6

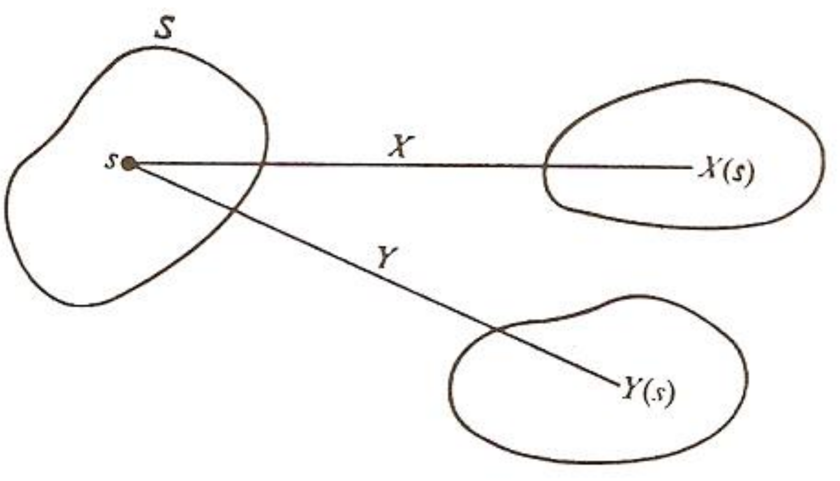
Variáveis Aleatórias de Duas ou Mais Dimensões

ESQUEMA DO CAPÍTULO

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Definição:**

  Sejam ε um experimento e *S* um espaço amostral associado a ε. Sejam $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ duas funções, cada uma associando um número real a cada resultado $s \in S$ (ver figura). Denominaremos (X, Y) uma *variável aleatória bidimensional* (algumas vezes chamada *vetor aleatório*).



6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Comentários:**
  - Assim como no caso unidimensional, não estaremos interessados na natureza funcional de $X(s)$ e $Y(s)$, mas tão somente nos valores que X e Y assumem.
  - Também falaremos do contradomínio de (X, Y), a saber $R_{X \times Y}$, como o conjunto de todos os valores possíveis de (X, Y).
  - No caso bidimensional, por exemplo, o contradomínio de (X, Y) será um subconjunto do plano euclidiano e cada resultado $X(s)$ e $Y(s)$ poderá ser representado como um ponto (x, y) no plano.
  - Também suprimiremos a natureza funcional de X e Y, ao escrevermos, por exemplo, $P[X \leq a, Y \leq b]$ em lugar de $P[X(s) \leq a, Y(s) \leq b]$.

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Definição:**

  a) (X, Y) será uma ***variável aleatória discreta bidimensional*** se os valores possíveis de (X, Y) forem finitos ou infinitos numeráveis, isto é, se os valores possíveis de (X, Y) puderem ser representados por (x_i, y_j), $i = 1, 2, ..., n, ...; j = 1, 2, ..., m, ...$.

  b) (X, Y) será uma ***variável aleatória contínua bidimensional*** se (X, Y) puder tomar todos os valores em algum conjunto não-numerável do plano euclidiano.

  Por exemplo, se (X, Y) tomar todos os valores no retângulo $\{(x, y)|\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ ou todos os valores no círculo $\{(x, y)|\ x^2+y^2 \leq 1\}$, podemos dizer que (X, Y) é uma variável aleatória bidimensional contínua.

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Comentários:**
  a) Não rigorosamente, (X, Y) será uma ***variável aleatória bidimensional*** se representar o resultado de um experimento aleatório no qual tenhamos medido os dois característicos numéricos X e Y.
  b) Pode acontecer que um dos componentes de (X, Y), por exemplo, X, seja discreto, enquanto o outro seja contínuo, mas os casos aqui tratados terão ***ambos*** os componentes discretos ou ambos contínuos.
  c) Em muitas situações, as duas variáveis X e Y, quando consideradas conjuntamente, constituirão de maneira muito natural o resultado de um ***único*** experimento e em quase todas as aplicações existe uma razão bastante definida para considerar X e Y ***conjuntamente***.

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Definição:**

  a) Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. A cada resultado possível (x_i, y_j) associaremos um número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X=x_i, Y=y_j)$ e satisfaça às seguintes condições:

     1) $p(x_i, y_j) \geq 0$, para todo (x, y),
     2) $\Sigma^{\infty}_{j=1} \Sigma^{\infty}_{i=1} p(x_i, y_j) = 1$.

  A função p definida para todo (x_i, y_j) no contradomínio de (X, Y) é denominada a *função de probabilidade* de (X, Y). O conjunto dos ternos

  $[x_i, y_j, p(x_i, y_j)]$, $i, j = 1, 2, \ldots$, é, algumas vezes, denominado *distribuição de probabilidade* de (X, Y).

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Definição (final):**

  b) Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua que toma todos os valores em alguma região R do plano euclidiano. A *função densidade de probabilidade conjunta* f é uma função que satisfaz às seguintes condições:

  3) $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in R$,
  4) $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

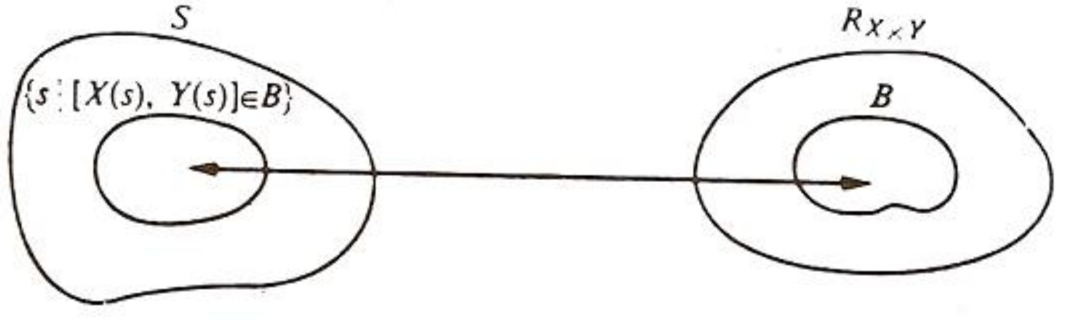
- **Comentários:**
  a) A analogia com a distribuição de massa também é evidente no presente caso. No caso discreto é como se toda a massa estivesse concentrada em um número finito ou infinito enumerável de lugares e no caso contínuo é como se a massa pudesse ser encontrada em todos os pontos.
  b) A condição (4) afirma que o volume total sob a superfície dada pela equação $z = f(x, y)$ é igual a 1.
  c) Como no caso unidimensional, $f(x, y)$ não representa a probabilidade.
  d) Como no caso unidimensional, adotaremos a convenção de que $f(x, y) = 0$ se $(x, y) \notin R$, e, assim, temos $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Comentários (continuação):**
  - e) Também suprimiremos a natureza funcional de (X, Y).
  - f) Também, como no caso unidimensional, a distribuição de probabilidades de (X, Y) é realmente *induzida* pela probabilidade dos eventos associados ao espaço amostral original S. Ou seja, se B estiver no contradomínio de (X, Y), teremos

$$P(B) = P\{[X(s), Y(s)] \in B\} = P\{s|\ [X(s), Y(s)] \in B\}.$$

Esta probabilidade se refere a um evento em S e, consequentemente, determina a probabilidade de B. De acordo com nossa terminologia anterior, B e $\{s|\ [X(s), Y(s)] \in B\}$ são eventos equivalentes (ver figura).



6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Exemplo:**

  Duas linhas de produção fabricam um certo tipo de peça. Suponha que a capacidade na linha I (em qualquer dia) seja 5 peças e na linha II, 3 peças. Admita que o número de peças realmente produzidas em qualquer linha seja uma variável aleatória e que (X, Y) represente a variável aleatória bidimensional que fornece o número de peças produzidas pela linhas I e II, respectivamente. A Tabela 6.1 dá a distribuição de probabilidade conjunta (X, Y).

Tab. 6.1

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Exemplo (continuação):**

  Cada casa na tabela representa

  $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$.

  Assim, $p(2, 3) = P(X=2, Y=3) = 0{,}04$ *etc*. Portanto, se B for definido como

  B = {mais peças são produzidas pela linha I que pela linha II}

  encontramos que

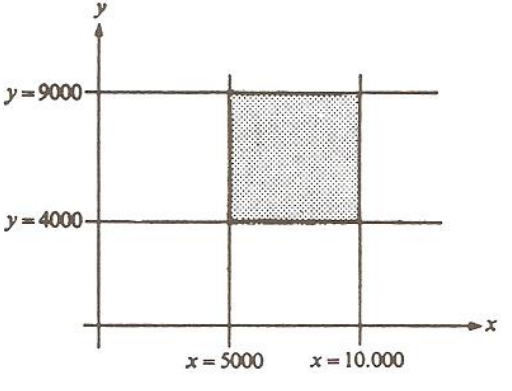
  $$P(B) = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}75\ .$$

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Exemplo II:**

  Suponha que um fabricante de lâmpadas esteja interessado no número de lâmpadas encomendadas a ele durante os meses de janeiro e fevereiro. Sejam X e Y, respectivamente, o número de lâmpadas encomendadas durante esses dois meses. Admitiremos que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional, com a seguinte fdp conjunta (ver figura):

$$f(x, y) = c, \quad \text{se } 5.000 \le x \le 10.000 \text{ e } 4.000 \le y \le 9.000,$$
$$= 0, \quad \text{para quaisquer outros valores.}$$



6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Exemplo II (continuação):**

  Para determinar *c*, levamos em conta o fato de que

  $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1.$$

  Por conseguinte

  $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_{4.000}^{9.000}\int_{5.000}^{10.000} c\,dxdy = c\times 5000^2.$$

  Assim, $c = (5.000)^{-2}$. Daí, se B = {X ≥ Y}, teremos

  $$P(B) = 1 - \frac{1}{(5.000)^2}\int_{5.000}^{9.000}\int_{5.000}^{y} dxdy =$$

  $$= 1 - \frac{1}{(5.000)^2}\int_{5.000}^{9.000}(y - 5.000)\,dy = \frac{17}{25}.$$

6.1 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Definição:**

  Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. A ***função de distribuição acumulada*** (fd) F da variável aleatória bidimensional (X, Y) é definida por

  $$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

- **Comentário:**

  F é uma função de duas variáveis e tem muitas propriedades análogas àquelas expostas para a fd unidimensional. A seguinte propriedade é bastante importante.

  Se F for a fd de uma variável aleatória bidimensional com fdp f, então

  $$\partial^2 F(x, y)/\partial x \partial y = f(x, y),$$

  sempre que F for derivável, análogo a $dF(x)/dx = f(x)$, para variáveis aleatórias unidimensionais.

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo:**

  Considere novamente o exemplo anterior. Calcularemos os totais marginais, isto é, a soma das 6 colunas e 4 linhas da tabela (ver Tabela 6.2)

  As probabilidades que aparecem nas margens (última linha e coluna mais à direita), representam a distribuição de probabilidade de X e Y, respectivamente. Por exemplo, $P(Y=0) = 0{,}25$ e $P(X=0) = 0{,}03$.

Tab. 6.2

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Soma
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Soma	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1,00

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Cálculo das distribuições marginais de X e Y:**

a) Caso discreto – Desde que $X = x_i$ deve ocorrer junto com $Y = y_j$ para algum j e pode ocorrer com $Y = y_j$ somente com um j, tem-se

$$p(x_i) = P(X{=}x_i) = P(X{=}x_i, Y{=}y_1 \text{ ou } X{=}x_i, Y{=}y_2 \text{ ou } \ldots) =$$
$$= \Sigma_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j).$$

A função p definida para x_1, x_2, ..., representa a distribuição de probabilidade marginal de X.

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Cálculo das distribuições marginais de *X* e *Y*:**

a) Caso contínuo – Seja *f* a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional contínua (*X*, *Y*). Definiremos *g* e *h*, respectivamente as funções de densidade de probabilidade marginal de *X* e de *Y*, assim

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy; \qquad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx.$$

Essas fdp correspondem às fdp básicas das variáveis aleatórias unidimensionais *X* e *Y*, respectivamente. Por exemplo

$$P(c \leq X \leq d) = P[c \leq X \leq d, -\infty < Y < +\infty] =$$

$$= \int_{c}^{d} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy\,dx =$$

$$= \int_{c}^{d} g(x)dx.$$

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo:**

  Dois característicos do desempenho do motor de um foguete são o empuxo X e a taxa de mistura Y. Suponha que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional com fdp conjunta:

  $$f(x,y) = 2(x+y-2xy), \quad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$$
  $$= 0, \quad \text{caso contrário.}$$

  A fdp marginal de X é dada por:

  $$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 2(x+y-2xy)dy =$$
  $$= 2\left(xy + y^2/2 - xy^2\right)\Big|_0^1 = 1, \quad 0 \le x \le 1.$$

  Em outras palavras, X é uniformemente distribuída sobre [0,1].

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo (final):**

  A fdp marginal de Y é dada por

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_0^1 2(x + y - 2xy)dx =$$

$$= 2\left(x^2/2 + xy - x^2 y\right)\Big|_0^1 = 1, \quad 0 \le y \le 1.$$

Portanto, Y é também uniformemente distribuída sobre [0,1].

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Definição:**

  Dizemos que a variável aleatória contínua bidimensional é uniformemente distribuída sobre a região R do plano euclidiano quando

  $$f(x, y) = c, \quad \text{para } (x, y) \in R,$$
  $$= 0, \quad \text{caso contrário.}$$

  Em virtude da condição

  $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1,$$

  a definição acima acarreta que a constante será igual a 1/área(R), supondo que R seja uma região com área finita, não nula.

- **Comentário:**

  Essa definição é o análogo bidimensional da variável aleatória unidimensional distribuída uniformemente.

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo:**

  Suponha que a variável aleatória (X, Y) seja uniformemente distribuída sobre a região sombreada R, indicada (ver figura). Portanto

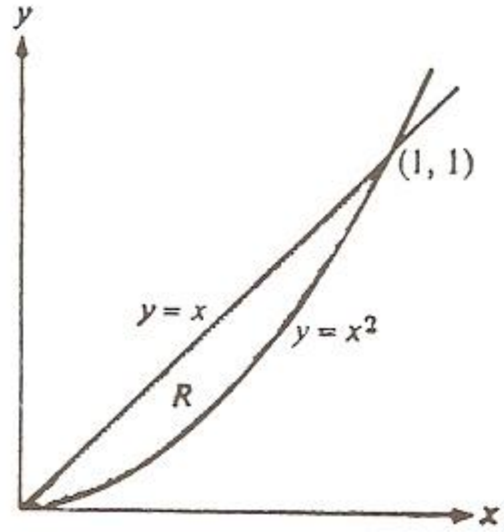
  $f(x, y) = 1/\text{área}(R)$, para $(x, y) \in R$.

  Encontraremos que

  $$\text{área}(R) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}.$$

  Logo, a fdp será dada por

  $$f(x, y) = 6, \quad \text{para } (x, y) \in R,$$
  $$= 0, \quad \text{para } (x, y) \notin R.$$



6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo (continuação):**

  Encontramos as fdp marginais de *X* e *Y*, pelas seguintes expressões

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{x} 6\,dy = 6(x - x^2),\ \ 0 \le x \le 1,$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx = 6(\sqrt{y} - y),\ \ 0 \le y \le 1.$$

  Os gráficos dessas fdp estão esboçados na Fig. 6.6.

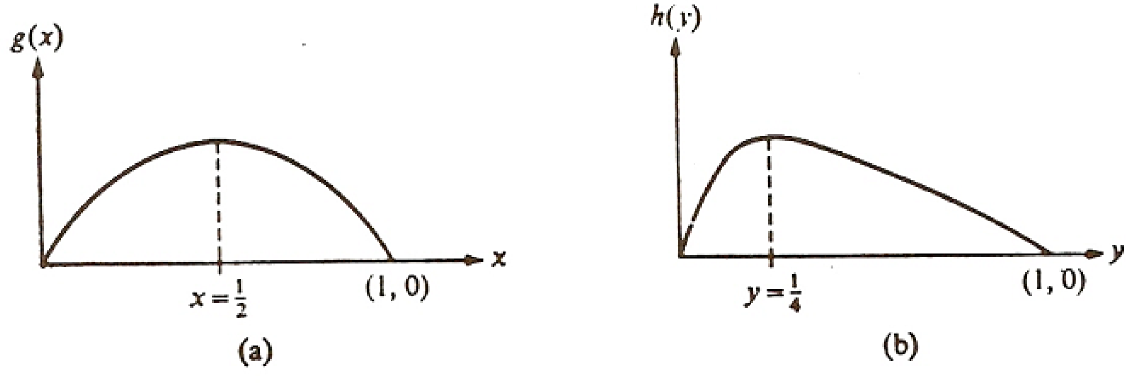


Fig. 6.6

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo II:**

  Considere novamente os exemplos anteriores com variável aleatória bidimensional discreta e suponha que se deseje calcular a probabilidade condicionada $P(X = 2|\, Y = 2)$. De acordo com a definição de probabilidade condicionada, tem-se

$$P\left(X = 2 \,|\, Y = 2\right) = \frac{P\left(X = 2, Y = 2\right)}{P\left(Y = 2\right)} = \frac{0{,}05}{0{,}25} = 0{,}20.$$

  Podemos generalizar esse cálculo

$$p(x_i \,|\, y_j) = P(X = x_i \,|\, Y = y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}, \quad \text{se} \;\; q(y_j) > 0,$$

$$p(y_j \,|\, x_i) = P(Y = y_j \,|\, X = x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad \text{se} \;\; p(x_i) > 0.$$

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Definição:**

  Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional com fdp conjunta f. Sejam g e h as fdp marginais de X e Y, respectivamente.

  A fdp marginal de X condicionada a um dado $Y = y$ é definida por:

$$g(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \quad \text{se } h(y) > 0.$$

  A fdp marginal de Y condicionada a um dado $X = x$ é definida por:

$$h(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad \text{se } g(x) > 0.$$

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Comentários:**

a) Obviamente, as fdp's condicionadas definidas satisfazem a todas as condições impostas para uma fdp unidimensional. Deste modo, para y fixado, teremos $g(x|y) \geq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x \mid y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x,y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \frac{h(y)}{h(y)} = 1.$$

b) Uma interpretação intuitiva de $g(x|y)$ é obtida se considerarmos a superfície representada pela fdp conjunta $z = f(x,y)$ cortada pelo plano $y = c$, por exemplo.

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Comentários (continuação):**

c) Suponhamos que (X, Y) represente a estatura e o peso de uma pessoa, respectivamente. Sejam f a fdp conjunta de (X, Y) e g a fdp marginal de X (isto é, sem levar em conta Y). Portanto,

$$\int_{5,8}^{6} g(x)dx$$

representaria $P\{5,8 \leq X \leq 6\}$, isto é, sem considerar o peso Y, e

$$\int_{5,8}^{6} g(x|150)dx$$

seria interpretada como $P(5,8 \leq X \leq 6 | \, Y = 150)$.

Estritamente falando, esta probabilidade condicionada não é definida, tendo em vista nossa convenção já feita para a probabilidade condicionada, porque $P(Y = 150) = 0$.

Contudo, empregamos a integral acima para definir essa probabilidade e, certamente, em base intuitiva, este deve ser o significado desse número.

6.2 Distribuições de Probabilidade Marginal e Condicionada

- **Exemplo:**

  Com referência a exemplo anterior, teremos

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x,$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dx = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}.$$

  Portanto,

$$g(x \mid y) = \frac{x^2 + xy/3}{1/3 + y/6} = \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,$$

$$h(y \mid x) = \frac{x^2 + xy/3}{2x^2 + 2x/3} = \frac{3x + y}{6x + 2},\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 1.$$

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo:**
  Consideremos duas fontes de material radioativo, a alguma distância uma da outra, as quais estão emitindo partículas α. Suponhamos que essas duas fontes sejam observadas durante um período de duas horas e o número de partículas emitidas seja registrado. Admitamos que se esteja interessado nas seguintes variáveis aleatórias:
  - X_1 e X_2,
    respectivamente, o número de partículas emitidas pela primeira fonte durante a primeira e a segunda horas, e
  - Y_1 e Y_2,
    respectivamente, o número de partículas emitidas pela segunda fonte durante a primeira e a segunda horas.

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo (continuação):**

  Parece intuitivamente óbvio que

  (X_1 e Y_1) ou (X_1 e Y_2) ou (X_2 e Y_1) ou (X_2 e Y_2)

  sejam todos os pares de variáveis aleatórias **independentes**.

  De fato, os X_i dependem somente das características da fonte 1, enquanto os Y_i dependem apenas de 2 e não existe presumivelmente motivo para supor interferência mútua entre as fontes 1 e 2.

  E quanto à **possível** independência de X_1 e X_2?

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Definição:**

a) Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$ para quaisquer i e j. Isto é, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i, \mathrm{Y} = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ para todo i e j.

b) Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional. Diremos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $f(x, y) = \mathrm{g}(x)h(y)$ para todo (x, y), em que f é a fdp conjunta, e g e h são as fdp marginais de X e Y, respectivamente.

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Teorema:**

a) Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente se, $p(x_i| y_j) = p(x_i)$ para todo i e j (ou, o que é equivalente se, e somente se, $q(y_j| x_i) = q(y_j)$ para todo i e j).

b) Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional. Nesse caso, X e Y serão independentes se, e somente se, $g(x| y) = \mathrm{g}(x)$, ou equivalentemente, se e somente se, $h(y| x) = h(y)$, para todo (x, y).

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo:**

  Suponha que uma máquina seja utilizada para determinada tarefa durante a manhã e para uma tarefa diferente durante a tarde. Representemos por X e Y, respectivamente, o número de vezes que a máquina para por desarranjo de manhã e à tarde. A Tabela 6.3 dá a distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y).

Tab. 6.3

$Y \backslash X$	0	1	2	$q(y_j)$
0	0,1	0,2	0,2	0,5
1	0,04	0,08	0,08	0,2
2	0,06	0,12	0,12	0,3
$p(x_i)$	0,2	0,4	0,4	1,0

Um cálculo fácil mostra que, para todas as casas da Tabela 6.3, teremos

$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j)$.

Portanto, X e Y são variáveis aleatórias independentes.

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo II:**

  Sejam X e Y a duração da vida de dois dispositivos eletrônicos. Suponha-se que sua fdp conjunta seja dada por

  $$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \ x \geq 0, \ y \geq 0.$$

  Desde que podemos fatorar

  $$f(x, y) = g(x)h(y) = e^{-x}e^{-y},$$

  a independência de X e Y fica estabelecida.

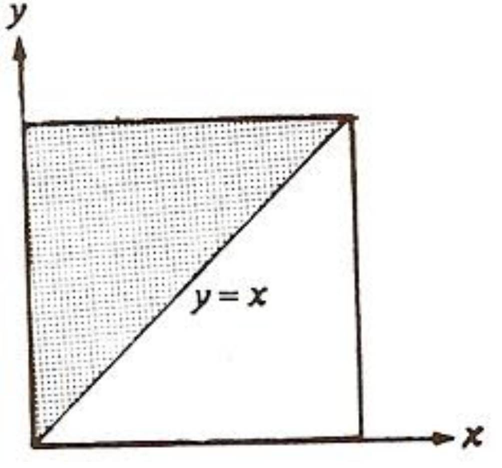
6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo III:**

  Suponha-se que

  $f(x, y) = 8xy$, $0 \le x \le y \le 1$ (vide domínio na figura).

  Muito embora f seja (já) escrita na forma fatorada, X e Y *não* são independentes, já que o campo de definição $\{(x, y) | \ 0 \le x \le y \le 1\}$ é tal que para dado x, y pode tomar somente valores maiores do que aquele dado x e menores que 1. Por isso, X e Y não são independentes.



6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Comentário:**

  Da definição de distribuição de probabilidade marginal (quer no caso discreto, quer no caso contínuo), torna-se evidente que a distribuição de probabilidade conjunta **determina**, univocamente, a distribuição de probabilidade marginal. Isto é, do conhecimento da fdp conjunta f, poderemos obter as fdp marginais g e h.

  No entanto, a recíproca **não** é verdadeira. De fato, em geral, o conhecimento das fdp marginais g e h não determina a fdp conjunta f. Somente quando X e Y forem independentes isso será verdadeiro, porque nesse caso teremos

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

6.3 Variáveis Aleatórias Independentes

- **Teorema:**

  Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional. Sejam A e B eventos cuja ocorrência (ou não ocorrência) dependa apenas de X e Y, respectivamente (isto é, A é um subconjunto de R_X, o contradomínio de X, enquanto B é um subconjunto de R_Y, o contradomínio de Y). Então, se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, teremos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

- **Demonstração (caso contínuo):**

$$P(A \cap B) = \iint_{A \cap B} f(x, y)dxdy = \iint_{A \cap B} g(x)h(y)dxdy$$

$$= \int_A g(x)dx \int_B h(y)dy = P(A)P(B)$$

6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- Consideraremos agora a seguinte sequência de etapas:

a) Executar o experimento ε e obter o resultado s;

b) Calcular os números $X(s)$ e $Y(s)$;

c) Calcular o número $Z = H_1[X(s), Y(s)]$.

- Algumas importantes variáveis aleatórias nas quais estaremos interessados:

a) $X+Y$; XY; X/Y, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$.

6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- Se (X, Y) for uma variável aleatória bidimensional discreta, o problema é razoavelmente simples, conforme visto no exemplo:

  Suponha que (X, Y) tenha a distribuição dada na Tab. 6.1. Por exemplo, para obter a distribuição de $U = \min(X, Y)$, procedemos conforme se segue. Os valores possíveis para U são 0, 1, 2 e 3. Para calcular $P(U = 0)$, raciocinaremos que $U = 0$ se, e somente se, um dos seguintes ocorrer,

  $[X = 0, Y = 0]$ ou $[X = 0, Y = 1]$ ou $[X = 0, Y = 2]$ ou $[X = 0, Y = 3]$ ou

  $[X = 1, Y = 0]$ ou $[X = 2, Y = 0]$ ou $[X = 3, Y = 0]$ ou $[X = 4, Y = 0]$ ou $[X = 5, Y = 0]$.

  Portanto, $P(U = 0) = 0 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}03, + 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}09 = 0{,}28$. De forma similar, obtemos as demais probabilidades:

  u: 0, 1, 2, 3; $P(U = u)$: 0,28, 0,30, 0,25, 0,17.

6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- Se (X, Y) for uma variável aleatória bidimensional contínua, e se $Z = H_1(X, Y)$ for uma função contínua de (X, Y), então Z será uma variável aleatória contínua (unidimensional) e o problema de achar sua fdp é um pouco mas complicado.
- É frequentemente mais simples introduzir uma segunda variável aleatória, por exemplo, $W = H_2(X, Y)$, e primeiro obter a fdp conjunta de Z e W, digamos $k(z, w)$. Com o conhecimento desta fdp, poderemos então obter a fdp de Z desejada, isto é, $g(z)$, pela integração de $k(z, w)$ em w:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z, w)\, dw.$$

6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- **Teorema:**

  Suponhamos que (X, Y) seja uma variável aleatória contínua bidimensional com fdp conjunta f. Sejam $Z = H_1(X, Y)$ e $W = H_2(X, Y)$, e admitamos que as funções H_1 e H_2 satisfaçam às seguintes condições:

  a) As equações $z = H_1(x, y)$ e $w = H_2(x, y)$ podem ser univocamente resolvidas para x e y, em termos de z e w, isto é, $x = G_1(z, w)$ e $y = G_2(z, w)$;

  b) As derivadas parciais $\partial x/\partial z$, $\partial x/\partial w$, $\partial y/\partial z$ e $\partial y/\partial w$ existem e são contínuas.

  Nessas circunstâncias, a fdp conjunta de (Z, W), isto é, $k(z, w)$ é dada pela seguinte expressão:

  $$k(z, w) = f[G_1(z, w), G_2(z, w)]\ |J(z, w)|,$$

  em que

  $$J(z,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial G_1(z,w)}{\partial w} = \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial z} = \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial G_2(z,w)}{\partial w} = \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

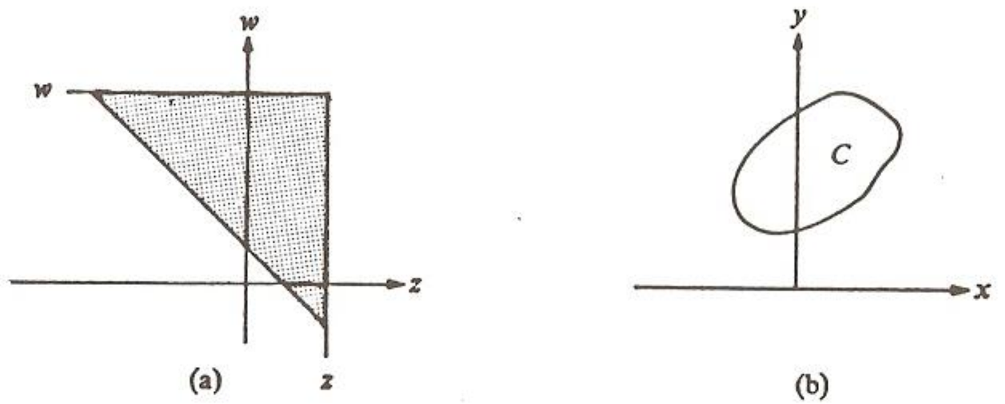
6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- **Comentários:**

a) Consideremos a fd conjunta da variável aleatória bidimensional (Z, W), isto é,

$$K(z, w) = P(Z \leq z, W \leq w) = \int_{-\infty}^{w}\int_{-\infty}^{z} k(s, t)\, ds\, dt,$$

na qual k e a fdp procurada. Como se supõe que a transformação $(x, y) \to (z, w)$ seja, biunívoca (hipótese a), poderemos achar o evento equivalente a $\{Z \leq z, W \leq w\}$, em termos de X e Y. Suponhamos que este evento seja denotado por C (vide figura).



Sendo assim, $\{(X, Y) \in C\}$ se, e somente se, $\{Z \leq z, W \leq w\}$. Consequentemente

$$\int_{-\infty}^{w}\int_{-\infty}^{z} k(s,t)dsdt = \iint_{C} f(x,y)dxdy.$$

6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- **Comentários (continuação):**

  Como se admite *f* conhecida, a integral do segundo membro pode ser calculada. O cálculo de suas derivadas em relação a *z* e *w* fornecerá a fdp pedida. Essas técnicas são conhecidas nos livros de Cálculo avançado.

- Observe-se a acentuada semelhança entre o resultado acima e o resultado obtido no caso unidimensional. A exigência de monotonicidade para a função $y = H(x)$ é substituída pela suposição de que (x, y) e (z, w) seja biunívoca. A condição de derivabilidade é substituída por algumas hipóteses sobre as derivadas parciais consideradas. A solução final obtida é, também, muito semelhante àquela obtida no caso unidimensional: as variáveis *x* e *y* são simplesmente substituídas por suas expressões equivalentes em termos de *z* e *w*, e o valor absoluto dx/dy é substituído pelo valor absoluto do jacobiano.

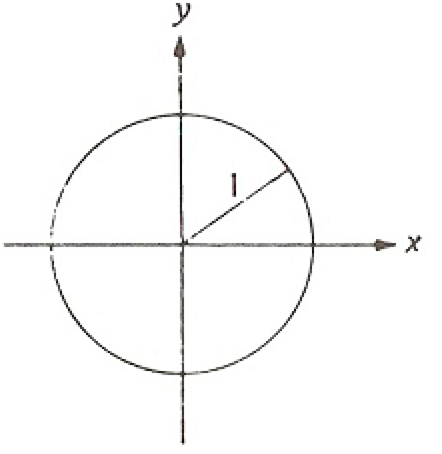
6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo:**

  Suponha-se que estejamos fazendo mira em um alvo circular, de raio unitário, que tenha sido colocado de modo que seu centro se situe na origem de um sistema de coordenadas retangulares (vide figura). Admita-se que as coordenadas (X, Y) do ponto de impacto estejam uniformemente distribuídas sobre o círculo. Isto é,

  $f(x, y) = 1/\pi$, se (x, y) estiver dentro do (ou no) círculo,

  $f(x, y) = 0$, se em qualquer outra parte.



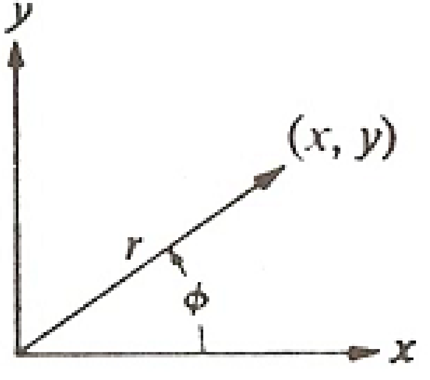
6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

- **Exemplo (continuação):**

  Suponha que estejamos interessados na variável aleatória *R*, que representa a distância da origem. Então,

$$R = H_1(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Seja $\varphi = H_2(x,y) = \text{arc tg}(y/x)$, encontraremos a fdp de *R*, digamos $h(r)$, pelo uso de coordenadas polares (vide figura), $X = G_1(R,\Phi)$ e $Y = G_2(R,\Phi)$, em que $x = G_1(r,\varphi) = r \cos \varphi$ e $y = G_2(r,\varphi) = r \text{ sen } \varphi$.



6.4 Funções de Variáveis Aleatórias

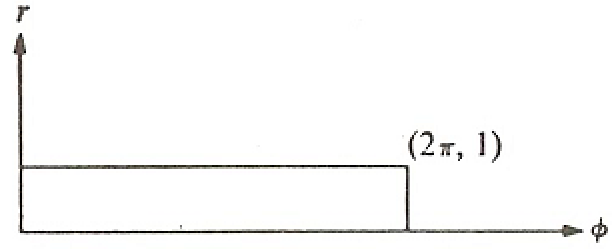
- **Exemplo (final):**

  O jacobiano é:

$$J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \varphi \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\ \text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Pela transformação acima, o círculo unitário no plano *xy* fica transformado no retângulo no plano *φr* (vide figura). Em consequência, a fdp conjunta de (*Φ*, *R*) será dada por

$$k(\varphi, r) = r/\pi, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$



Portanto, a fdp de R, pedida é dada por

$$h(r) = \int_0^{2\pi} k(\varphi, r)\, d\varphi = 2r, \quad 0 \le r \le 1.$$

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Teorema:**

  Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional e admita-se que X e Y sejam independentes. Consequentemente, a fdp f pode ser escrita como $f(x, y) = g(x)h(y)$. Façamos $W = XY$.

  Nesse caso, a fdp de W, digamos p, é dada por

$$p(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du.$$

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Demonstração:**

  Sejam $w = xy$ e $u = x$ (escolha mais simples possível). Portanto, $x = u$ e $y = w/u$. O jacobiano é

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} = 1 & \dfrac{\partial x}{\partial w} = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{-w}{u^2} & \dfrac{\partial y}{\partial w} = \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$

  Daí, a fdp conjunta de $W = XY$ e $U = X$ é

$$s(w,u) = g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|.$$

  A fdp marginal de W será obtida pela integração de $s(w,u)$ em relação a u, fornecendo o resultado procurado. Os valores de w, para os quais $p(w) > 0$, dependerão dos valores de (x, y) para os quais $f(x,y) > 0$.

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo:**

  Suponhamos que temos I e R sejam variáveis aleatórias contínuas com fdp

  I: $g(i) = 2i$, $0 \leq i \leq 1$ e 0 fora desse intervalo;

  R: $h(r) = r^2/9$, $0 \leq r \leq 3$ e 0 fora desse intervalo;

  A variável aleatória de interesse é $E = IR$. Seja p a fdp de E. Pelo Teorema, teremos

  $$p(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(i) h\left(\frac{e}{i}\right)\left|\frac{1}{i}\right| di.$$

  Atentando para os valores para os quais g e h não sejam iguais a zero, verificamos que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

  $0 \leq i \leq 1$ e $0 \leq e/i \leq 3$,

  que são equivalentes a $e/3 \leq i \leq 1$, o que torna a integral acima

  $$p(e) = \int_{e/3}^{1} 2i \frac{e^2}{9i^2}\frac{1}{i} di = -\frac{2}{9} e^2 \frac{1}{i}\bigg|_{e/3}^{1} = \frac{2}{9} e(3-e),\ 0 \leq e \leq 3.$$

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Teorema:**

  Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua bidimensional e suponhamos que X e Y sejam independentes (portanto, a fdp f pode ser escrita como $f(x, y) = g(x)h(y)$). Seja $Z = X/Y$.

  Desse modo, a fdp de Z, digamos q, é dada por

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v)|v|dv.$$

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Demonstração:**

  Sejam $z = x/y$ e $v = y$ (escolha mais simples possível). Portanto, $x = vz$ e $y = v$. O jacobiano é

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} = v & \dfrac{\partial x}{\partial v} = z \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial y}{\partial v} = 1 \end{vmatrix} = v.$$

  Daí, a fdp conjunta de $Z = X/Y$ e $V = Y$ é

$$t(z,v) = g(vz)h(v)|v|.$$

  Pela integração desta fdp conjunta em relação a v, obtém-se a fdp marginal de Z procurada.

6.5 Distribuição do Produto e do Quociente de Variáveis Aleatórias Independentes

- **Exemplo:**

  Admitamos que X e Y representem a duração da vida de duas lâmpadas fabricadas por processos diferentes e que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes com fdp, respectivamente f e g, em que

  $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, e 0 para outros quaisquer valores;

  $g(y) = 2e^{-2y}$, $y \geq 0$, e 0 para outros valores.

  A variável aleatória de interesse é $Z = X/Y$, o quociente das duas durações de vida. Seja q a fdp de Z. Pelo Teorema, teremos

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v)|v|dv.$$

  A integração acima precisa ser feita apenas sobre os valores positivos da variável de integração. Assim (integrando por partes)

$$q(z) = \int_0^{\infty} e^{-vz} 2e^{-2v} v dv = 2\int_0^{\infty} ve^{-v(2+z)} dv = \frac{2}{(z+2)^2}, \ z \geq 0.$$

6.6 Variáveis Aleatórias *n*-Dimensionais

- Faremos apenas uma brevíssima exposição de variáveis aleatórias n-dimensionais;
- Restringir-nos-emos ao caso contínuo;
- Suponhamos que $(X_1, \ldots, X_n)$ possa tomar todos os valores em alguma região de um espaço n-dimensional, isto é,

$$[X_1(s), \ldots, X_n(s)];$$

- Caracterizaremos uma função de densidade de probabilidade conjunta f que satisfaz às seguinte condições:

a) $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$, para todo $(x_1, \ldots, x_n)$;

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = 1.$

6.6 Variáveis Aleatórias *n*-Dimensionais

- Com o auxílio da fdp $f(x_1, ..., x_n)$, podemos definir:

  $$P[(X_1, ..., X_n) \in C] = \int ... \int_C f(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n,$$

  em que C é um subconjunto do contradomínio $(X_1, ..., X_n)$;
- A cada uma das variáveis aleatórias n-dimensionais, poderemos associar algumas variáveis aleatórias de dimensão mais baixa, como por exemplo, se $n = 3$, então,

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2 = g(x_3),$$

  em que g é a fdp marginal da variável aleatória unidimensional X_3, enquanto

  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = h(x_1, x_2),$$

  em que h representa a fdp conjunta da variável aleatória bidimensional (X_1, X_2) etc.

6.6 Variáveis Aleatórias *n*-Dimensionais

- O conceito de independência será estendido de maneira natural e diremos que $(X_1, \ldots, X_n)$ serão variáveis aleatórias independentes se, e somente se, sua fdp conjunta puder ser fatorada na forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \ldots g_n(x_n).$$

- Exemplos de situações nas quais desejaremos considerar variáveis aleatórias *n*-dimensionais:

1. Xi é a precipitação na estação meteorológica i, e desejamos considerar a variável $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$;
2. Xi é a duração da vida da i-ésima válvula e desejamos tratar com mensurações repetidas da variável aleatória, isto é, a variável aleatória n-dimensional $(X_1, \ldots, X_n)$, admitindo que cada Xi tenha a mesma distribuição (todas as válvulas são produzidas da mesma maneira);
3. Desejamos estudar a variável n-dimensional

$$[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)],$$

em que $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, são as épocas de interesse.