9 Algumas Variáveis Aleatórias Contínuas Importantes

ESQUEMA DO CAPÍTULO

9.1 Introdução

- **Introdução:**

  Em muitos problemas se torna matematicamente mais simples considerar um espaço amostral 'idealizado' para uma variável aleatória X, no qual ***todos*** os números reais possíveis em algum intervalo especificado, ou conjunto de intervalos, possam ser considerados como resultados possíveis.

  Assim, somos levados às variáveis aleatórias contínuas.

9.2 A Distribuição Normal

- **Definição:**

  A variável aleatória X, que tome todos os valores reais $-\infty < x < \infty$, tem uma ***distribuição normal*** (ou gaussiana) se sua fdp for da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

  Os parâmetros μ e σ devem satisfazer às condições $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

  Para referir-se à distribuição normal, utiliza-se usualmente a notação $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Assim, X terá distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ se, e somente se, sua distribuição de probabilidade for dada pela equação acima.

- **Comentário:**

  Não será explicada ainda a razão da grande importância desta distribuição, afirmando-se apenas que ***a distribuição normal serve como uma excelente aproximação para uma ampla classe de distribuições***, que têm enorme importância prática.

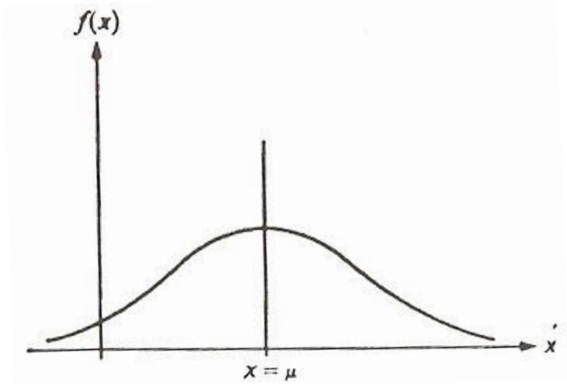
9.3 Propriedades da Distribuição Normal

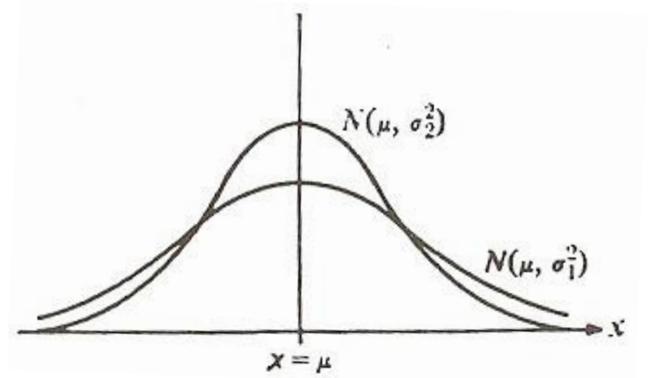
a) É possível mostrar que $f(x)$ é uma fdp ***legítima***, i.e.,

$$f(x) \geq 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

b) O gráfico de $f(x)$ apresenta a bem conhecida forma de ***sino*** (vide figura).

Visto que $f(x)$ depende de x somente através da expressão $(x\text{-}\mu)^2$, torna-se evidente que será simétrica em relação a μ. O parâmetro σ será os pontos de inflexão da curva. Por isso, se σ for 'grande', então o gráfico de $f(x)$ tenderá a ser 'achatado', e se σ for 'pequeno', o gráfico de $f(x)$ tenderá a ser bastante 'pontiagudo' (ver figura).





9.3 Propriedades da Distribuição Normal

c) Em complemento à interpretação geométrica de μ e σ, o seguinte significado ***probabilístico*** importante pode ser atribuído a essas quantidades:

$E(X) = \mu$

e

$V(X) = \sigma^2$.

d) Se X tiver a distribuição N(0,1), diremos que X possui a distribuição ***normal reduzida***. Isto é, a fdp de X pode ser escrita como

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Empregaremos a letra φ exclusivamente para a fdp da variável aleatória X acima. Sua grande importância está no fato de que essa distribuição está ***tabelada***.

9.3 Propriedades da Distribuição Normal

- **Teorema:**

  Se X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, e se $Y = aX + b$, então Y terá a distribuição $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

- **Demonstração:**

  O fato de que $E(Y) = a\mu + b$ e $V(Y) = a^2\sigma^2$ decorre imediatamente das propriedades do valor esperado e da variância, apresentadas no Cap. 7.

  Para mostrar que, de fato, Y terá distribuição normal, podemos aplicar resultados do Cap. 5, já que $aX + b$ será ou uma função decrescente ou uma função crescente de X, dependendo do sinal de a.

9.3 Propriedades da Distribuição Normal

- **Corolário:**

  Se X tiver a distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, e se

  $Y = (X - \mu)/\sigma$,

  então Y terá distribuição N(0, 1).

- **Demonstração:**

  É evidente que Y é uma função linear de X, e, por isso, o teorema anterior se aplica.

  Assim, com $a = 1/\sigma$ e $b = -\mu/\sigma$, tem-se

  $N(a\mu + b, a^2\sigma^2) = N(\mu/\sigma - \mu/\sigma, \sigma^2/\sigma^2) = N(0, 1)$.

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

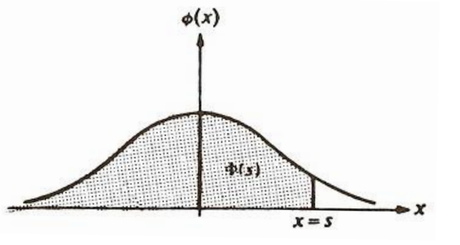
- A tabulação da distribuição normal decorre da ***impossibilidade de calcular analiticamente*** a probabilidade P($a \leq$ X $\leq b$), para uma variável aleatória X que tenha uma distribuição N(0, 1)

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

- Assim, a fd da distribuição normal, denotada por

$$\Phi(s) = P(-\infty \leq X \leq s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2} dx.$$

encontra-se tabelada (vide figura).



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = P(Z \leq z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0 531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 1	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 3	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,826 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 8	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,943 0	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 8	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,970 0	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 2	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 8	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 4	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6
3,0	0,998 7	0,999 0	0,999 3	0,999 5	0,999 7	0,999 8	0,999 8	0,999 9	0,999 9	1,000 0

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- A utilidade da tabulação da normal N(0, 1) é devida ao fato de que, se X tiver ***qualquer*** distribuição normal N(μ, σ^2), a função tabelada Φ pode ser emprega para calcular probabilidades associadas a X.
- De fato, simplesmente empregando o teorema anterior temos que, se X tiver distribuição N(μ, σ^2), então Y = (X - μ)/σ terá distribuição N(0,1). Consequentemente,

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

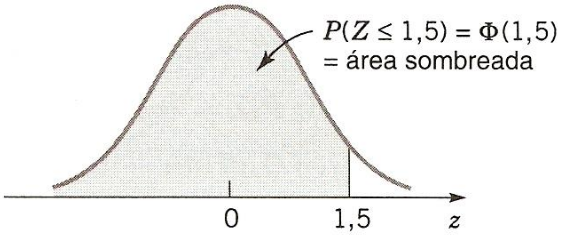
$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo:

Considere que Z seja uma variável aleatória normal padrão. A Tabela II do Apêndice fornece probabilidades da forma $P(Z \leq z)$. O uso da Tabela II para encontrar $P(Z \leq 1{,}5)$ é ilustrado na Fig. 5.13. Leia a coluna z para baixo até encontrar o valor 1,5. A probabilidade de 0,93319 é lida na coluna adjacente, marcada como 0,00.

- Probabilidades cumulativas da variável normal padrão, $\Phi(z)$, são encontradas em tabelas:

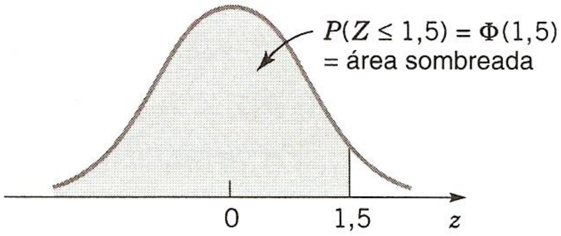


z	0,00	0,01	0,02	0,03
0	0,50000	0,50399	0,50398	0,51197
⋮		⋮		
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo II:

O topo das colunas se refere às casas decimais dos valores de z em $P(Z \leq z)$. Por exemplo, $P(Z \leq 1{,}53)$ é encontrado lendo a coluna de z até o valor de 1,5 e, então, selecionando a coluna marcada como 0,03, encontrando-se assim a probabilidade de 0,93699.



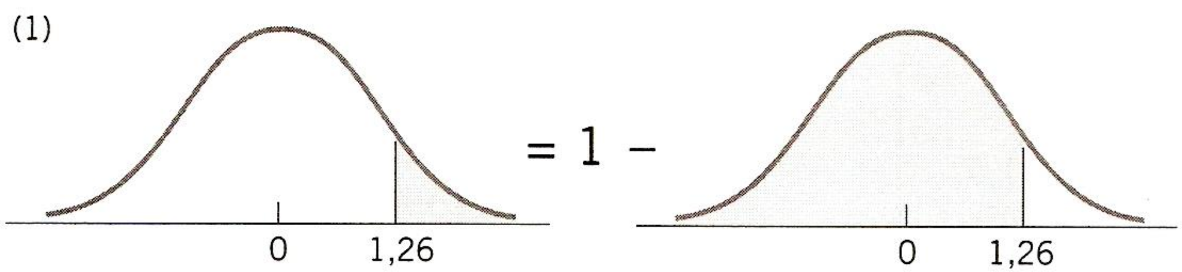
z	0,00	0,01	0,02	0,03
0	0,50000	0,50399	0,50398	0,51197
⋮		⋮		
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (1):

Os seguintes cálculos são mostrados de forma diagramática na Fig. 5.14. Na prática, uma probabilidade é freqüentemente arredondada para um ou dois algarismos significativos.

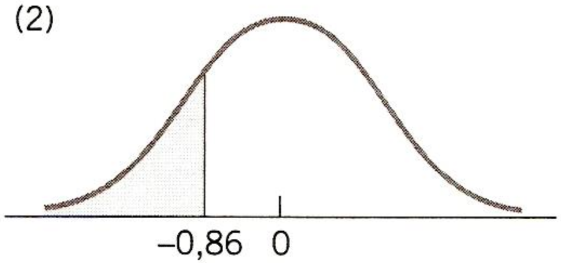
$$\textbf{(1)}\quad P(Z > 1{,}26) = 1 - P(Z \leq 1{,}26) = 1 - 0{,}89616 = 0{,}10384$$



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (2):

(2) $P(Z < -0{,}86) = 0{,}19490.$

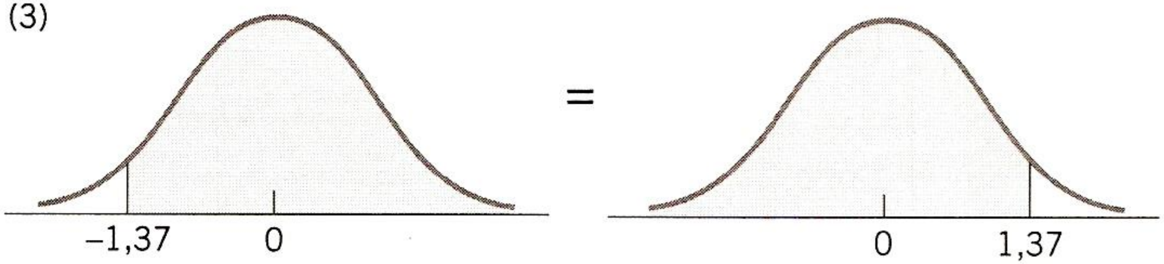


9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (3):

(3) $P(Z > -1{,}37) = P(Z < 1{,}37) = 0{,}91465$

(3)



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (4):

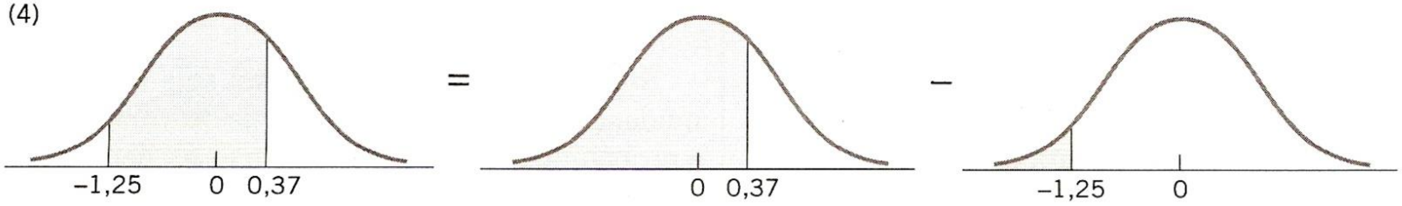
(4) $P(-1{,}25 < Z < 0{,}37)$. Essa probabilidade pode ser encontrada da diferença de duas áreas, $P(Z < 0{,}37) - P(Z < -1{,}25)$. Agora,

$$P(Z < 0{,}37) = 0{,}64431 \quad \text{e}$$
$$P(Z < -1{,}25) = 0{,}10565$$

Por conseguinte,

$$P(-1{,}25 < Z < 0{,}37) = 0{,}64431 - 0{,}10565 = 0{,}53866$$

(4)

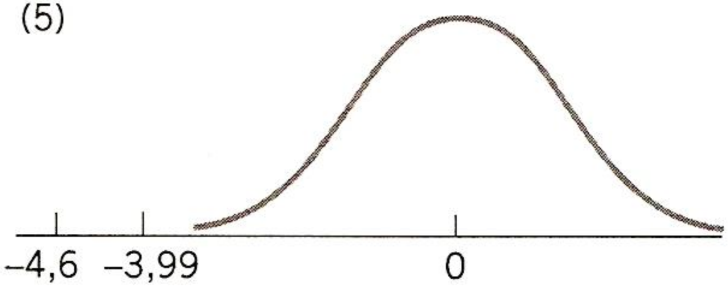


9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (5):

(5) $P(Z \leq -4{,}6)$ não pode ser encontrada exatamente a partir da Tabela II. No entanto, a última entrada na tabela pode ser usada para encontrar que $P(Z \leq -3{,}99) = 0{,}00003$. Pelo fato de $P(Z \leq -4{,}6) < P(Z \leq 3{,}99)$, $P(Z \leq -4{,}6)$ é aproximadamente zero.

(5)

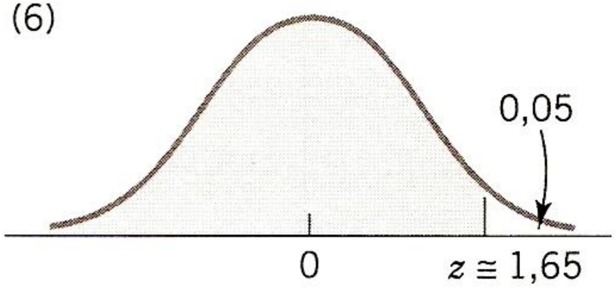


9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (6):

(6) Encontre o valor z tal que $P(Z > z) = 0{,}05$. Essa expressão de probabilidade pode ser escrita como $P(Z \leq z) = 0{,}95$. Agora, a Tabela II é usada ao contrário. Procuramos através das probabilidades até encontrar o valor que corresponda a 0,95. A solução é ilustrada na Fig. 5.14. Não encontramos exatamente 0,95, sendo o valor mais próximo igual a 0,95053, correspondendo a $z = 1{,}65$.

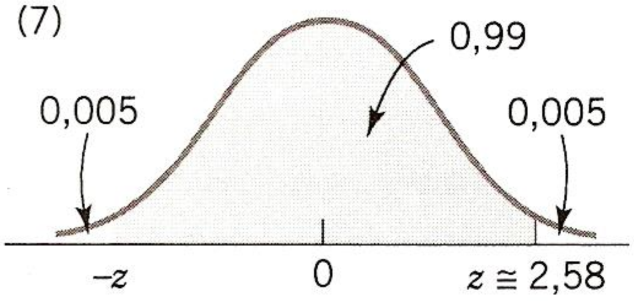
(6)



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Caso (7):

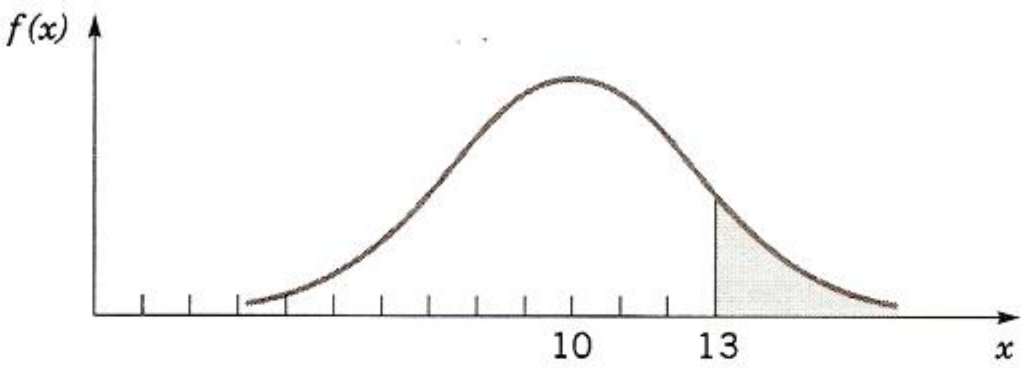
(7) Encontre o valor de z tal que $P(-z < Z < z) = 0{,}99$. Por causa da simetria da distribuição normal, se a área da região sombreada na Fig. 5.14(7) for igual a 0,99, então a área em cada extremidade da distribuição deverá ser igual a 0,005. Logo, o valor de z corresponde a uma probabilidade de 0,995 na Tabela II. A probabilidade mais próxima desse valor na Tabela II é 0,99506, quando $z = 2{,}58$.



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo:

Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal com uma média de 10 miliampères e uma variância de 4 (miliampères)^2. Qual é a probabilidade da medida exceder 13 miliampères?



9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Padronização:

Se X for uma variável aleatória normal com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$, então a variável aleatória

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad (5.10)$$

será uma variável aleatória normal, com $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$. Ou seja, Z é uma variável aleatória normal padrão.

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo:

Suponha que as medidas da corrente em um pedaço de fio sigam a distribuição normal, com uma média de 10 miliampères e uma variância de 4 (miliampères)^2. Qual é a probabilidade da medida exceder 13 miliampères?

Faça X denotar a corrente em miliampères. A probabilidade requerida pode ser representada por $P(X > 13)$. Faça $Z = (X - 10)/2$. A relação entre os vários valores de X e os valores transformados de Z é mostrada na Fig. 5.15. Notamos que $X > 13$ corresponde a $Z > 1{,}5$. Assim, da Tabela II,

$$P(X > 13) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$$
$$= 1 - 0{,}93319 = 0{,}06681$$

Em vez de usar a Fig. 5.15, a probabilidade pode ser encontrada a partir da desigualdade $X > 13$. Isto é,

$$P(X > 13) = P((X - 10)/2 > (13 - 10)/2)$$
$$= P(Z > 1{,}5) = 0{,}06681$$

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo (continuação):

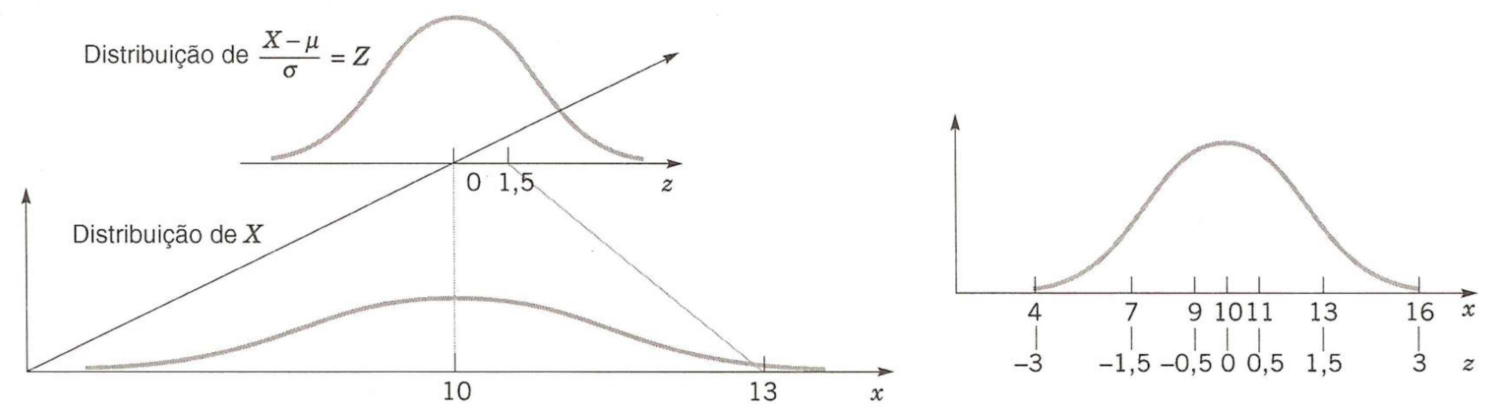


Fig. 4.15 Padronização de uma variável aleatória normal

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo II:

Continuando o exemplo prévio, qual é a probabilidade da medida da corrente estar entre 9 e 11 miliampères? Da Fig. 5.15, ou procedendo algebricamente, temos

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &= P((9-10)/2 < (X-10)/2 < (11-10)/2) \\ &= P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) \\ &= P(Z < 0{,}5) - P(Z < -0{,}5) \\ &= 0{,}69146 - 0{,}30854 \\ &= 0{,}38292 \end{aligned}$$

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo II (continuação):

Determine o valor para o qual a probabilidade de uma medida da corrente estar abaixo desse valor seja 0,98. O valor requerido é mostrado graficamente na Fig. 5.16. O valor de x é tal que $P(X < x) = 0{,}98$. Pela padronização, essa expressão de probabilidade pode ser escrita como

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P((X - 10)/2 < (x - 10)/2) \\ &= P(Z < (x - 10)/2) \\ &= 0{,}98 \end{aligned}$$

A Tabela II é usada para encontrar o valor de z, tal que $P(Z < z) = 0{,}98$. A probabilidade mais próxima da Tabela II resulta em

$$P(Z < 2{,}05) = 0{,}97982$$

Conseqüentemente, $(x - 10)/2 = 2{,}05$ e a transformação padronizada são usadas ao contrário para determinar x. O resultado é

$$x = 2(2{,}05) + 10 = 14{,}1 \text{ miliampères}$$

9.4 Tabulação da Distribuição Normal

- Exemplo II (final):

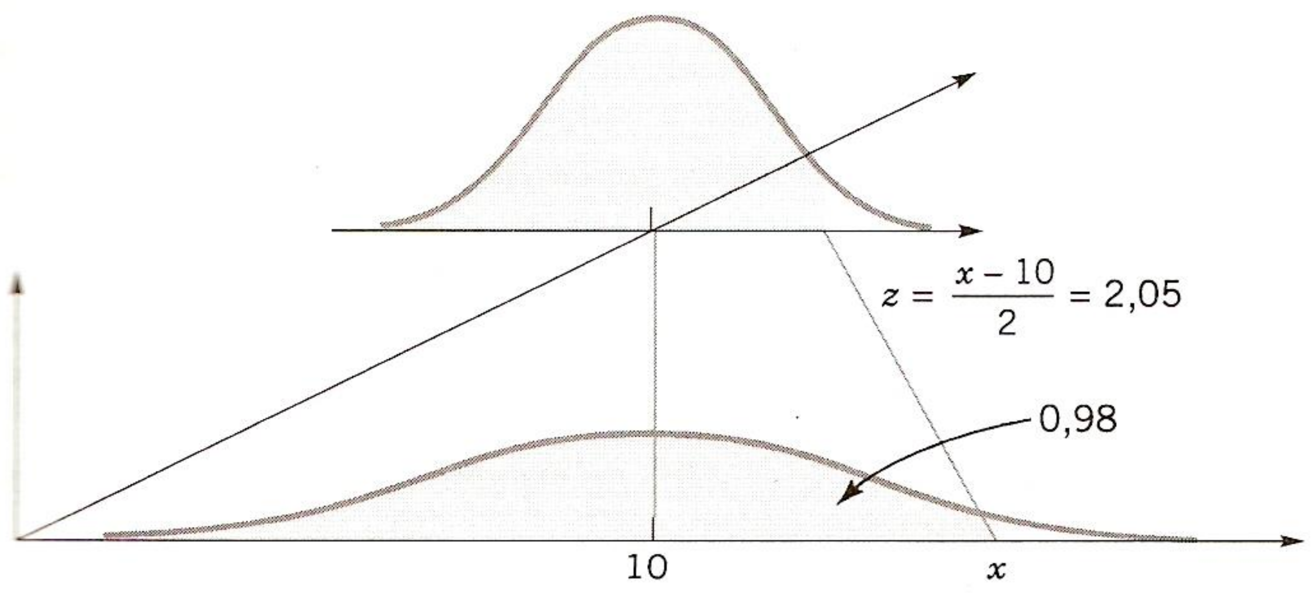


Fig. 4.16 Determinação de um valor *x* para o qual se tenha uma probabilidade especificada

9.5 A Distribuição Exponencial

- **Definição:**

  Uma variável aleatória contínua X, que tome todos os valores não-negativos, terá uma ***distribuição exponencial*** com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp for dada por (ver figura)

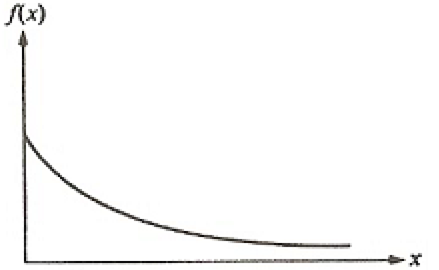
$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x > 0,$$

$$= 0, \text{ para quaisquer outros valores.}$$

Uma integração imediatamente mostra que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = -0 + 1 = 1,$$

e, por isso, representa uma legítima fdp.



9.6 Propriedades da Distribuição Exponencial

a) A fd F da distribuição exponencial é dada por

$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x},\ x > 0.$$

b) O valor esperado de X é obtido assim

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Fazendo-se $\alpha e^{-\alpha x} dx = dv$, $x = u$, obtemos $v = -e^{-\alpha x}$ e $du = dx$. Integrando-se por partes, obtemos

$$E(X) = [-xe^{-\alpha x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

c) A variância de X pode ser obtida por uma integração semelhante. Encontraremos que $E(X^2) = 2/a^2$ e, por isso,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}.$$

9.6 Propriedades da Distribuição Exponencial

d) A distribuição exponencial apresenta a seguinte interessante propriedade, análoga àquela apresentada para a distribuição geométrica (Cap. 8).

Considere-se para quaisquer s, $t > 0$, P(X > s + t | X > s). Teremos

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t}.$$

Portanto,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

Desta maneira, mostramos que a distribuição apresenta também a propriedade de '***não possuir memória***', tal como a distribuição geométrica.

9.7 A Distribuição Gama

- **Definição:**

  A ***função gama***, denotada por Γ, é assim definida

  $$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \text{ definida para } p > 0.$$

  Pode-se demonstrar que essa integral imprópria existe (converge) sempre que $p > 0$.

  É possível mostrar, via integração por partes, que a função gama obedece a uma interessante relação de recorrência. Suponha-se que p seja um inteiro positivo, $p = n$. Então, obteremos

  $$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1). \end{aligned}$$

  Entretanto, como $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, teremos (se n for um inteiro positivo)

  $$\Gamma(n) = (n-1)!$$

9.7 A Distribuição Gama

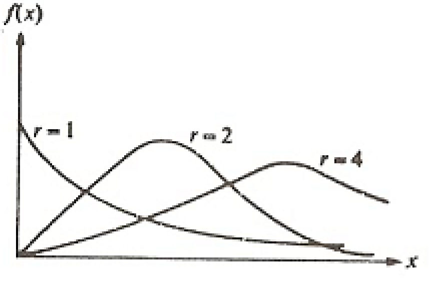
- **Definição:**

  Seja X uma variável aleatória contínua, que tome somente valores não-negativos. Diremos que X tem uma ***distribuição de probabilidade gama***, se sua fdp for dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, \; x > 0,$$

$$= 0, \text{ para quaisquer outros valores.}$$

  Essa distribuição depende de dois parâmetros, r e α, dos quais se exige $r > 0$, $\alpha > 0$. A figura mostra o gráfico da fdp, para vários valores de r e $\alpha = 1$.



9.8 Propriedades da Distribuição Gama

a) Se r = 1, a distribuição gama reduz-se à distribuição exponencial; se r for um inteiro positivo maior que um, a distribuição também estará relacionada com a distribuição exponencial, de forma diferente, como será visto no Cap. 10;

b) Na maioria das aplicação r será um inteiro positivo e nesse caso há uma relação entre a fd da distribuição gama e a distribuição de Poisson

$$F(X) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\alpha x} (\alpha x)^k / k!, \ \ x > 0.$$

Enquanto uma distribuição de Poisson descreve o número de ocorrências de um evento durante um período de tempo fixado, a distribuição gama descreve o tempo necessário para obter um número especificado de ocorrências do evento.

c) Se X tiver uma distribuição gama, teremos

E(X) = r/α, e V(X) = r/α^2.

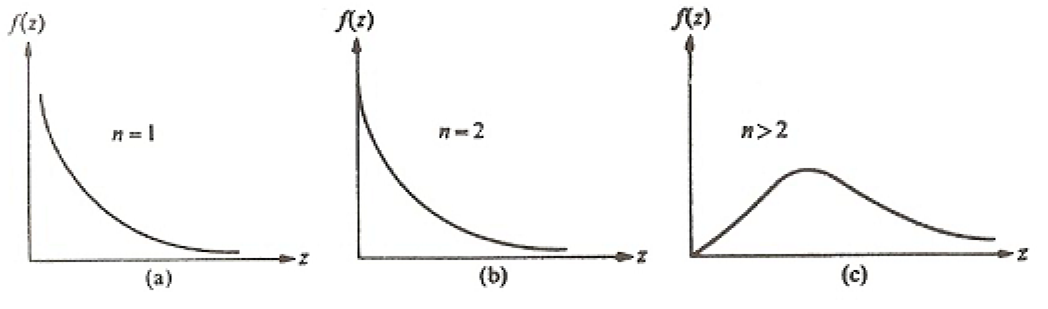
9.9 A Distribuição de Qui-Quadrado

- **Definição:**

  Um caso particular da distribuição gama será obtido se fizermos $\alpha = ½$ e $r = n/2$, em que n é um inteiro positivo, obtendo uma família de distribuições de um parâmetro com fdp

$$f(z) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}, \ \ z > 0.$$

  Um variável aleatória Z, que tenha a fdp acima terá uma distribuição de qui-quadrado, com n graus de liberdade (denotada por χ_n^2). Vide figura para a fdp, com n =1, 2 e n > 2.

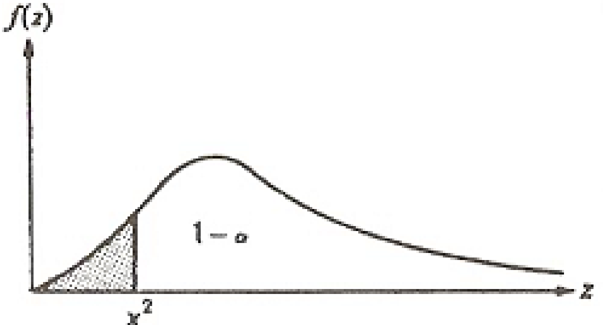


9.9 A Distribuição de Qui-Quadrado

- **Comentários:**
  - A distribuição de qui-quadrado possui inúmeras aplicações importantes.

    Em virtude da sua importância, esta distribuição encontra-se tabulada para diferentes valores do parâmetro *n*.

    Deste modo, poderemos achar na tábua aquele valor denotado por χ_α^2 que satisfaça a $P(Z \leq \chi_\alpha^2) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$ (vide figura).



9.9 A Distribuição de Qui-Quadrado

- **Comentários (final):**
  - A tabulação da distribuição de qui-quadrado normalmente apresenta somente valores para os quais *n*, o número de graus de liberdade, é baixo. A justificativa é que, se *n* for grande, poderemos aproximar a distribuição de qui-quadrado com a distribuição normal, conforme indica o seguinte teorema.
- **Teorema:**

  Suponha-se que a variável aleatória Y tenha distribuição χ_n^2. Então, para *n* suficientemente grande, a variável aleatória $(2Y)^{1/2}$ tem aproximadamente a distribuição $N[(2n-1)^{1/2}, 1]$.

9.9 A Distribuição de Qui-Quadrado

- **Exemplo:**

  Suponhamos que desejamos P(Y ≤ t), em que Y tem distribuição χ_n^2 e n é tão grande que essa probabilidade não possa ser diretamente obtida da tábua da distribuição de qui-quadrado.

  Empregando-se o teorema anterior, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
P(Y \le t) &= P\left(\sqrt{2Y} \le \sqrt{2t}\right) \\
&= P\left(\underbrace{\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1}}_{Z = X - \mu_Z} \le \sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}\right) \\
&\approx \Phi\left(\sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}\right)
\end{aligned}
$$

9.10 Comparações entre Diversas Distribuições

1. **Admita-se que provas independentes de Bernoulli estejam sendo realizadas:**
   a) variável aleatória: número de ocorrências do evento A em um número fixado de provas;
      distribuição: binomial;
   b) variável aleatória: número de provas para obter a primeira ocorrência do evento A;
      distribuição: geométrica;
   c) variável aleatória: número de provas para obter a *r*-ésima ocorrências do evento A;
      distribuição: Pascal (binomial negativa);

9.10 Comparações entre Diversas Distribuições

2. Admita-se um Processo de Poisson:

d) variável aleatória: número de ocorrências do evento A, durante um intervalo de tempo fixado;

distribuição: Poisson;

e) variável aleatória: tempo necessário até a primeira ocorrência do evento A;

distribuição: exponencial;

f) variável aleatória: tempo necessário até a *r*-ésima ocorrência do evento A;

distribuição: gama.

9.11 A Distribuição Normal Bidimensional

- **Definição:**

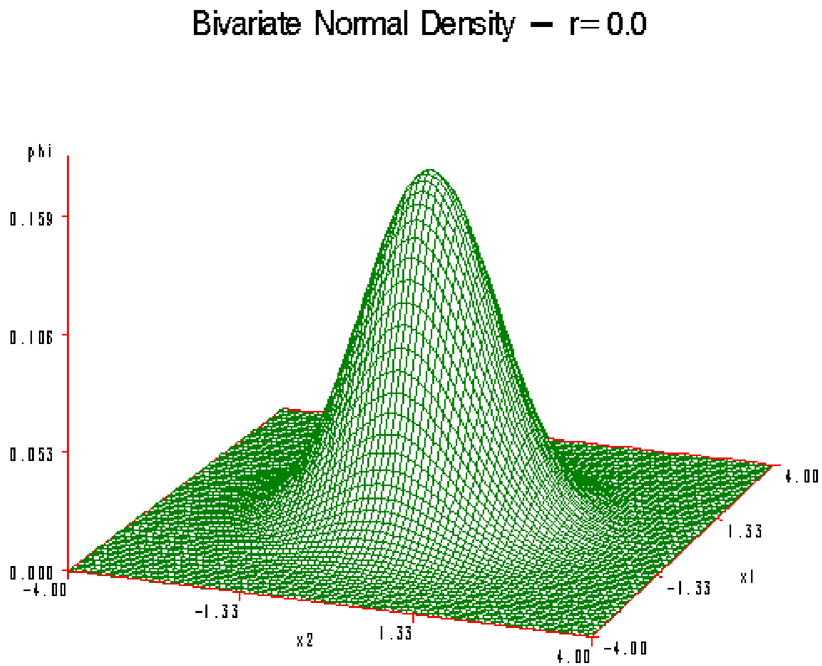
  Seja (X, Y) uma variável aleatória contínua, bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Diremos que (X, Y) tem uma distribuição normal bidimensional se sua fdp conjunta for dada pela seguinte expressão

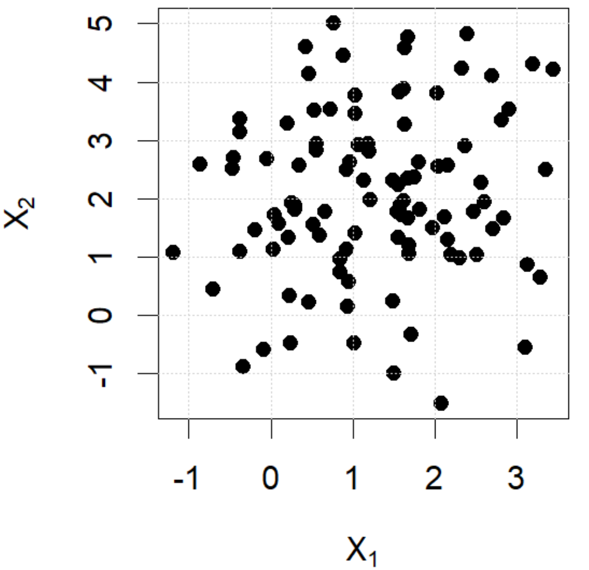
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right)},$$

$$-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty.$$

9.5 A Distribuição Normal Bidimensional

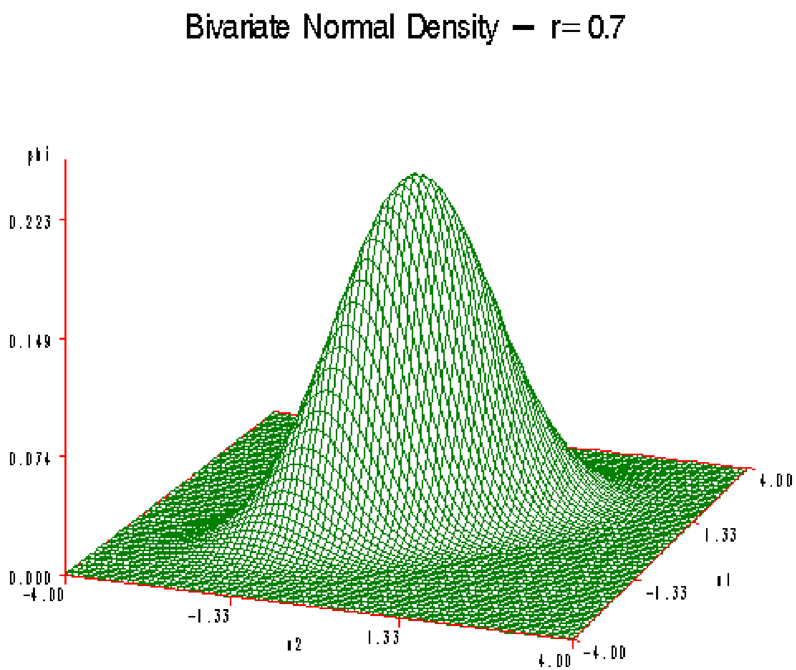
- O primeiro gráfico mostra o caso em que a correlação ρ = 0. Este caso especial é chamado de *distribuição normal circular*. Aqui, temos uma curva em forma de sino perfeitamente simétrica em três dimensões.

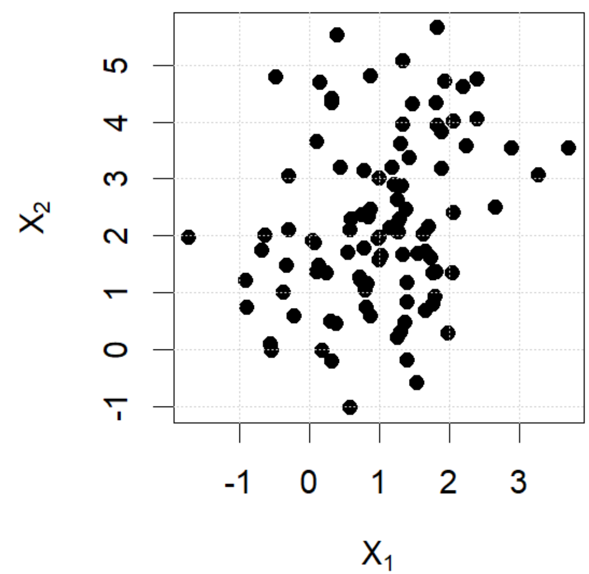




9.5 A Distribuição Normal Bidimensional

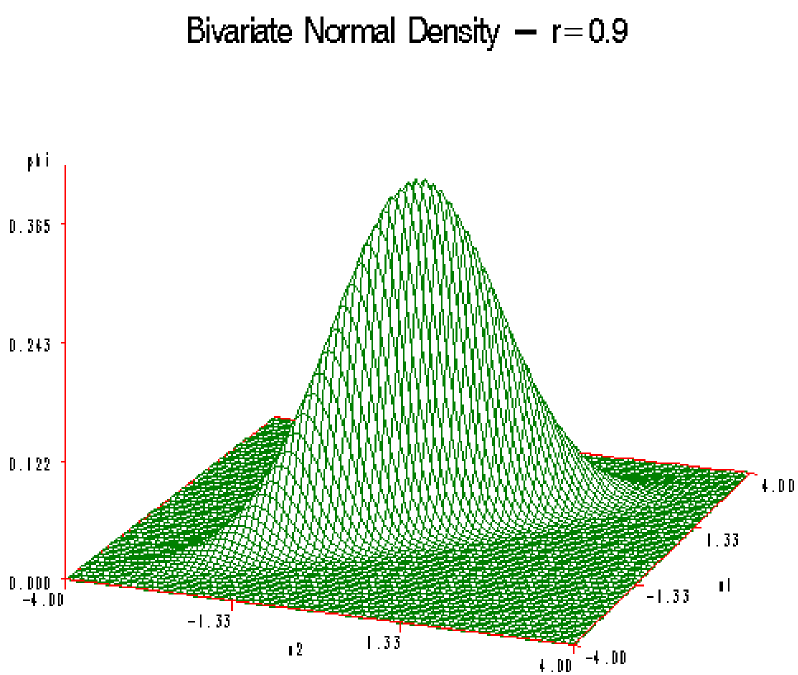
- À medida que ρ aumenta, essa curva em forma de sino torna-se achatada na linha de 45 graus. Então, para ρ = 0,7, podemos ver que a curva se estende em direção a menos 4 e mais 4 e se torna achatada na direção perpendicular.

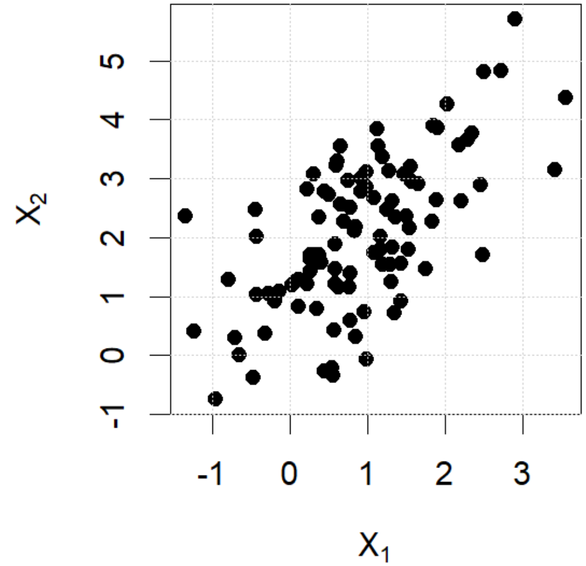




9.5 A Distribuição Normal Bidimensional

- Aumentando para ρ = 0,9, a curva se torna mais larga e a linha de 45 graus fica ainda mais plana na direção perpendicular..





9.11 A Distribuição Normal Bidimensional

- **Teorema:**

  Suponha que (X, Y) tenha fdp como dada anteriormente. Nesse caso:

  a) As distribuições marginais de X e de Y serão $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente.

  b) O parâmetro ρ será o coeficiente de correlação entre X e Y.

  c) As distribuições condicionadas de X (dado Y = y) e de Y (dado X = x) serão, respectivamente:

$$N\left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right), \sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)\right], \; N\left[\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-\mu_x\right), \sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)\right].$$

9.11 A Distribuição Normal Bidimensional

- **Teorema II:**

  Considere-se a superfície $z = f(x, y)$, em que f é a fdp normal bidimensional.

  a) O plano $z = c$ (constante) corta a superfície em uma elipse (denominadas contornos de densidade de probabilidade constante).

  b) Se $\rho = 0$ e $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, essa elipse se transforma em uma circunferência (o que aconteceria à elipse quando $\rho \to \pm 1$?).

- **Demonstração:**

  Deixado com exercício.

9.12 Distribuições Truncadas

- **Definição:**

  Diremos que uma variável aleatória X tem uma distribuição normal truncada à direita de X = τ, se sua fdp for da forma

$$f(x) = 0, \text{ se } x > \tau,$$

$$= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)}, \text{ se } x \leq \tau.$$

  Observamos que K é determinado pela condição $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Consequentemente,

$$K = \frac{1}{\Phi[(\tau-\mu)/\sigma]} = \frac{1}{P(Z \leq \tau)}.$$

9.12 Distribuições Truncadas

- **Comentário:**

  Os conceitos acima, introduzidos para a distribuição normal, podem ser estendidos de forma óbvia para outras distribuições.