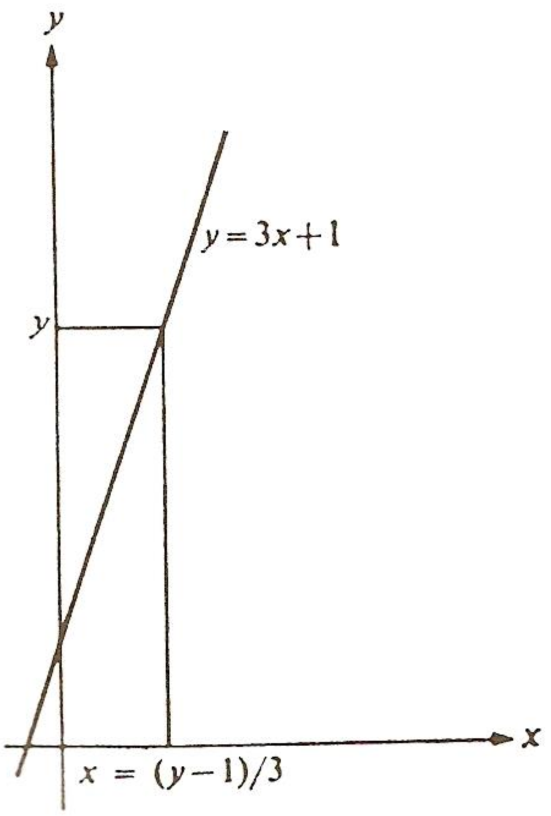
  Seja $H(x) = 3x + 1$. Daí, para obter a fdp de $Y = H(X)$, teremos (ver figura)

  $$G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y)$$
  $$= P[X \leq (y-1)/3]$$
  $$= \int_0^{(y-1)/3} 2x\,dx = [(y-1)/3]^2.$$

  Daí

  $$g(y) = G'(y) = 2(y-1)/9.$$

  Desde que $g(y) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1 < y < 4$.



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Procedimento alternativo:**

Considere novamente

G(y) = P(Y ≤ y) = P[X ≤ (y-1)/3] = F[(y-1)/3],

em que F é a fd de X, isto é

F(x) = P(X ≤ x).

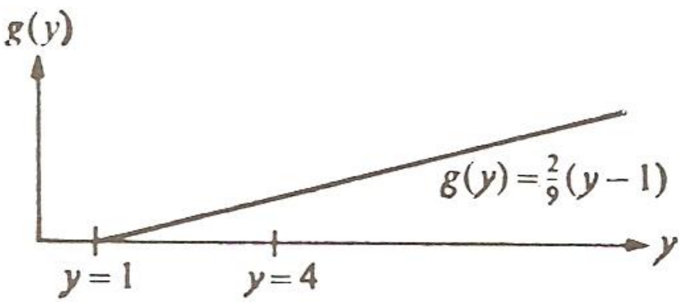
A fim de calcular a derivada de G, G′(y), empregaremos a regra de derivação de função

$$G'(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{du} . \frac{du}{dy}, \text{em que } u = \frac{y-1}{3}.$$

Portanto (ver fdp de Y na figura)

$$G'(y) = F'(u) \cdot \frac{1}{3} = f(u) \cdot \frac{1}{3} = 2\left(\frac{y-1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3},$$

como anteriormente obtido.



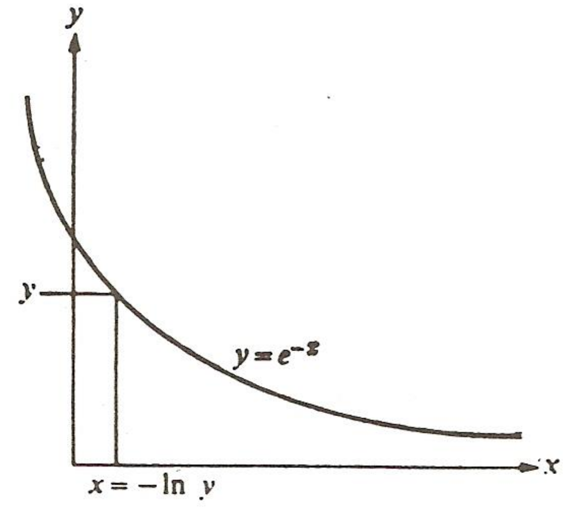
5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II:**

  Suponhamos que uma variável aleatória contínua tenha a fdp como foi dado no exemplo anterior. Seja $H(x) = e^{-x}$.

  Para achar a fdp de $Y = H(X)$, procederemos da seguinte forma (ver figura)

  $$G(y) = P(Y \leq y) = P[e^{-X} \leq y]$$
  $$= P[X \geq -\ln y] = \int_{-\ln y}^{1} 2x\,dx$$
  $$= 1-(-\ln y)^2.$$



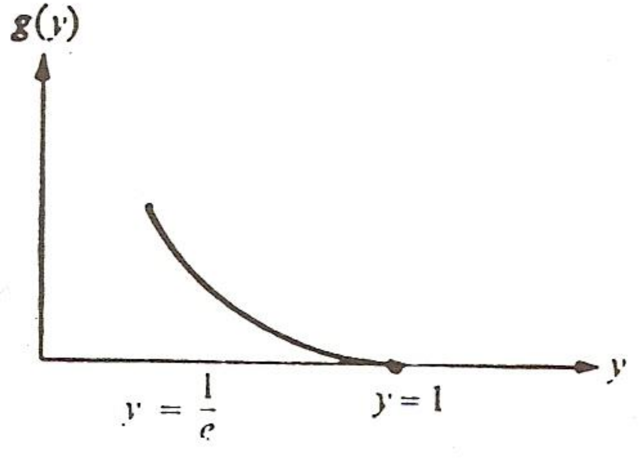
5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II (continuação):**

  Daí

  $$g(y) = G'(y) = -2(\ln y)/y.$$

  Visto que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1/e < y < 1$ (ver figura).



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Teorema:**

  Seja X uma variável aleatória contínua com fdp f, em que $f(x) > 0$, para $a < x < b$. Suponha-se que $y = \mathrm{H}(x)$ seja uma função de x estritamente monótona (ou crescente ou decrescente). Admita-se que essa função seja derivável (e, portanto, contínua) para todo x. Então, a variável aleatória Y, definida como Y = H(X) possui a fdp g dada por

  $$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|,$$

  em que x é expresso em termos de y.

  Se H for crescente, então g será não-nula para aqueles valores de y que satisfaçam $\mathrm{H}(a) < y < \mathrm{H}(b)$.

  Se H for decrescente, então g será não-nula para aqueles valores de y que satisfaçam $\mathrm{H}(b) < y < \mathrm{H}(a)$.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo:**

  Reexaminar exemplo anterior, pelo teorema, quando tivemos

  $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$, e

  $y = 3x + 1.$

  Consequentemente,

  $x = (y\text{-}1)/3$ e

  $dx/dy = 1/3.$

  Logo,

  $g(y) = f(x)|dx/dy| = 2[(y\text{-}1)/3](1/3),\ 1 < y < 4,$

  o que confirma resultado anteriormente obtido.

5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

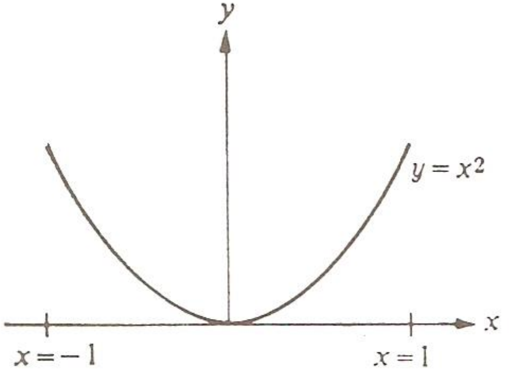
- **Exemplo II:**

  Suponha que

  $f(x) = 1/2$, se $-1 < x < 1$, e

  $f(x) = 0$, fora desse intervalo.

  Seja $H(x) = x^2$. Obviamente, esta não é uma função monótona sobre o intervalo [-1, 1] (ver figura).



5.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

- **Exemplo II (continuação):**

  Para obter a fdp de Y = X^2, isto é, de uma função não-monótona, procedemos da seguinte forma

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right)$$
$$= P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right)$$
$$= P\left(X \leq \sqrt{y}\right) - P\left(X \leq -\sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F\left(-\sqrt{y}\right),$$

  em que F é a fd da variável aleatória X.

  Logo (ver figura)

$$g(y) = G'(y) = \frac{f\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}} - \frac{f\left(-\sqrt{y}\right)}{-2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f\left(\sqrt{y}\right) + f\left(-\sqrt{y}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}(1/2 + 1/2) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, 0 < y < 1.$$