

# 7

## Caracterização Adicional de Variáveis Aleatórias

---

---

### ESQUEMA DO CAPÍTULO

**7.1 O VALOR ESPERADO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA (VA)**

**7.2 EXPECTÂNCIA DE UMA FUNÇÃO DE UMA VA**

**7.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS**

**7.4 PROPRIEDADES DO VALOR ESPERADO**

**7.5 A VARIÂNCIA DE UMA VA**

**7.6 PROPRIEDADES DA VARIÂNCIA DE UMA VA**

**7.7 EXPRESSÕES APROXIMADAS DE UMA VA**

**7.8 A DESIGUALDADE DE TCHEBYCHEFF**

**7.9 O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO**

**7.10 VALOR ESPERADO CONDICIONADO**

**7.11 REGRESSÃO DA MÉDIA**

---

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Parâmetros:**

1. A relação determinística  $ax + by = 0$  possui **parâmetros**  $a$  e  $b$ , no sentido de que qualquer escolha particular de  $a$  e  $b$  determina uma função linear específica;
2. Suponha que  $X$  seja uma variável aleatória contínua, com fdp  $f(x) = ke^{-kx}$ ,  $x \geq 0$ . Este modelo aleatório possui **parâmetro**  $k > 0$ , cujo significado será explicado depois;
3. Etc.

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Definição:**

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta, com valores possíveis  $x_1, \dots, x_n, \dots$ . Seja  $p(x_i) = P(X = x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ . Então, o *valor esperado* de  $X$  (ou *esperança matemática* de  $X$ ), denotado por  $E(X)$ , é definido como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

se a série convergir absolutamente, isto é, se

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty,$$

Este número é também denominado o *valor médio* de  $X$ , ou *expectância* de  $X$ .

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Comentários:**
  - a) Se  $X$  tomar apenas um número finito de valores, a expressão acima se torna  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$ . Isto pode ser considerado como uma “média ponderada” dos valores possíveis  $x_1, \dots, x_n$ . Se todos esses valores possíveis forem igualmente prováveis,  $E(X) = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$ , a qual representa a média aritmética simples ou usual dos  $n$  valores possíveis;
  - b) Se um dado equilibrado for jogado e a variável aleatória  $X$  designar o número de pontos obtidos, então  $E(X) = (1/6)(1+2+3+4+5+6) = 7/2$ . Este exemplo simples ilustra nitidamente que  $E(X)$  não é o resultado que esperar quando  $X$  for observado uma única vez. De fato, na situação anterior,  $E(X) = 7/2$  nem mesmo é um valor possível de  $X$ !
  - c) Devemos notar a semelhança entre a noção de valor esperado, como foi definida acima (especialmente se  $X$  puder tomar somente um número finito de valores), e a noção de média de um conjunto de números  $z_1, \dots, z_n$ .

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Exemplo:**

Um fabricante produz peças tais que 10% são defeituosas e 90% são não-defeituosas. Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde US\$ 1, enquanto uma peça não-defeituosa lhe dá lucro de US\$ 5.

Se  $X$  for o lucro líquido por peça, então  $X$  será uma variável aleatória cujo valor esperado é calculado como

$$E(X) = -1 \times (0,1) + 5 \times (0,9) = \text{US\$ } 4,40.$$

Suponha-se que um grande número de tais peças seja produzido. Nesse caso, quando o fabricante perder US\$ 1 cerca de 10% das vezes e ganhar US\$ 5 cerca de 90% da vezes, ele esperará ganhar cerca de US\$ 4,40 por peça, a longo prazo.

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Teorema:**

Seja  $X$  uma variável aleatória distribuída binomialmente, com parâmetro  $p$ , baseada em  $n$  repetições de um experimento. Então,

$$E(X) = np.$$

- **Demonstração:**

Como  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ , teremos

$$E(X) = \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-1-s} = np.$$

- **Comentário:**

O resultado acima corresponde à nossa noção intuitiva. Se supusermos que a probabilidade de algum evento  $A$  seja, por exemplo, 0,3, então se repetirmos esse experimento, por exemplo, por 100 vezes, deveremos esperar que  $A$  ocorra cerca de  $100 \times (0,3) = 30$  vezes.

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Exemplo:**

Uma máquina impressora tem uma probabilidade constante de 0,05 de entrar em pane, em um dia qualquer. Se a máquina não apresentar panes durante a semana, um lucro de \$S será obtido. Se 1 ou 2 panes ocorrerem, um lucro de \$R será alcançado ( $R < S$ ). Se 3 ou mais panes ocorrerem, um lucro de -\$L será obtido. Seja X o lucro obtido por semana de cinco dias úteis. Os valores possíveis de X são R, S e -L. Seja B o número de panes por semana. Teremos

$$P(B = k) = \binom{5}{k} (0,05)^k (1-0,05)^{5-k}, k = 0, 1, \dots, 5.$$

Verificamos que

$$\begin{aligned} E(X) &= S \times P(B=0) + R \times P(B=1 \text{ ou } 2) - L \times P(B=3, 4 \text{ ou } 5) \\ &= S \times (0,95)^5 + \\ &\quad R \times [5 \times (0,05) \times (0,95)^4 + 10 \times (0,05)^2 \times (0,95)^3] - \\ &\quad L \times [10 \times (0,05)^3 \times (0,95)^2 + 5 \times (0,05)^4 \times (0,95)^1 + (0,05)^5] \end{aligned}$$

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Definição:**

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com fdp  $f$ . O *valor esperado* de  $X$  é definido como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Pode acontecer que esta integral imprópria não convirja. Consequentemente, diremos que  $E(X)$  existirá se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx$$

for finita.



# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Exemplo:**

Seja a variável aleatória  $X$  definida como segue. Suponha-se que  $X$  seja o tempo (em minutos) durante o qual um equipamento elétrico seja utilizado em máxima carga, em um certo período de tempo especificado. Suponha-se que  $X$  seja uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} x/1.500^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1.500, \\ -(x-3.000)/1.500^2, & \text{se } 1.500 \leq x \leq 3.000, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{1}{(1.500)(1.500)} \left[ \int_0^{1.500} x^2 dx - \int_{1.500}^{3.000} x(x-3.000) dx \right] = 1.500. \end{aligned}$$

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Exemplo II:**

O conteúdo de cinzas (em porcentagem) no carvão, digamos  $X$ , pode se considerado como uma variável aleatória contínua com fdp

$$f(x) = (1/4.875)x^2, 10 \leq x \leq 25.$$

Portanto,

$$E(X) = (1/4.875) \int_{10}^{25} x^3 dx = 19,5.$$

Assim, o conteúdo de cinzas esperado no particular espécime de carvão que está sendo estudado é de 19,5%.

# 7.1 O Valor Esperado de uma Variável Aleatória

---

- **Teorema:**

Seja  $X$  uniformemente distribuída sobre o intervalo  $[a, b]$ . Nesse caso,

$$E(X) = (a+b)/2.$$

- **Demonstração:**

A fdp de  $X$  é dada por

$$f(x) = 1/(b-a), \quad a \leq x \leq b.$$

Portanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 1/(b-a) \int_a^b xdx = 1/(b-a) x^2/2 \Big|_a^b = (a+b)/2.$$

- **Observação:**

Note que este valor representa o ponto médio do intervalo  $[a, b]$ , como era de se esperar intuitivamente.

## 7.2 Expectância de uma Função de uma Variável Aleatória

---

- **Definição:**

Seja  $X$  uma variável aleatória e seja  $Y = H(X)$ .

- a) Se  $Y$  for uma variável aleatória discreta com valores possíveis  $y_1, y_2, \dots$  e se  $q(y_i) = P(Y = y_i)$ , definiremos

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i q(y_i).$$

- b) Se  $Y$  for uma variável aleatória contínua com fdp  $g$ , definiremos

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)dy.$$

- **Comentário:**

Essas definições são coerentes com as definições anteriores, dadas para o valor esperado de uma variável aleatória. De fato, o que está acima simplesmente representa uma reformulação em termos de  $Y$ . No entanto, surge a questão de podermos obter  $E(Y)$ , sem preliminarmente encontrarmos a distribuição de probabilidade de  $Y$ , partindo-se apenas do conhecimento da distribuição de  $X$ .

## 7.2 Expectância de uma Função de uma Variável Aleatória

---

- **Teorema:**

Seja  $X$  uma variável aleatória e seja  $Y = H(X)$ .

- a) Se  $X$  for uma variável aleatória discreta e  $p(x_i) = P(X = x_i)$ , teremos

$$E(Y) = E[H(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} H(x_i)p(x_i).$$

- b) Se  $X$  for uma variável aleatória contínua com fdp  $f$ , teremos

$$E(Y) = E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f(x)dx.$$

- **Comentário:**

Este teorema torna a avaliação de  $E(Y)$  muito mais simples, porque ele quer dizer que não necessitamos achar a distribuição de probabilidade de  $Y$ , a fim de avaliarmos  $E(Y)$ ; o conhecimento da distribuição de probabilidade de  $X$  é suficiente.

## 7.2 Expectância de uma Função de uma Variável Aleatória

- **Exemplo:**

Seja  $V$  a velocidade do vento (em milhas por hora) e suponha-se que  $V$  seja uniformemente distribuída sobre o intervalo  $[0, 10]$ . A pressão, digamos  $W$  (em libras/pé-quadrado), na superfície da asa de um avião é dada pela relação  $W = 0,003V^2$ . Para achar o valor esperado de  $W$ ,  $E(W)$ , poderemos proceder de duas maneiras:

- a) Empregando o teorema anterior, teremos

$$E(W) = \int_0^{10} H(v)f(v)dv = \int_0^{10} 0,003v^2 \frac{1}{10} dv = 0,1.$$

- b) Empregando a definição de  $E(W)$ , precisaremos primeiramente achar a fdp de  $W$ ,  $g$ , e depois calcular  $\int_{-\infty}^{+\infty} wg(w)dw$ . Para acharmos  $g(w)$ , observamos que  $w = 0,003v^2$ . é uma função monótona de  $v$  para  $v \geq 0$ . Poderemos aplicar o teorema anteriormente visto no Cap. 5 para encontrar  $g(w)$ ,

$$g(w) = f(v) \left| \frac{dv}{dw} \right| = \frac{1}{10} \left| \sqrt{\frac{1000}{3}} \frac{1}{2} w^{-1/2} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10}{3}} w^{-1/2}, 0 \leq w \leq 0,3,$$

= 0, para quaisquer outros valores.

Em consequência,

$$E(W) = \int_0^{0,3} wg(w)dw = \int_0^{0,3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10}{3}} w^{1/2} dw = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{10}{3}} \left[ \frac{w^{3/2}}{3/2} \right]_0^{0,3} = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{10} \right)^{-1/2} \left( \frac{3}{10} \right)^{3/2} = \frac{1}{3} \frac{3}{10} = 0,1.$$

## 7.3 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

---

- **Definição:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional e seja  $Z = H(X, Y)$  uma função real de  $(X, Y)$ . Em consequência,  $Z$  será uma variável aleatória (unidimensional) e definiremos  $E(Z)$  como se segue:

- a) Se  $Z$  for uma variável aleatória discreta, com valores possíveis  $z_1, z_2, \dots$  e com  $p(z_i) = P(Z = z_i)$ , então
$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p(z_i);$$
- b) Se  $Z$  for uma variável aleatória contínua com fdp  $f$ , definiremos
$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z) dz.$$

- **Comentário:**

Como no caso unidimensional, o seguinte teorema pode ser demonstrado.

## 7.3 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

---

- **Teorema:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional e façamos  $Z = H(X, Y)$ .

- a) Se  $(X, Y)$  for uma variável aleatória discreta e se

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \dots,$$

teremos

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j).$$

- b) Se  $(X, Y)$  for uma variável aleatória contínua com fdp conjunta  $f$ , teremos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, y) f(x, y) dx dy.$$



## 7.3 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Exemplo:**

Vamos reconsiderar exemplo anterior e achar  $E(V)$ , em que  $V = RI$ . Já vimos que  $R$  e  $I$  eram variáveis aleatórias com as seguintes fdp  $h$  e  $g$ , respectivamente:

$$h(r) = r^2/9, 0 \leq r \leq 3 \text{ e } g(i) = 2i, 0 \leq i \leq 1.$$

Também encontramos que a fdp de  $V$  era  $p(v) = (2/9)v(3-v)$ ,  $0 \leq v \leq 3$ . Visto que  $R$  e  $I$  são variáveis aleatórias independentes, a fdp conjunta de  $(R, I)$  é simplesmente o produto das fdp de  $R$  e  $I$ . Para Calcular  $E(V)$ , empregando o teorema, teremos

$$\begin{aligned} E(V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(r, i) f(r, i) dr di = \int_0^1 \int_0^3 ri \frac{r^2}{9} 2i dr di \\ &= \frac{2}{9} \int_0^3 r^3 dr \int_0^1 i^2 di = \frac{2}{9} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^3 \left[ \frac{i^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{9} \left[ \frac{81}{4} \right] \left[ \frac{1}{3} \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Empregando diretamente a definição, teremos o mesmo resultado.

## 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade:**

Seja  $X = C$ , em que  $C$  é uma constante, então  
 $E(X) = C$ .

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C f(x) dx \\ &= C \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = C. \end{aligned}$$

## 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade II:**

Suponha que  $C$  seja uma constante e  $X$  seja uma variável aleatória. Então,

$$E(CX) = CE(X).$$

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} E(CX) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Cxf(x)dx \\ &= C \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = CE(X). \end{aligned}$$

## 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade III:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional com uma distribuição de probabilidade conjunta  $f$ . Seja  $Z = H_1(X, Y)$  e  $W = H_2(X, Y)$ . Então,  
$$E(Z+W) = E(Z) + E(W).$$

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} E(Z + W) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [H_1(x, y) + H_2(x, y)] f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, y) f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= E(Z) + E(W). \end{aligned}$$

## 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade IV:**

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias quaisquer.  
Então,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

- **Demonstração:**

Decorre diretamente da propriedade anterior, ao se fazer

$$H_1(X, Y) = X$$

e

$$H_2(X, Y) = Y.$$

# 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Comentários:**

- a) Combinando-se as propriedades anteriores, observaremos o seguinte fato importante. Se  $Y = aX + b$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes, então

$$E(Y) = aE(X) + b.$$

Isso equivale a dizer que o valor esperado de uma função linear é a mesma função linear do valor esperado, mas isso **não** será verdadeiro, a menos que se trate de uma função linear. Constitui erro pensar que a propriedade seja válida para outras funções. Por exemplo,  $E(X^2) \neq [E(X)]^2$ .

- b) Em geral, é **difícil** obter expressões para  $E(1/X)$  ou  $E(X^{1/2})$ , em termos de  $1/E(X)$  ou  $[E(X)]^{1/2}$ . Contudo, algumas desigualdades, simples de deduzir, estão disponíveis. Por exemplo, se  $X$  tomar somente valores positivos e tiver expectância finita, então

$$E(1/X) \geq 1/E(X).$$

Sob as mesmas hipóteses, temos

$$E(X^{1/2}) \leq [E(X)]^{1/2}.$$

# 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade V:**

Sejam  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ . Então

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n).$$

- **Demonstração:**

Isto decorre imediatamente da propriedade anterior, pela aplicação da indução matemática.

- **Comentário:**

Combinando-se esta propriedade com a anterior, obteremos

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i),$$

em que os  $a_i$  são constantes.

## 7.4 Propriedades de Valor Esperado

---

- **Propriedade VI:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional e suponha-se que  $X$  e  $Y$  sejam independentes. Então

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyg(x)h(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y) dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$



# 7.5 A Variância de uma Variável Aleatória

---

- Não devemos atribuir a  $E(X)$  **mais** significado do que autorizado, isto é,  $E(X)$  significa apenas que se considerarmos um grande número de determinações de  $X$ , digamos,  $x_1, \dots, x_n$ , e calcularmos sua média, esta média estaria próximo de  $E(X)$ .
- Assim, se temos  $E(X) = 1.000$  horas, como valor esperado de uma variável aleatória  $X$  que representa a duração de uma lâmpada, então tanto podemos ter que
  - a maioria das lâmpadas dure um período compreendido entre 900 e 1.100 horas,
  - a população é compreendida por dois tipos de lâmpadas, aproximadamente a metade delas com duração de 1.300 horas e a outra metade, de 700.
- Medidas de variância serão úteis para **distinguir** as duas situações acima.

# 7.5 A Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Definição:**

Seja  $X$  uma variável aleatória. Definimos a *variância* de  $X$ , denotada por  $V(X)$  ou  $\sigma_X^2$ , da seguinte maneira

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

A raiz quadrada positiva de  $V(X)$  é denominada o *desvio-padrão* de  $X$ , e é denotado por  $\sigma_X$ .

- **Comentários:**

- a) O número  $V(X)$  é expresso por *unidades quadradas* de  $X$ . Este é um bom motivo para considerarmos em seu lugar o desvio-padrão, que será expresso nas *mesmas* unidades;
- b) Outra medida possível é o  $E[|X - E(X)|]$ , mas  $X^2$  é uma função melhor comportada, por exemplo, não apresentando descontinuidade na derivada no ponto zero.

# 7.5 A Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Comentários:**

- c) Se interpretarmos  $E(X)$  como o *centro de gravidade* da unidade de massa distribuída sobre uma reta, poderemos interpretar  $V(X)$  como o *momento de inércia* dessa massa, em relação a um eixo perpendicular que passe pelo centro de gravidade da massa.
- d)  $V(X)$ , tal como definida anteriormente, é um caso especial da seguinte noção mais geral. O  $k$ -ésimo momento da variável aleatória  $X$ , em relação à sua expectância, é definida com sendo

$$\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\}.$$

Para  $k = 2$ , obteremos a variância.

# 7.5 A Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Teorema:**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

- **Demonstração:**

Desenvolvendo  $E(X^2) - [E(X)]^2$  e empregando as propriedades já estabelecidas para o valor esperado, obteremos

$$\begin{aligned} V(X) &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \quad (E(X) \text{ é uma constante}) \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2. \end{aligned}$$

# 7.6 Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Propriedade I:**

Se  $C$  for uma constante, então

$$V(X + C) = V(X).$$

- **Demonstração:**

$$V(Y) = E\{[Y - E(Y)]^2\}$$

$$V(X + C) = E\{[(X + C) - E(X + C)]^2\}$$

$$= E\{[(X + C) - E(X) - E(C)]^2\}$$

$$= E\{[(X + C) - E(X) - C]^2\}$$

$$= E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$= V(X).$$

## 7.6 Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Propriedade II:**

Se  $C$  for uma constante, então

$$V(CX) = C^2V(X).$$

- **Demonstração:**

$$V(Y) = E[Y^2] - [E(Y)]^2$$

$$\begin{aligned} V(CX) &= E[(CX)^2] - [E(CX)]^2 \\ &= C^2E[X^2] - C^2[E(X)]^2 \\ &= C^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} \\ &= C^2V(X). \end{aligned}$$

# 7.6 Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Propriedade III:**

Se  $(X, Y)$  for uma variável aleatória bidimensional, e se  $X$  e  $Y$  forem independentes, então

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- **Demonstração:**

$$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2 \\ &= E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2 \\ &= \{E(X^2) - [E(X)]^2\} + \{E(Y^2) - [E(Y)]^2\} \\ &= V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

## 7.6 Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Propriedade IV:**

Sejam  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n$  variáveis aleatórias independentes. Então

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

- **Demonstração:**

Decorre da propriedade anterior, por indução matemática.



## 7.6 Propriedades da Variância de uma Variável Aleatória

---

- **Propriedade V:**

Seja  $X$  uma variável aleatória com variância finita. Então, para qualquer número real  $\alpha$

$$V(X) = E[(X - \alpha)^2] - [E(X) - \alpha]^2$$

- **Demonstração:**

Exercício 7.36.

# 7.7 Expressões Aproximadas da Expectância e da Variância

---

- **Teorema:**

Seja  $X$  uma variável aleatória com  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ . Suponha  $Y = H(X)$ .  
Então

$$E(Y) \approx H(\mu) + H'(\mu)\sigma^2/2,$$

$$V(Y) \approx [H'(\mu)]^2\sigma^2.$$

- **Demonstração:**

A fim de estabelecer a primeira equação, desenvolveremos a função  $H$  em série de Taylor, próximo de  $x = \mu$ , até dois termos. Deste modo

$$Y = H(\mu) + (X-\mu)H'(\mu) + (X-\mu)^2H''(\mu)/2 + R_1,$$

em que  $R_1$  é o resto. Se abandonarmos o resto e tomarmos o valor esperado de ambos os membros, teremos (lembrando que  $E(X-\mu)=0$ )

$$E(Y) \approx H(\mu) + H'(\mu)\sigma^2/2.$$

A fim de estabelecer a segunda equação, desenvolveremos  $H$  em série de Taylor até um termo, para  $x = \mu$ , abandonamos o resto e tomamos a variância de ambos os membros, tendo

$$V(Y) \approx [H'(\mu)]^2\sigma^2.$$

# 7.7 Expressões Aproximadas da Expectância e da Variância

---

- **Exemplo:**

Sob certas condições, a tensão superficial de um líquido (dina/centímetro) será dada pela fórmula  $S = 2(1 - 0,005T)^{1,2}$ , na qual  $T$  é a temperatura do líquido (em graus centígrados).

Suponha que  $T$  seja uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp

$$\begin{aligned}f(t) &= 3.000t^{-4}, t \geq 10, \\ &= 0, \text{ para quaisquer outros valores.}\end{aligned}$$

Daí,

$$E(T) = \int_{10}^{\infty} 3.000t^{-3}dt = 15 \text{ graus},$$

e

$$V(T) = E(T^2) - (15)^2 = \int_{10}^{\infty} 3.000t^{-2}dt - 225 = 75 \text{ graus}^2.$$

# 7.7 Expressões Aproximadas da Expectância e da Variância

---

- **Exemplo (final):**

Para calcularmos  $E(S)$  e  $V(S)$ , teremos que calcular as seguintes integrais:

$$E(S) = \int_{10}^{\infty} (1-0,005t)^{1,2} t^4 dt \text{ e } V(S) = \int_{10}^{\infty} (1-0,005t)^{2,4} t^4 dt.$$

Em lugar de calcular essas expressões, obteremos aproximações de  $E(S)$  e  $V(S)$ . Para utilizarmos as expressões aproximadas, teremos que calcular  $H'(15)$  e  $H''(15)$ , em que  $H(t) = 2(1-0,005t)^{1,2}$ . Teremos

$$H'(t) = 2,4(1-0,005t)^{0,2}(-0,005) = -0,012(1-0,005t)^{0,2}.$$

Portanto,  $H(15) = 1,82$ ,  $H'(15) = 0,01$ . Semelhantemente,

$$H''(t) = -0,0024(1-0,005t)^{-0,8}(-0,005) = 0,000012(1-0,005t)^{-0,8}.$$

Logo,  $H''(15) = 0,000012(0,925)^{-0,8} = 0^+$ . Portanto, teremos

$$E(S) \approx H(15) + H''(15)75/2 = 1,82 \text{ d/cm},$$

$$V(S) \approx [H'(15)]^2 75 = 0,87 \text{ (d/cm)}^2.$$

# 7.7 Expressões Aproximadas da Expectância e da Variância

---

- **Teorema II:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional. Suponha que  $E(X) = \mu_x$ ,  $E(Y) = \mu_y$ ,  $V(X) = \sigma_x^2$ ,  $V(Y) = \sigma_y^2$ . Seja  $Z = H(X, Y)$  [deve-se admitir que as várias derivadas de  $H$  existam para  $(\mu_x, \mu_y)$ ]. Então, se  $X$  e  $Y$  forem independentes, ter-se-á

$$E(Z) \approx H(\mu_x, \mu_y) + [\sigma_x^2 \times \partial^2 H / \partial x^2 + \sigma_y^2 \times \partial^2 H / \partial y^2] / 2,$$

$$V(Z) \approx [\partial H / \partial x]^2 \sigma_x^2 + [\partial H / \partial y]^2 \sigma_y^2,$$

em que todas as derivadas parciais são calculadas para  $(\mu_x, \mu_y)$ .

- **Demonstração:**

A demonstração envolve o desenvolvimento de  $H$  em série de Taylor, no ponto  $(\mu_x, \mu_y)$ , para um e dois termos, o abandono do resto, e, a seguir, o cálculo da expectância e da variância de ambos os membros, tal como foi feito na demonstração do teorema anterior.

# 7.7 Expressões Aproximadas da Expectância e da Variância

---

- **Exemplo:**

Admita-se que temos um circuito simples, para o qual a tensão  $M$  seja expressa pela Lei de Ohm com  $M = IR$ , em que  $I$  e  $R$  são, respectivamente, a corrente e a resistência do circuito. Se  $I$  e  $R$  forem variáveis aleatórias independentes, então  $M$  será uma variável aleatória, e empregando o teorema, poderemos escrever

$$\begin{aligned} E(M) &\approx H(\mu_x, \mu_y) + [\sigma_x^2 \times \partial^2 H / \partial x^2 + \sigma_y^2 \times \partial^2 H / \partial y^2] / 2 \\ &\approx E(I)E(R) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V(M) &\approx [\partial H / \partial x]^2 \sigma_x^2 + [\partial H / \partial y]^2 \sigma_y^2 \\ &\approx [E(R)]^2 V(I) + [E(I)]^2 V(R). \end{aligned}$$

# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- Veremos como a **média** e o **desvio padrão** de uma variável aleatória nos permitem fazer algumas estimativas sobre probabilidades envolvendo essa variável;

- **Desigualdade de Jensen:**

Seja  $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável e  $f''(x) \geq 0$  (função convexa) em  $(a,b)$ , então, para quaisquer  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , em  $(a,b)$ , então vale:

$$f[(x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n] \leq [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]/n$$

- **Desigualdade de Jensen II:**

Se  $X$  é uma variável aleatória e  $f$  é uma função convexa, então:

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- **Desigualdade de Markov:**

Seja  $X$  uma variável aleatória não negativa. Então vale, para todo  $x > 0$ :

$$P(X \geq x) \leq E[X]/x$$

- **Demonstração:**

Defina a variável aleatória auxiliar,  $Y = x$ , se  $X \geq x$  e  $Y = 0$ , caso contrário, ou seja, se  $X < x$ .

Logo deve ser verdade que  $X \geq Y$  e que  $E[X] \geq E[Y]$ .

Desde que  $Y$  assume apenas os valores 0 e  $x$ , com probabilidades  $P(Y = 0) = P(X < x)$  e  $P(Y = x) = P(X \geq x)$ .

Portanto:

$$\begin{aligned} E[X] \geq E[Y] &= 0 \cdot P(Y = 0) + x \cdot P(Y = x) \\ &= 0 \cdot P(X < x) + x \cdot P(X \geq x) \\ &= x \cdot P(X \geq x) \end{aligned}$$



# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- **Desigualdade de Tchebycheff:**

Seja  $X$  uma variável aleatória, com  $E(X) = \mu$ , e seja  $c$  um número real qualquer. Então, se  $E(X - c)^2$  for finita e  $\varepsilon$  for qualquer número positivo, teremos

$$P[|X - c| \geq \varepsilon] \leq E(X - c)^2 / \varepsilon^2.$$

As seguintes formas *equivalentes* são imediatas

- a) Se considerarmos o evento complementar, obteremos  
 $P[|X - c| < \varepsilon] \geq 1 - E(X - c)^2 / \varepsilon^2.$
- b) Escolhendo  $c = \mu$ , obteremos  
 $P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq V(X) / \varepsilon^2.$
- c) Escolhendo  $c = \mu$  e  $\varepsilon = k\sigma$ , em que  $\sigma^2 = V(X) > 0$ , obteremos  
 $P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq k^{-2}.$

# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- **Demonstração:**

Consideremos

$$P[|X - c| \geq \varepsilon] = \int_{x: |x-c| \geq \varepsilon} f(x) dx.$$

O limite da integral diz que estamos integrando entre  $-\infty$  e  $(c-\varepsilon)$  e entre  $(c+\varepsilon)$  e  $+\infty$ . Ora,  $|x - c| \geq \varepsilon$  é equivalente a  $(x - c)^2/\varepsilon^2 \geq 1$ . Consequentemente, a integral acima é

$$\leq \int_{x: |x-c| \geq \varepsilon} \frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} f(x) dx.$$

Esta integral é, por sua vez,

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-c)^2}{\varepsilon^2} f(x) dx, \text{ que é igual a } \frac{1}{\varepsilon^2} E[X - c]^2,$$

como se queria demonstrar.

- **Observação:**

A forma b) vem da igualdade de Markov, desde que  $(X - \mu)^2$  é uma variável aleatória não negativa.

# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- **Comentários:**

- a) É importante compreender que o resultado acima é *notável*, pois muito pouco é suposto a respeito do comportamento probabilístico da variável aleatória  $X$ .
- b) Como poderíamos suspeitar, informação adicional sobre a distribuição da variável aleatória  $X$  nos permitirá *melhorar* a desigualdade deduzida. Por exemplo, se  $C = 3/2$ , teremos a desigualdade de Tchebycheff

$$P[|X - \mu| \geq 3\sigma/2] \leq 4/9 = 0,44.$$

Entretanto, se soubermos que  $X$  é uniformemente distribuída sobre  $(1 - 1/3^{1/2}, 1 + 1/3^{1/2})$ , teremos que  $E(X) = 1$ ,  $V(X) = 1/9$  e, portanto,

$$\begin{aligned} P[|X - \mu| \geq 3\sigma/2] &= P[|X - 1| \geq 1/2] \\ &= 1 - P[|X - 1| < 1/2] \\ &= 1 - P[1/2 < X < 3/2] = 1 - 3^{1/2}/2 \\ &= 0,134. \end{aligned}$$

# 7.8 A Desigualdade de Tchebycheff

---

- **Teorema:**

Suponha que  $V(X) = 0$ . Então,  $P[X = \mu] = 1$ , em que  $\mu = E(X)$ . Isto é,  $X = \mu$ , com probabilidade 1.

- **Demonstração:**

Da desigualdade de Tchebycheff, encontramos que

$$P[|X - \mu| \geq \varepsilon] = 0, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Por conseguinte,

$$P[|X - \mu| < \varepsilon] = 1, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0.$$

Como  $\varepsilon$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, o teorema fica *demonstrado*.

- **Comentários:**

- a) Este teorema mostra que variância nula implica que toda probabilidade está concentrada em um *único* ponto, a saber, em  $E(X)$ ;
- b) Se  $E(X) = 0$ , então  $V(X) = E(X^2)$ , e por isso, nesse caso,  $E(X^2) = 0$  acarreta a *mesma* conclusão;
- c) É no sentido acima que dizemos uma variável  $X$  é *degenerada*.

# 7.9 O Coeficiente de Correlação

- **Definição:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional. Definiremos  $\rho_{XY}$ , o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ , da seguinte forma

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

- **Comentários:**

- a) Supomos que todas as esperanças matemáticas existam e que ambas  $V(X)$  e  $V(Y)$  sejam não-nulas. Quando houver dúvida quanto às variáveis, simplesmente escreveremos  $\rho$  em vez de  $\rho_{xy}$ ;
- b) O numerador de  $\rho$ ,  $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$ , é denominado **covariância** entre  $X$  e  $Y$ , e algumas vezes é denotado por  $\sigma_{xy}$ ;
- c) O coeficiente de correlação é uma quantidade **adimensional**;
- d) Antes que a definição acima fique realmente expressiva, devemos descobrir exatamente o que  $\rho$  mede. Faremos isso pela consideração de algumas **propriedades** de  $\rho$ .

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Teorema:**

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

- **Demonstração:**

$$\begin{aligned} E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} &= \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Teorema II:**

Se  $X$  e  $Y$  forem independentes, então  $\rho = 0$ .

- **Demonstração:**

Isto decorre imediatamente do teorema anterior, porque

$$E(XY) = E(X)E(Y),$$

se  $X$  e  $Y$  forem independentes.

- **Comentário:**

A recíproca do teorema em geral *não* é verdadeira. Isto é, podemos ter  $\rho = 0$ , e no entanto  $X$  e  $Y$  não precisam ser independentes. Se  $\rho = 0$ , diremos que  $X$  e  $Y$  são *não correlacionadas*. Portanto, ser não correlacionado e ser independente, em geral, não são equivalentes.

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Exemplo:**

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias quaisquer que tenham a mesma distribuição. Sejam

$$U = X - Y \text{ e } V = X + Y.$$

Então,

$$E(U) = 0 \text{ e } \sigma(U, V) = E[(X - Y)(X + Y)] = E(X^2 - Y^2) = 0.$$

Portanto,  $U$  e  $V$  são não correlacionadas.

Ainda que  $X$  e  $Y$  sejam independentes,  $U$  e  $V$  podem ser dependentes, como a seguinte escolha de  $X$  e  $Y$  indica. Sejam  $X$  e  $Y$  os números que aparecem no primeiro e no segundo dados, respectivamente, que tenham sido jogados. Nós agora achamos, por exemplo, que  $P[V = 4 | U = 3] = 0$  (uma vez que  $X - Y = 3$ ,  $X + Y$  não pode ser igual a 4), enquanto  $P(V = 4) = 3/36$ . Portanto,  $U$  e  $V$  são dependentes.



# 7.9 O Coeficiente de Correlação

- **Teorema III:**

Sejam duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , então  $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ . Isto é,  $\rho_{xy}$  toma valores entre  $-1$  e  $+1$ , inclusive.

- **Demonstração:**

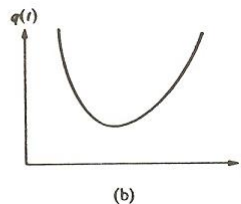
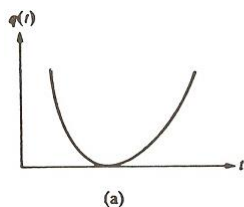
Considere-se a seguinte função da variável real  $t$

$$q(t) = E[V + tW]^2,$$

em que  $V = X - E(X)$  e  $W = Y - E(Y)$ . Visto que  $[V + tW]^2 \geq 0$ , temos que  $q(t) \geq 0$  para todo  $t$ . Desenvolvendo, obteremos

$$q(t) = E[V^2 + 2tVW + t^2W^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2).$$

Deste modo, vemos que  $q(t)$  é uma expressão quadrática de  $t$ . Em geral, se uma expressão quadrática,  $q(t) = at^2 + bt + c$ , tem a propriedade de que  $q(t) \geq 0$  para todo  $t$ , isto então significa que seu gráfico toca o eixo dos  $t$  em apenas um ponto, ou não toca (vide figuras).



## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Demonstração (final):**

Isto por sua vez significa que seu discriminante  $b^2 - 4ac$  deve ser  $\leq 0$ , pois se  $b^2 - 4ac > 0$  significaria que  $q(t)$  teria duas raízes reais distintas. Aplicando-se esta conclusão à função  $q(t)$ , que estávamos considerando acima, obteremos

$$4[E(VW)]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leq 0.$$

Isto acarreta

$$[E(VW)]^2/E(V^2)E(W^2) \leq 1,$$

e daí

$$\{E[X-E(X)][Y-E(Y)]\}^2/E(X)E(Y) = \rho^2 \leq 1.$$

Portanto,  $-1 \leq \rho \leq 1$ , como queríamos demonstrar.

# 7.9 O Coeficiente de Correlação

- **Teorema IV:**

Suponha que  $\rho^2 = 1$ . Portanto (com probabilidade 1, no sentido do teorema anteriormente estudado),  $Y = AX + B$ , em que  $A$  e  $B$  são constantes. Em palavras, se o coeficiente de correlação  $\rho$  for  $\pm 1$ , então  $Y$  será uma função linear de  $X$  (com probabilidade 1).

- **Demonstração:**

Considere-se novamente a função  $q(t)$ , descrita na demonstração do teorema anterior. Daí,  $\rho^2 = 1$  acarreta que deve existir ao menos um valor de  $t$ , digamos  $t_0$ , tal que

$$q(t_0) = E(V + t_0 W)^2 = 0.$$

Uma vez que  $V + t_0 W = [X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)]$ , temos que  $E(V + t_0 W) = 0$  e, portanto, a variância  $(V + t_0 W) = E(V + t_0 W)^2$ .

Assim, encontramos que a hipótese do teorema leva à conclusão de que a variância de  $(V + t_0 W) = 0$ . Consequentemente, de teorema anterior, podemos concluir que a variável aleatória

$$(V + t_0 W) = 0 \text{ (com probabilidade 1).}$$

Logo,  $[X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)] = 0$ . Reescrevendo isto, encontramos que

$$Y = AX + B \text{ (com probabilidade 1),}$$

como queríamos demonstrar.

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Teorema V:**

Suponha que  $X$  e  $Y$  sejam duas variáveis aleatórias, para as quais  $Y = AX + B$ , em que  $A$  e  $B$  são constantes. Então  $\rho^2 = 1$ . Se  $A > 0$ ,  $\rho = +1$ ; se  $A < 0$ ,  $\rho = -1$ .

- **Demonstração:**

Visto que  $Y = AX + B$ , teremos  $E(Y) = AE(X) + B$  e  $V(Y) = A^2V(X)$ . Também,  $E(XY) = E[X(AX + B)] = AE(X^2) + BE(X)$ .

Portanto

$$\begin{aligned}\rho^2 &= [E(XY) - E(X)E(Y)]^2 / V(X)V(Y) \\ &= \{AE(X^2) + BE(X) - E(X)[AE(X) + B]\}^2 / V(X)A^2V(X) \\ &= \{AE(X^2) + BE(X) - A[E(X)]^2 - BE(X)\}^2 / A^2V(X)^2 \\ &= A^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\}^2 / A^2[V(X)]^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Comentário:**

Os dois teoremas anteriores estabelecem a seguinte importante característica do coeficiente de correlação.

O coeficiente de correlação é uma medida do *grau de linearidade* entre X e Y. Valores de  $\rho$  próximos de +1 ou -1 indicam um alto grau de linearidade, enquanto valores de  $\rho$  próximos de 0 indicam falta de tal linearidade.

Valores positivos de  $\rho$  mostram que Y tende a crescer com o crescimento de X, enquanto valores negativos de  $\rho$  mostram que Y tende a decrescer com valores crescentes de X.

Existe muito equívoco sobre a interpretação do coeficiente de correlação. Um valor de  $\rho$  próximo de zero indica apenas ausência de relação *linear* entre X e Y. Ele não elimina a possibilidade de alguma relação *não-linear*.

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

- **Exemplo:**

Suponha-se que a variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$  seja uniformemente distribuída sobre a região triangular  $R$  (veja figura)

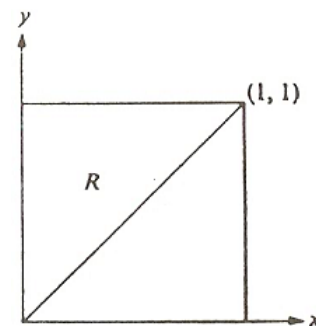
$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 1\}.$$

Consequentemente, a fdp é dada como

$$f(x, y) = 2, (x, y) \in R, \\ = 0, \text{ para outros quaisquer valores.}$$

Por conseguinte, as fdp marginais de  $X$  e  $Y$  são

$$g(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1; \\ h(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$



## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Exemplo:**

Logo

$$E(X) = \int_0^1 x^2(1-x)dx = 1/3; \quad E(Y) = \int_0^1 y^2ydy = 2/3;$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2x^2(1-x)dx = 1/6; \quad E(Y^2) = \int_0^1 y^2y^2dy = 1/2;$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1/18;$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1/18;$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy^2dxdy = 1/4.$$

Portanto,

$$\rho = \{E(XY) - E(X)E(Y)\} / [V(X)V(Y)]^{1/2} = 1/2.$$

## 7.9 O Coeficiente de Correlação

---

- **Teorema VI:**

Se  $\rho_{XY}$  for o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ , e se

$$V = AX + B \text{ e } W = CY + D,$$

em que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes, então

$$\rho_{vw} = (AC/|AC|)\rho_{xy},$$

supondo que  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$ .



# 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Definição:**

- a) Se  $(X, Y)$  for uma variável aleatória *contínua* bidimensional, definiremos o *valor esperado condicionado* de  $X$ , para um dado  $Y = y$ , como sendo

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y) dx.$$

- b) Se  $(X, Y)$  for uma variável aleatória *discreta* bidimensional, definiremos o *valor esperado condicionado* de  $X$ , para um dado  $Y = y_j$ , como sendo

$$E(X|y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i|y_j).$$

# 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Comentários:**

- a) A interpretação do valor esperado condicionado é a seguinte. Desde que  $g(x|y)$  representa a fdp condicionada de  $X$  para um dado  $Y = y$ ,  $E(X|y)$  é o valor esperado de  $X$ , condicionado ao evento  $\{Y = y\}$ .

Por exemplo, se  $(X, Y)$  representar o esforço de tração e a dureza de um espécime de aço, respectivamente, então  $E(X|Y = 52,7)$  será o esforço de tração esperado de um espécime de aço escolhido ao acaso da população com dureza 52,7.

# 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Comentários (final):**

- b) É importante compreender que, em geral,  $E(X|y)$  é uma função de  $y$  e, por isso, é uma *variável aleatória*. Semelhantemente,  $E(Y|x)$  é uma função de  $x$  e, também, é uma variável aleatória [estritamente falando,  $E(X|y)$  é o valor da variável aleatória  $E(X|Y)$ ].
- c) Porque  $E(Y|X)$  e  $E(X|Y)$  são variáveis aleatórias, terá sentido falar de seus valores esperados. Deste modo, poderemos considerar  $E[E(X|Y)]$ , por exemplo.

# 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Teorema:**

$$E[E(X|Y)] = E(X),$$

$$E[E(Y|X)] = E(Y).$$

- **Demonstração (caso contínuo):**

Por definição,

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x|y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x[f(x, y)/h(y)]dx,$$

em que  $f$  é a fdp conjunta de  $(X, Y)$  e  $h$  a fdp marginal de  $Y$ . Por isso

$$\begin{aligned} E[E(X|Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|y)h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x[f(x, y)/h(y)]dx \right] h(y) dy. \end{aligned}$$

Se existirem todos os valores esperados, será permitido trocar a ordem da integração acima. Por isso

$$E[E(X|Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = E(X).$$

# 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo:**

Suponha-se que remessas, contendo um número variável de peças, chegue a cada dia. Se  $N$  for o número de peças da remessa, a distribuição de probabilidade da variável aleatória  $N$ , será dada assim

$n$ :	10	11	12	13	14	15
$P(N = n)$	0,05	0,10	0,10	0,20	0,35	0,20

A probabilidade de que qualquer peça em particular seja defeituosa é a mesma para todas as peças e igual a 0,10. Se  $X$  for o número de peças defeituosas que chegue cada dia, qual será o valor esperado de  $X$ ?

Para um dado  $N$  igual a  $n$ ,  $X$  apresentará distribuição binomial. Como  $N$ , por sua vez, é uma variável aleatória, procederemos com se segue.

## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo (final):**

Temos  $E(X) = E[E(X|N)]$ . Contudo,  $E(X|N) = 0,10N$ , porque para  $N$  dado,  $X$  tem distribuição binomial. Consequentemente,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(0,10N) = 0,10E(N) \\ &= 0,10[10(0,05) + 11(0,10) + 12(0,10) + \\ &\quad 13(0,20) + 14(0,35) + 15(0,20)] \\ &= 1,33. \end{aligned}$$

## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Teorema II:**

Suponha que  $X$  e  $Y$  sejam variáveis aleatórias independentes. Então

$$E(X|Y) = E(X)$$

e

$$E(Y|X) = E(Y).$$

- **Demonstração:**

Deixada como exercício.

## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo:**

Suponha que o fornecimento energético (KW) a uma companhia hidrelétrica, durante um período especificado, seja uma variável aleatória  $X$ , a qual admitiremos ter uma distribuição uniforme sobre  $[10, 30]$ . A demanda de potência é também uma variável aleatória  $Y$ , que admitiremos ser uniformemente distribuída sobre  $[10, 20]$  (note que em média mais potência é fornecida,  $E(X) = 20$ , do que é demandada,  $E(Y) = 15$ ).

Para cada KW fornecido, a companhia realiza um lucro de US\$ 0,03. Se a demanda exceder a oferta, a companhia obterá potência adicional de outra fonte, realizando um lucro de US\$ 0,01 por KW desta potência fornecida. Qual será o lucro esperado, durante o especificado período considerado?



## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo (continuação):**

Seja  $T$  este lucro. Teremos

$$\begin{aligned} T &= 0,03Y, \text{ se } Y < X, \\ &= 0,03 X + 0,01(Y - X), \text{ se } Y > X. \end{aligned}$$

Para calcular  $E(T)$ , o escreveremos como  $E[E(T|X)]$ .

## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo (continuação):**

Teremos

$$\begin{aligned} E(T | x) &= \begin{cases} \int_{10}^x (0,03y) \frac{1}{10} dy + \int_x^{20} [0,02x + 0,01y] \frac{1}{10} dy, & \text{se } 10 < x < 20, \\ \int_{10}^{20} 0,03y \frac{1}{10} dy, & \text{se } 20 < x < 30, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{10} [0,015(x^2 - 100) + 0,02x(20 - x) + 0,005(20^2 - x^2)], & \text{se } 10 < x < 20, \\ \frac{9}{20}, & \text{se } 20 < x < 30, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0,05 + 0,04x - 0,001x^2, & \text{se } 10 < x < 20, \\ 0,45, & \text{se } 20 < x < 30, \end{cases} \end{aligned}$$

## 7.10 Valor Esperado Condicionado

---

- **Exemplo (final):**

Logo, da equação 7.6

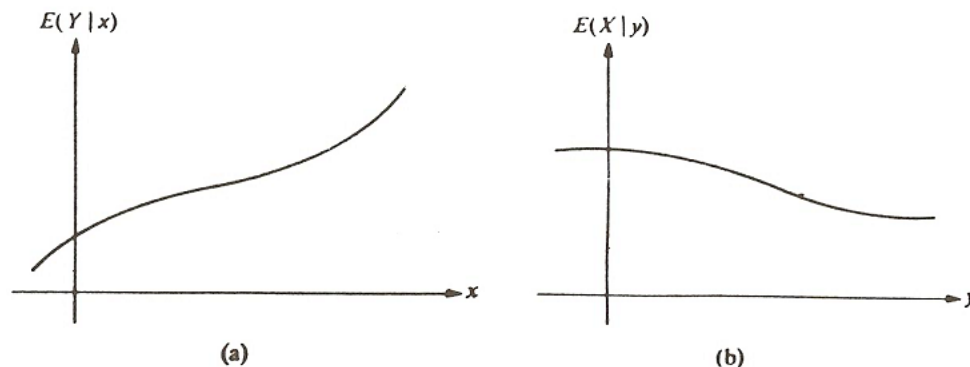
$$E\left[\underbrace{E(T | X)}_{H(X)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)g(x)dx, \text{ com } g(x) = 1/20,$$

temos

$$\begin{aligned} E[E(T | X)] &= \frac{1}{20} \int_{10}^{20} (0,05 + 0,04x - 0,001x^2)dx + \frac{1}{20} \int_{20}^{30} 0,45dx \\ &= \text{US\$ } 0,43. \end{aligned}$$

# 7.11 Regressão da Média

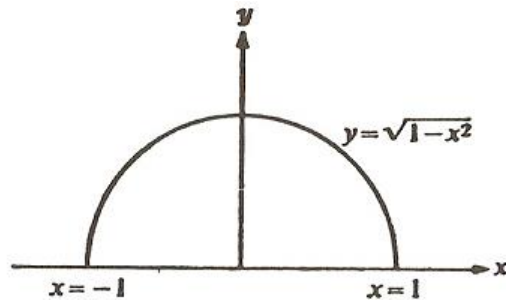
- $E(X|y)$  é o valor da variável aleatória  $E(X|Y)$  e é *uma função de  $y$* ;
- O gráfico desta função de  $y$  é conhecido como a *curva de regressão* (da média) de  $X$  em  $Y$ ;
- Analogamente, o gráfico da função de  $x$ ,  $E(Y|x)$  é denominado a *curva de regressão* (da média) de  $Y$  em  $X$ ;
- Para cada valor fixado  $y$ ,  $E(X|y)$  será o valor esperado da variável aleatória (unidimensional) cuja distribuição de probabilidade é dada por  $p(x_i|y_i)$ , caso discreto, ou  $g(x|y)$ , caso contínuo (ver figura);
- Em geral, este valor esperado dependerá de  $y$ .



# 7.11 Regressão da Média

- Exemplo:**

Suponha que  $(X, Y)$  seja uniformemente distribuída sobre o semicírculo indicado na *figura*. Nesse caso,  $f(x, y) = 2/\pi$ ,  $(x, y) \in$  semicírculo. Portanto



$$g(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$h(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi} dx = \frac{4}{\pi} \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

*Logo*

$$g(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, \quad -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2};$$

$$h(y|x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

# 7.11 Regressão da Média

- **Exemplo (final):**

Em consequência

$$\begin{aligned} E(Y | x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} yh(y | x)dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

*Semelhantemente*

$$\begin{aligned} E(X | y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} xg(x | y)dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} x \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} = 0. \end{aligned}$$

## 7.11 Regressão da Média

- **Exemplo II:**

Suponha que  $(X, Y)$  seja uniformemente distribuída sobre o triângulo indicado na *figura*.

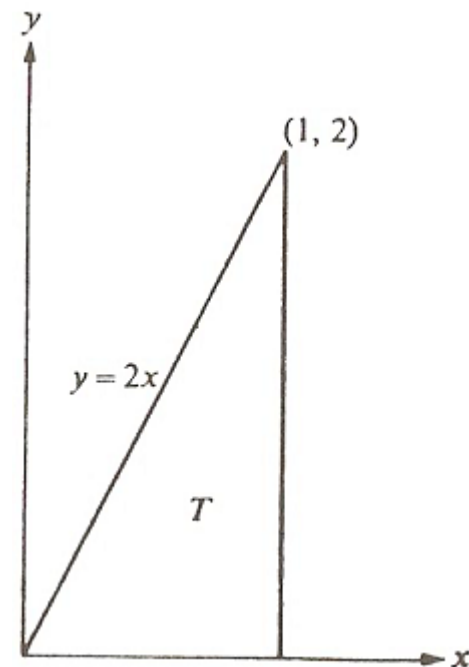
Nesse caso,  $f(x, y) = 1, (x, y) \in T$ . As seguintes expressões para as fdp marginal e condicionada são facilmente *encontradas*

$$g(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$h(y) = (2-y)/2, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$g(x|y) = 2/(2-y), \quad y/2 \leq x \leq 1;$$

$$h(y|x) = 1/(2x), \quad 0 \leq y \leq 2x;$$



## 7.11 Regressão da Média

---

- **Exemplo II :**

Portanto

$$\begin{aligned} E(Y| x) &= \int_0^{2x} y h(y|x) dy = \int_0^{2x} y (1/2x) dy \\ &= x. \end{aligned}$$

Semelhantemente

$$\begin{aligned} E(X| y) &= \int_{y/2}^1 x g(x|y) dx = \int_{y/2}^1 x 2/(2-y) dx \\ &= y/4 + 1/2. \end{aligned}$$

Por conseguinte, ambas as regressões de Y em X e de X em Y são lineares.



## 7.11 Regressão da Média

---

- **Teorema:**

Seja  $(X, Y)$  uma variável aleatória bidimensional e suponha-se que

$$E(X) = \mu_x; E(Y) = \mu_y; V(X) = \sigma_x^2; V(Y) = \sigma_y^2.$$

Seja  $\rho$  o coeficiente de correlação entre  $X$  e  $Y$ . Se a regressão de  $Y$  e  $X$  for linear, teremos

$$E(Y | x) = \mu_y + \rho(\sigma_y/\sigma_x)(x - \mu_x).$$

Se a regressão de  $X$  em  $Y$  for linear, teremos

$$E(X | y) = \mu_x + \rho(\sigma_x/\sigma_y)(y - \mu_y).$$

- **Demonstração:**

(deixada como exercício)

# 7.11 Regressão da Média

---

- **Comentários:**

- a) Como foi sugerido pela exposição acima, é possível que *uma* das regressões da média seja linear, enquanto a outra não o seja;
- b) Observe-se que papel decisivo representado pelo coeficiente de correlação nas expressões acima. *Se* a regressão de X em Y, por exemplo, for linear, e se  $\rho = 0$ , então verificamos que  $E(X|y)$  não depende de  $y$ . Observe-se também que o sinal algébrico de  $\rho$  determina o sinal da declividade da rede de regressão.
- c) Se ambas as funções de regressão forem lineares, verificaremos, pela resolução simultânea das equações anteriores que as retas de regressão se interceptam no “centro” da distribuição,  $(\mu_x, \mu_y)$ .

# 7.11 Regressão da Média

---

- **Observações:**

1. As funções de regressão não precisam ser lineares, mas ainda assim podemos estar interessados em *aproximar* a curva de regressão com uma função linear.

2. A aproximação é feita usualmente recorrendo-se ao *princípio dos mínimos quadrados*, o que neste contexto é assim enunciado

Escolham-se as constantes  $a$  e  $b$  de modo que a esperança abaixo se torne mínima

$$E[E(Y|X) - (aX + b)]^2.$$

Semelhantemente, escolhem-se constantes  $c$  e  $d$ , de modo que a esperança abaixo se torne mínima

$$E[E(X|Y) - (cY + d)]^2.$$

3. As retas  $y = ax + b$  e  $x = cy + d$  são denominadas as *aproximações de mínimos quadrados* às correspondentes curvas de regressão  $E(Y|x)$  e  $E(X|y)$ , respectivamente.

## 7.11 Regressão da Média

---

- **Teorema II:**

Se  $y = ax + b$  for a aproximação de mínimos quadrados a  $E(Y| x)$  e se  $E(Y| x)$  for de fato uma função linear de  $x$ , isto é

$$E(Y| x) = a'x + b',$$

então  $a = a'$  e  $b = b'$ . Enunciado análogo vale para a regressão de  $X$  em  $Y$ .

- **Demonstração:**

(deixada como exercício)