


ESTIMAÇÃO ESTATÍSTICA DA INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS MARKOVIANAS COM UM ÚNICO SERVIDOR

STATISTICAL ESTIMATION OF TRAFFIC INTENSITY IN SINGLE-SERVER MARKOVIAN QUEUES

Eriky S. Gomes¹ Frederico R. B. Cruz² 

Resumo: Um dos sistemas de filas mais simples conhecidos na teoria de filas são as filas markovianas com único servidor, ou seja, filas com chegadas segundo um processo de Poisson e tempos de serviço exponencialmente distribuídos, ou, na notação de Kendal, filas $M/M/1$. Apesar da sua simplicidade, as filas $M/M/1$ possuem importantes aplicações práticas. Assim elas são o foco desse artigo e são estudadas no aspecto de estimação estatística da sua intensidade de tráfego, que corresponde à fração do tempo que tais filas estão ocupadas. Importante por si só, a intensidade de tráfego permite ainda a dedução de outras medidas de desempenho importantes nos sistemas de filas, tais como o tamanho médio da fila ou o número esperado de usuários no sistema. Nesse estudo, a estimativa é feita baseada na observação do número de chegadas de clientes durante o tempo de atendimento de um cliente, uma forma bastante natural e prática de coleta de dados. É apresentada uma metodologia bayesiana para estimar o parâmetro de interesse, que é comparada com o clássico estimador de máxima verossimilhança (EMV). A abordagem proposta é analisada por meio de simulações Monte Carlo, para atestar sua eficiência, em que é demonstrado que o EMV apresenta uma maior variância, embora possa apresentar um menor vício, em amostras de tamanho pequeno ($n < 50$).

Palavras-chave: Filas markovianas. Estimador de máxima verossimilhança. Estimação bayesiana. Simulação.

¹Graduando em Engenharia Civil, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), eriky-tn@ufmg.br.

²Doutor, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), fcruz@ufmg.br.

Abstract: One of the simplest queueing systems in Queueing Theory are the single-server Markovian queues, that is, queues with Poisson arrivals and exponentially distributed service times, or, in Kendal notation, $M/M/1$ queues. Despite their simplicity, the $M/M/1$ queues have important practical applications. Thus, they are the focus of this article and are studied in the aspect of statistical estimation of their traffic intensity, which corresponds to the fraction of time that such queues are busy. Important in itself, the intensity of traffic also allows the deduction of other important performance measures in the queueing systems, such as the average queue length or the expected number of users in the system. In this study, the estimate is made based on the observation of the number of customer arrivals during a customer's service time, a very natural and practical way of collecting data. A Bayesian methodology is presented to estimate the parameter of interest, which is compared with the classic maximum likelihood estimator (MLE). The proposed approach is analyzed by means of Monte Carlo simulations, to attest its efficiency, in which it is demonstrated that the MLE presents the highest variance, although it may present the smallest bias, in samples of small size ($n < 50$).

Keywords: Markovian queues. Maximum likelihood estimator. Bayesian estimation. Simulation.

1 INTRODUÇÃO

Clientes fazendo compras em um supermercado ou pacientes esperando por um transplante de coração são situações da vida real que envolvem a chegada de usuários que precisam esperar para ser atendidos. Tais sistemas são tratados pela teoria de filas e um dos sistemas de filas mais simples existentes são as filas markovianas de servidor único, isto é, em que as chegadas seguem um processo de Poisson, com uma taxa λ , e os tempos de serviço são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição exponencial, com taxa de serviço μ . De acordo com a notação devida a Kendall, denotamos esse sistema de filas como $M/M/1$ e um problema importante que atrai muitos pesquisadores é o da estimativa estatística dos seus parâmetros, devido às possíveis aplicações práticas de tais sistemas.

A inferência para sistemas de filas foi desenvolvida recentemente, embora a teoria de filas tenha uma história mais antiga. Começou com o trabalho pioneiro de Clarke (1957), que desenvolveu o método clássico de estimativa pela máxima verossimilhança para estimar λ e μ em uma fila $M/M/1$ estacionária e estável, ou seja, para a intensidade de tráfego $\rho < 1$, em que $\rho = \lambda/\mu$. Somente um pouco mais tarde, no início dos anos 1970, a abordagem bayesiana foi introduzida para sistemas markovianos, nos trabalhos de Bagchi e Cunningham (1972), Muddapur (1972) e Reynolds (1973). Desde então, resultados significativos de pesquisa vêm sendo publicados nessa área, dentre os quais cabe citar a série de artigos de Armero (1985, 1994), de Armero e Bayarri (1994, 1997, 1999, 2001), de Armero e Conesa (1998, 2000, 2004, 2006), e, mais recentemente, os trabalhos de Srinivas, Rao e Kale (2011), Chowdhury e Mukherjee (2013), Cruz, Quinino e Ho (2017), Basak e Choudhury (2021), de Singh e Acharya (2019, 2021) e de Singh et al. (2021), entre outros.

São estudados neste artigo métodos de estimação estatística de um importante parâmetro dos sistemas de filas $M/M/1$, a intensidade de tráfego ρ , baseados em um esquema amostral resultante da observação do número de chegadas de clientes durante o tempo de serviço de um cliente, uma forma bastante prática e eficiente de obtenção de amostras. Foca-se principalmente no método de estimativa bayesiano.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 descreve matematicamente o sistema de filas $M/M/1$. Apresenta também o estimador de máxima verossimilhança para ρ e descreve o método bayesiano de estimativa. Para este propósito, usa-se a distribuição beta como distribuição a priori para ρ e o estimador bayesiano é deduzido para uma função de perda simétrica (ou SELF, do inglês *squared error loss function*), um das mais comumente empregadas. Um estudo de simulação é desenvolvido, para atestar a eficiência e a eficácia do estimador bayesiano, que é apresentado na Seção 3. Finalmente, a Seção 4 apresenta

as conclusões e observações finais.

2 METODOLOGIA

2.1 Estimação Clássica

Considere o modelo de filas markovianas de servidor único, ou seja, o modelo de filas $M/M/1$, na notação de Kendall. Nesse modelo, o número de chegadas segue uma distribuição de Poisson e os tempos de atendimento seguem uma distribuição exponencial, o que resulta nas seguintes funções densidade de probabilidade para os tempos entre chegadas e para os tempos de serviço, respectivamente,

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ e \\ b(t) = \mu e^{-\mu t}, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são as taxas médias de chegadas e de serviço, respectivamente.

Na análise da cadeia de Markov associada ao modelo de filas $M/G/1$, sejam $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, *iid*, em que X_i denotam o número de chegadas durante o tempo de serviço de i -ésimo cliente. Para a fila $M/M/1$, a distribuição de probabilidade da variável aleatória X é uma distribuição geométrica, com função massa de probabilidade dada por:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\rho = \lambda/\mu > 0$ é a intensidade de tráfego.

Seja $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma amostra aleatória *iid*, de tamanho n , da função massa de probabilidade dada pela Equação (2). Então, a função de verossimilhança baseada na amostra \mathbf{x} é dada por

$$L(\rho, \mathbf{x}) = \rho^y (1 + \rho)^{-(n+y)}, \quad (3)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$.

Da Equação (3), pode-se escrever o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para ρ ,

$$\hat{\rho}_{MLE} = \arg \max_{\rho} L(\rho, \mathbf{x}) = \frac{y}{n}. \quad (4)$$

2.2 Estimação Bayesiana

As distribuições a priori são escolhidos geralmente de forma que seu intervalo de definição corresponda ao espaço paramétrico. Como o parâmetro de interesse ρ , em condição estacionária e estável, está entre 0 a 1, uma distribuição beta é uma boa escolha como distribuição a priori. A função densidade de probabilidade beta é dada pela expressão

$$p_1(\rho | \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (5)$$

em que $B(\alpha, \beta)$ é a função beta, uma constante de normalização que assegura que a função densidade de probabilidade integra 1 no espaço paramétrico, e é definida por

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} d\rho \quad (6)$$

em que $\alpha, \beta > 0$ são os denominados hiperparâmetros.

A distribuição a posteriori para ρ para a priori $p_1(\rho | \alpha, \beta)$, Equação (5), e dada pela expressão

$$\begin{aligned} q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) &= \frac{L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta)}{\int_0^1 L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta) d\rho} \\ &= \frac{\rho^{y+\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} (1 + \rho)^{-(n+y)}}{B(y + \alpha, \beta) {}_2F_1(n + y, y + \alpha, y + \alpha + \beta, -1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$, n é o tamanho da amostra e ${}_2F_1(a, b, c, z)$ é a função gaussiana hipergeométrica, dada pela seguinte forma integral (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{1}{B(b, c - b)} \int_0^1 u^{b-1} (1 - u)^{c-b-1} (1 - zu)^{-a} du, \quad (8)$$

em que $z, c > b > 0$.

Dessa forma, mostra-se que o estimador bayesiano para ρ , sob uma função de perda quadrática (SELF, de *squared error loss function*), denotado por $\hat{\rho}_{SELF}^B$, para uma dada amostra

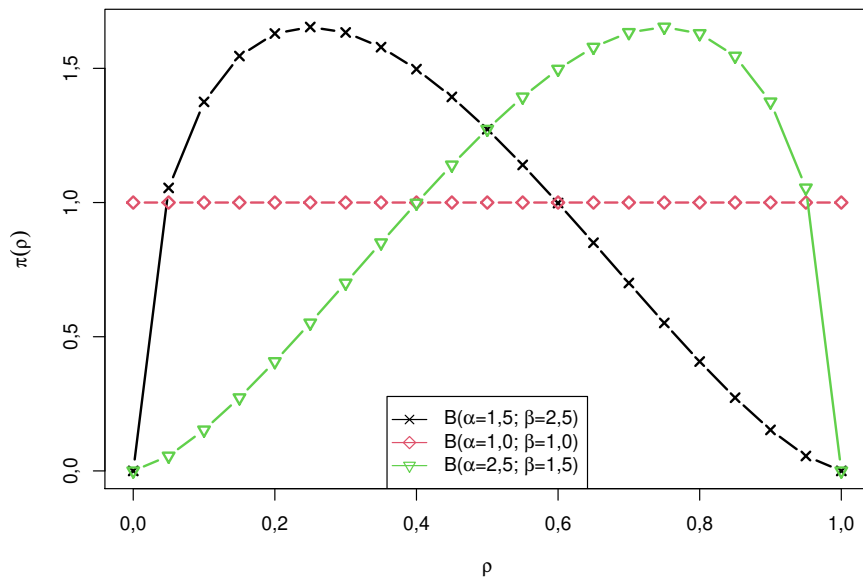
\mathbf{x} , é dado pela esperança a posteriori de ρ (SINGH et al., 2021b), ou seja:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{SELF}}^{\text{B}} &= E(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) = \int_0^1 \rho q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) d\rho \\ &= \frac{\int_0^1 \rho^{(y+\alpha+1)-1} (1-\rho)^{\beta-1} (1+\rho)^{-(n+y)} d\rho}{B(y+\alpha, \beta) {}_2F_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)} \\ &= \frac{(y+\alpha)}{(y+\alpha+\beta)} \frac{{}_2F_1(n+y, y+\alpha+1, y+\alpha+\beta+1, -1)}{{}_2F_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para verificar a eficácia e eficiência do método de estimação bayesiano aqui apresentado, foram desenvolvidos programas em R (R CORE TEAM, 2020), disponíveis a pedido mediante solicitação aos autores. Todos os experimentos foram executados em um PC com um processador Intel(R) Core(TM) i7-2640M @ 2,80 GHz e 6 GB de RAM executando Microsoft Windows(C) 7 Professional.

Figura 1: Distribuição a priori beta.



Fonte: Os autores.

Primeiramente, os resultados computacionais são apresentados a partir de simulações de Monte Carlo que comparam o estimador de máxima verossimilhança, Equação (4), e o

estimador bayesiano, Equação (9), para a intensidade de tráfego, ρ , para 1.000 replicações. Números maiores de replicações foram experimentados, mas o resultados (não apresentados) não mudaram significativamente. Os hiperparâmetros usados foram $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$, para uma distribuição a priori não informativa, conforme pode ser visto na Figura 1, para evitar, em um primeiro momento, uma influência mais forte de algum conhecimento a priori que o analista possa ter.

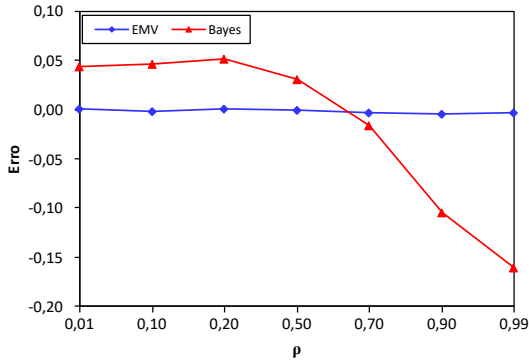
Tabela 1: Estimativas médias para ρ e suas variâncias (entre parênteses).

Estimador	ρ	n				
		10	20	50	100	200
EMV	0,0100	0,0094 (0,0009)	0,0099 (0,0005)	0,0106 (0,0002)	0,0105 (0,0001)	0,0104 (0,0001)
	0,1000	0,0962 (0,0104)	0,0977 (0,0057)	0,0998 (0,0023)	0,0994 (0,0012)	0,0994 (0,0006)
	0,2000	0,1972 (0,0226)	0,2001 (0,0118)	0,2021 (0,0048)	0,2007 (0,0025)	0,2004 (0,0012)
	0,5000	0,4951 (0,0682)	0,5004 (0,0372)	0,5016 (0,0149)	0,4996 (0,0077)	0,5003 (0,0036)
	0,7000	0,6889 (0,1094)	0,6963 (0,0585)	0,6999 (0,0235)	0,6993 (0,0125)	0,7006 (0,0058)
	0,9000	0,8819 (0,1603)	0,8951 (0,0849)	0,9015 (0,0334)	0,9004 (0,0181)	0,9012 (0,0083)
	0,9900	0,9756 (0,1878)	0,9871 (0,0959)	0,9920 (0,0389)	0,9908 (0,0206)	0,9912 (0,0097)
Bayes	0,0100	0,1337 (0,0012)	0,0665 (0,0006)	0,0319 (0,0002)	0,0209 (0,0001)	0,0155 (0,0001)
	0,1000	0,2285 (0,0109)	0,1635 (0,0068)	0,1248 (0,0025)	0,1116 (0,0012)	0,1055 (0,0006)
	0,2000	0,3261 (0,0181)	0,2740 (0,0132)	0,2313 (0,0052)	0,2149 (0,0026)	0,2074 (0,0012)
	0,5000	0,5380 (0,0231)	0,5455 (0,0213)	0,5361 (0,0136)	0,5196 (0,0079)	0,5104 (0,0037)
	0,7000	0,6278 (0,0206)	0,6661 (0,0180)	0,7013 (0,0122)	0,7099 (0,0094)	0,7108 (0,0054)
	0,9000	0,6927 (0,0171)	0,7502 (0,0128)	0,8137 (0,0069)	0,8455 (0,0054)	0,8721 (0,0031)
	0,9900	0,7182 (0,0154)	0,7805 (0,0101)	0,8476 (0,0048)	0,8840 (0,0034)	0,9148 (0,0016)

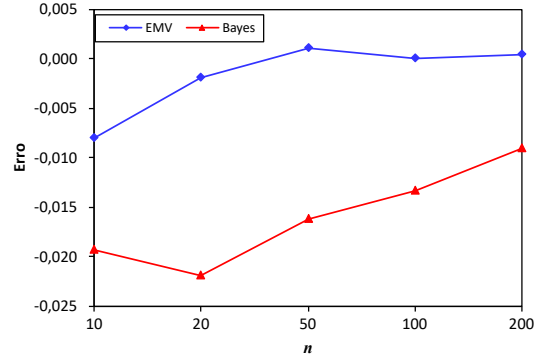
Fonte: Os autores.

A Tabela 1 apresenta os resultados em termos das médias das estimativas e das variâncias. As médias estimadas estão próximas dos parâmetros reais (que são desconhecidos na prática) e as variâncias são pequenas, como é desejável. Mesmo para tamanhos de amostra relativamente pequenos ($n \leq 20$), ambos os estimadores produziram estimativas de muito boa qualidade, em termos de baixo erro e de baixa variância. Naturalmente, as estimativas melhoram conforme o tamanho da amostra aumenta, e os resultados são muito bons para tamanhos de amostra moderados ($n \geq 100$).

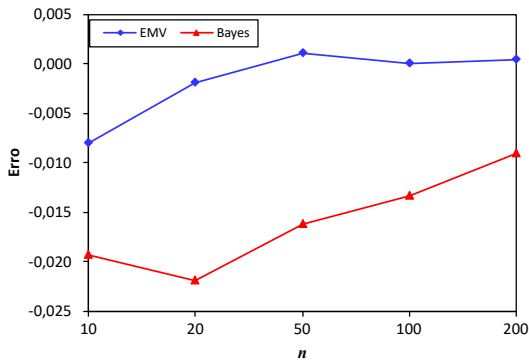
Figura 2: Desempenho dos estimadores para ρ .



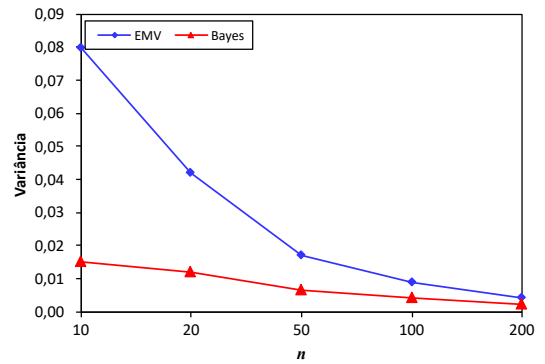
(a) Erro médio em função de ρ



(b) Variância média em função de ρ



(c) Erro médio em função de n



(d) Variância média em função de n

Fonte: Os autores.

Os resultados da Tabela 1 estão resumidos na Figura 2 que mostra os erros médios e as médias das variâncias, em função dos valores de ρ e dos tamanhos de amostra n . Desse resumo, pode-se concluir que as estimativas via máxima verossimilhança apresentam os menores erros, veja a Figura 2-(a). Entretanto, tomando-se como referência os valores da variância, as estimativas bayesianas são as que produzem os melhores resultados, para $\rho > 0,2$, aproximadamente. Finalmente, olhando-se o comportamento dos erros e das variâncias como funções do tamanho da amostra, n , Figura 2-(c) e -(d), confirma-se o decaimento desses valores com o crescimento do n , conforme é desejável.

4 CONCLUSÕES

Embora as filas sejam modelos probabilísticos, podem-se encontrar muitas pesquisas sobre a inferência estatística de seus parâmetros, o que pode auxiliar na sua aplicação

como modelos aproximados de muitas situações práticas da vida real. Foi tratado nesse artigo o problema de estimação da intensidade de tráfego de filas markovianas de servidor único, com um esquema amostral ainda não muito explorado na literatura, qual seja, uma amostra aleatória, ou *iid*, composta pelo número de chegadas durante cada atendimento. Um conjunto de simulações Monte Carlo atestou a eficácia e a eficiência do estimador de máxima verossimilhança, em termos de erros de estimação, mas com um desempenho superior do estimador bayesiano, em termos da variabilidade das estimativas, em situações com intensidade de tráfego $\rho > 0,2$, aproximadamente. Duas alternativas complementares, portanto, foram apresentadas para a estimação da intensidade de tráfego em filas markovianas de servidor único.

Estudos futuros nesta área incluem a investigação de outros esquemas amostrais, aplicados às filas markovianas ou a outros tipos de filas, incluindo filas mais gerais, com vários servidores, capacidade finita, filas com chegadas em massa e outros tipos de generalizações não markovianas. Esses são apenas alguns dos tópicos potenciais para estudos futuros nesta área de pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG (*Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais*, processo CEX-PPM-00564-17) e ao CNPq (*Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*, processo 305515/2018-7) pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York, NY: Dover, 1964. 5

ARMERO, C. Bayesian analysis of $M/M/1/\infty$ /FIFO queues. *Bayesian Statistics*, v. 2, p. 613–618, 1985. 3

ARMERO, C. Bayesian inference in Markovian queues. *Queueing Systems*, v. 15, p. 419–426, 1994. 3

ARMERO, C.; BAYARRI, M. J. Bayesian prediction in $M/M/1$ queues. *Queueing System*, v. 15, p. 401–417, 1994. 3

ARMERO, C.; BAYARRI, M. J. A Bayesian analysis of a queueing system with unlimited service. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 58, n. 2, p. 241–261, 1997. 3

ARMERO, C.; BAYARRI, M. J. Dealing with uncertainties in queues and networks of queues: A Bayesian approach. In: GHOSH, S. (Ed.). *Multivariate analysis, design of experiments and survey sampling*. Marcel Dekker, New York, NY: Springer Science+Business Media, 1999. p. 579–608. 3

ARMERO, C.; BAYARRI, M. J. Queues. In: SMELSER, N. J.; BALTES, P. B. (Ed.). *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*. Oxford: Pergamon, 2001. p. 12676–12680. 3

ARMERO, C.; CONESA, D. Inference and prediction in bulk arrival queues and queues with service in stages. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, Wiley Online Library, v. 14, n. 1, p. 35–46, 1998. 3

ARMERO, C.; CONESA, D. Prediction in Markovian bulk arrival queues. *Queueing Systems*, v. 34, n. 1, p. 327–350, 2000. 3

ARMERO, C.; CONESA, D. Statistical performance of a multiclass bulk production queueing system. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 158, n. 3, p. 649–661, 2004. 3

ARMERO, C.; CONESA, D. Bayesian hierarchical models in manufacturing bulk service queues. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Elsevier, v. 136, n. 2, p. 335–354, 2006. 3

BAGCHI, T. P.; CUNNINGHAM, A. A. Bayesian approach to the design of queueing systems. *INFORMS*, UNESCO, Oxford, UK, v. 10, p. 36–46, 1972. 3

BASAK, A.; CHOUDHURY, A. Bayesian inference and prediction in single server $M/M/1$ queueing model based on queue length. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor & Francis, v. 50, n. 6, p. 1576–1588, 2021. 3

CHOWDHURY, S.; MUKHERJEE, S. P. Estimation of traffic intensity based on queue length in a single $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 42, n. 13, p. 2376–2390, 2013. 3

CLARKE, A. B. Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, The Institute of Mathematical Statistics, v. 28, n. 4, p. 1036–1040, 1957. 3

CRUZ, F. R. B.; QUININO, R. C.; HO, L. L. Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, v. 46, n. 9, p. 7319–7331, 2017. 3

MUDDAPUR, M. V. Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, v. 24, n. 1, p. 327–331, 1972. 3

R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. 6

REYNOLDS, J. F. On estimating the parameters of a birth-death process. *Australian Journal of Statistics*, v. 15, n. 1, p. 35–43, 1973. 3

SINGH, S. K.; ACHARYA, S. K. Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, Taylor & Francis, v. 48, n. 19, p. 4780–4793, 2019. 3

SINGH, S. K.; ACHARYA, S. K. Bernstein-von Mises theorem and Bayes estimation from single server queues. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 50, n. 2, p. 286–296, 2021. 3

SINGH, S. K. et al. Bayesian sample size determination in a single-server deterministic queueing system. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 187, p. 17–29, 2021. 3

SINGH, S. K. et al. Estimations in a single-server Markovian queueing system. (*Under review*), p. 1–30, 2021. Disponível em: <<http://www.est.ufmg.br/ftp/fcruz/publics/mm1inf.pdf>>. 6

SRINIVAS, V.; RAO, S. S.; KALE, B. K. Estimation of measures in $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 40, n. 18, p. 3327–3336, 2011. 3

Edição especial - X ERMAC RS (Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul)

Enviado em : 02 junho 2021

Aceito em : 05 outubro 2021

Editores - Dr. Carlos Hoppen, Dra. Daniela Buske, Dra. Eliete Biasotto Hauser