

## Gráfico de controle de confiança para vetores de médias gaussianos

Denis Altieri de Oliveira Moraes (UFSM) [daltieri@smail.ufsm.br](mailto:daltieri@smail.ufsm.br)

Fernando Luiz Pereira de Oliveira (UFOP, UFV) [fernandoluiz@iceb.ufop.br](mailto:fernandoluiz@iceb.ufop.br)

Luiz Henrique Duczmal (UFMG) [duczmal@est.ufmg.br](mailto:duczmal@est.ufmg.br)

Frederico Rodrigues Borges da Cruz (UFMG) [fcruz@est.ufmg.com](mailto:fcruz@est.ufmg.com)

**Resumo:** *Nesse trabalho salientamos que, para processos normalmente distribuídos, o parâmetro de não-centralidade ( $d$ ), comumente utilizado nos gráficos de controle de Hotelling e MEWMA para o monitoramento do vetor de médias, é um caso particular de uma medida geral conhecida como distância de Bhattacharyya, sendo esta também um caso particular de uma medida mais geral, a distância de Chernoff. Apesar do cálculo exato da probabilidade de que um processo multivariado esteja sob controle ser uma tarefa complexa, os resultados providos por Chernoff fornecem um limite superior para o erro total de classificação, ou erro de Bayes, bem como para as probabilidades de erro do tipo I e II. Assim, ao invés de monitorar uma distância não limitada ( $d$ ), a abordagem adotada nesse trabalho baseia-se numa transformação apropriada para o parâmetro de não-centralidade possibilitando o monitoramento direto de uma medida probabilística, a qual é indicativa do grau de sobreposição entre os estados sob controle e fora de controle do processo. Os resultados obtidos sugerem que a avaliação de um gráfico de controle baseado em limites de probabilidades pode ser uma ferramenta mais informativa do que o monitoramento do parâmetro de não-centralidade.*

**Palavras-chave:** *Processos pontuais gaussianos, Vetores de medias, Controle estatístico do processo, Parâmetro de não-centralidade, Limites de Chernoff.*

### 1. Introdução

O mundo moderno vem sendo objeto de intensas e aceleradas transformações econômica, política e sociais que têm levado as empresas e indústrias a adotarem estratégias diferenciadas para elevar a qualidade dos produtos e serviços. Desse modo, é necessário desenvolver técnicas de monitoramento do processo cada vez mais eficientes. Considerando apenas o monitoramento do vetor de médias de processos gaussianos, os métodos mais tradicionalmente reconhecidos incluem o gráfico de controle de Hotelling (1947) e o gráfico de controle multivariado Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA) proposto por Lowry et al. (1992), os quais se baseiam diretamente no parâmetro de não-centralidade ( $d$ ).

Dentre os diversos métodos direcionados ao controle estatístico de processos (CEP), Bersemis *et al.* (2007) fazem uma revisão detalhada dos gráficos de controle multivariados adotados nesse trabalho de uma forma bastante abrangente, diferenciando, por exemplo, as diferentes formas de apresentação e aplicação do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling. A saber, a distribuição assintótica da estatística de Hotelling depende da aplicação, podendo o mesmo



ser configurado para a Fase 1 ou 2 do processo, com consequências diretamente ligadas ao comprimento médio de corrida até a ocorrência de um alarme (ARL).

Para situar o problema abordado nesse trabalho, diferenciamos primeiramente dois tipos de processos multivariados. Processos multivariados podem ser classificados como observações medidas em múltiplos estágios ou em estágio único. Em processos multivariados em múltiplos estágios (Zou e Tsung, 2008), cada característica da unidade observada é mensurada sequencialmente, uma após a outra até que a unidade final possua todas as suas  $n$  características mensuradas. Em situações como esta podem ser incluídas a manufatura de automóveis e a montagem de semi-condutores. Nesse casos também é comum que a alteração no processo ocorra em apenas uma das características, já que cada característica pode ser avaliada antes que a unidade inteira esteja pronta. Nesses casos específicos, métodos direcionalmente adaptados como propostos por Zou e Tsung (2008) apresentam elevado desempenho.

A situação abordada nesse trabalho são os processos multivariados em estágio único, ou seja, todas as  $n$  características do vetor observado são mensuradas no mesmo instante. Quando não há informação *a priori* sobre a **direção** da mudança, um gráfico de controle puramente não-direcional como os gráficos de controle de Hotelling e MEWMA devem ser adotados. Adicionalmente, quando não há informação *a priori* sobre o **tamanho** da mudança, o pesquisador encontra o problema de qual gráfico entre os dois deve ser configurado. Geralmente a abordagem adotada é o monitoramento simultâneo de ambos gráficos de controle, um para mudanças pequenas, enquanto o outro para grandes deslocamentos.

Observe também que quando o interesse do pesquisador é controlar se um processo está sob controle em relação ao seu vetor de médias, um grande deslocamento será interrompido tão logo seja detectado. Mesmo que o processo venha a convergir para algum estado fora-de-controle estável, esse estado certamente nunca seria realmente observado.

Em muitos problemas industriais, a probabilidade de que uma observação esteja sob-controle é um assunto de interesse, mas o cálculo é uma tarefa difícil mesmo quando os dados são normalmente distribuídos. Assim, a ideia do monitoramento da probabilidade de que o processo atual esteja sob-controle é geralmente ignorada.

Entretanto, se uma forma fechada para o cálculo exato da probabilidade de erro não está disponível, é possível procurar ou uma expressão aproximada ou então um limite superior para a probabilidade de erro. Uma forma fechada para o limite superior da probabilidade de erro é muito útil por diversas razões. Além de reduzir o custo computacional grandemente, a avaliação de uma simples equação pode prover um conhecimento significativo a cerca do estado atual do processo. Além disso, sabe-se que o erro de classificação aumenta significativamente com o número de dimensões, reduzindo assim dramaticamente os níveis usuais de confiança de que o processo esteja na verdade sob-controle (Fukunaga, 1990).

Devido a esse fato, a avaliação de probabilidades ao invés de distâncias ilimitadas fornece uma informação valiosa sobre o preço que temos que pagar pelo desconhecimento do estado alternativo *a priori*. Focando esse objetivo, é discutido nesse trabalho o monitoramento do vetor de médias de processos gaussianos através de uma simples transformação do parâmetro de não-centralidade em um gráfico de controle de probabilidades, tanto para o caso de vetores de observações individuais quanto para o caso de vetores de médias.

## 2. Metodologia

Sabe-se que o desempenho dos gráficos de controle baseados no parâmetro de não-centralidade, tais como os gráficos de Hotelling e MEWMA, medido através do comprimento médio de corrida (ARL) depende somente do valor distância não-central e não depende da direção da mudança. Essa distância para o caso de observações individuais (Montgomery, 2001) é dada por

$$d_t^2 = (\mathbf{X}_t - \mathbf{M}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{X}_t - \mathbf{M}_0), \quad (1)$$

onde  $\mathbf{X}_t$ ,  $\mathbf{M}_0$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  são o vetor observado, o vetor de medias e a matriz de covariância sob-controle do processo, respectivamente. A regra de decisão adotada dispara um sinal de fora-de-controle assim que  $d_t^2 > h_1$ , onde  $h_1$  é um limiar pré-especificado que corresponde a determinada taxa de falsos alarmes, geralmente definido em termos do ARL.

Enquanto a distância de Hotelling considera o controle individual de vetores multivariados, a abordagem do gráfico MEWMA considera o vetor de médias estimado no instante atual fora de controle tão logo

$$z_t^2 = (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_0) > h_2, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{M}_t$  é o vetor de medias estimado tal que

$$\mathbf{M}_t = (1 - \lambda)\mathbf{M}_{t-1} + \lambda\mathbf{X}_t. \quad (3)$$

e  $0 < \lambda \leq 1$ . Observe que quando  $\lambda = 1$ , a distância do gráfico MEWMA se reduz a distância de Hotelling.

O parâmetro de não-centralidade ( $d$ ) é uma medida popular em reconhecimento de padrões (Therrien, 1989) do tipo hipótese única, também conhecido como distância de Mahalanobis, a qual possui uma estreita ligação com a distância de Bhattacharyya, sendo esta um caso particular da distância  $\mu(s)$ , dada por Chernoff quando seu parâmetro  $s$  é igual a  $1/2$  (Fukunaga, 1990). Tais distâncias fornecem um limite superior para a probabilidade total do erro de classificação no caso de processos normalmente distribuídos, a qual é dada por

$$\varepsilon = \sqrt{P_1 * P_2} \int \sqrt{p_1(X) * p_2(X)} dX = \sqrt{P_1 * P_2} e^{-\mu(1/2)}, \quad (4)$$

onde

$$\mu(1/2) = \frac{1}{8} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)^T \left( \frac{\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2}{2} \right)^{-1} (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2|}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_1| |\boldsymbol{\Sigma}_2|}}. \quad (5)$$

O termo  $\mu(1/2)$  é chamado de distância de Bhattacharyya, sendo uma importante medida de separação entre dois processos multivariados, onde  $\mathbf{M}_i$  e  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , são os vetores de médias e matrizes de covariâncias de cada classe. A primeira parcela mostra a contribuição da diferença entre os vetores de médias, enquanto a segunda parcela mede apenas a contribuição da diferença entre as matrizes de covariância.

Dado que o estado alternativo do processo é geralmente desconhecido, ao invés de considerar o erro total de classificação dado na equação (4), a qual supõe dois processos conhecidos, é mais interessante no caso de controle estatístico de processos, monitorar apenas o limite superior para a probabilidade do erro do tipo I, o qual é dado por

$$\varepsilon_1 = \sqrt{P_2/P_1} \int \sqrt{p_1(X) * p_2(X)} dX = \sqrt{P_2/P_1} e^{-\mu(1/2)}. \quad (6)$$

Nesse sentido, os experimentos simulados a seguir delimitam limites superiores para os níveis de confiança usuais de que o processo esteja sob-controle, sendo denominados de gráficos de controle de confiança para vetores de médias gaussianos.

## 2.1. Cartas de controle de confiança

Os resultados teóricos apresentados acima fornecem um modo diferenciado de monitorar processos gaussianos multivariados através da transformação de distâncias ilimitadas em limites superiores para a probabilidade de erro do tipo I. Observe que quando o estado subjacente do processo é na verdade o estado sob-controle, o vetor de médias estimado no instante atual ou o vetor de observações individuais não devem apresentar diferenças significativas em relação aos padrões usuais. Isso acarreta em que o limite superior para a probabilidade de erro do tipo I aproxime-se de 1. Da mesma forma, quando o estado atual do processo afasta-se para a região fora-de-controle, o limite superior para o erro do tipo I diminui, indicando mais certeza de que o processo atual esteja se modificando. Por outro lado, ao tomar o valor complementar para o limite superior da probabilidade de erro, geramos uma medida de probabilidade que pode ser interpretada como um limite superior para a confiança de que o processo esteja sob-controle. Essa medida tende a zero quando o processo permanece sob-controle e tende a 1 quando o processo torna-se fora-de-controle.

Baseado nisso, o gráfico de probabilidades proposto para o monitoramento de observações individuais é dado por

$$p_t = 1 - \exp\left[-\frac{1}{8}(\mathbf{X}_t - \mathbf{M}_0)^T \Sigma_0^{-1}(\mathbf{X}_t - \mathbf{M}_0)\right] > h_1^*, \quad (7)$$

onde  $h_1^*$  é o limite de controle superior para obter um valor desejado para o comprimento médio de corrida sob-controle ( $ARL_0$ ). Quando os vetores de observações individuais são substituídos pelo vetor de médias estimado no instante atual, o gráfico de controle de confiança baseado no esquema MEWMA é dado por

$$p_t = 1 - \exp \left[ -\frac{1}{8} (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{M}_t - \mathbf{M}_0) \right] > h^* \quad (8)$$

onde  $h^*$  é escolhido de forma a obter um valor de  $ARL_0$  desejado.

A calibração dos gráficos de controle propostos é desenvolvida em duas etapas. Na primeira etapa é estimado um valor inicial para o limiar através de um modelo de regressão linear na forma  $d^2 = a + b * \ln(ARL)$ . Em uma segunda etapa, são feitas sucessivas interpolações dos valores estimados de forma a atingir um  $ARL_0 = 200$  para todos os métodos. Experimentos simulados de um processo gaussiano bivariado são ilustrados de forma a destacar funcionalidade dos gráficos de controle propostos, bem como gerar uma tabela comparativa do desempenho dos métodos através do comprimento médio de corrida fora-de-controle, ou  $ARL_1$ .

### 3. Discussão dos resultados

Inicialmente, a Figura 1, parte (a), mostra o padrão do sinal do gráfico de controle de confiança para observações individuais quando não há diferença entre os vetores de média ( $d = 0$ ). As partes (b) e (c) da Figura 1 deslocam o vetor de médias do processo na posição  $t = 201$  para as distâncias  $d = 3$  e  $6$ , respectivamente. Os gráficos de dispersão abaixo de cada respectivo gráfico de controle destacam em vermelho os vetores de observações individuais considerados fora-de-controle em vermelho, enquanto os pontos em preto são as observações sob-controle. A linha vertical indica o ponto de mudança, enquanto a linha horizontal delimita o limite superior sob-controle para um  $ARL_0 = 200$ , o qual é  $h^* = 0.7362$ . A distância não-central correspondente para o gráfico de controle de Hotelling é  $h = 3.265$ .

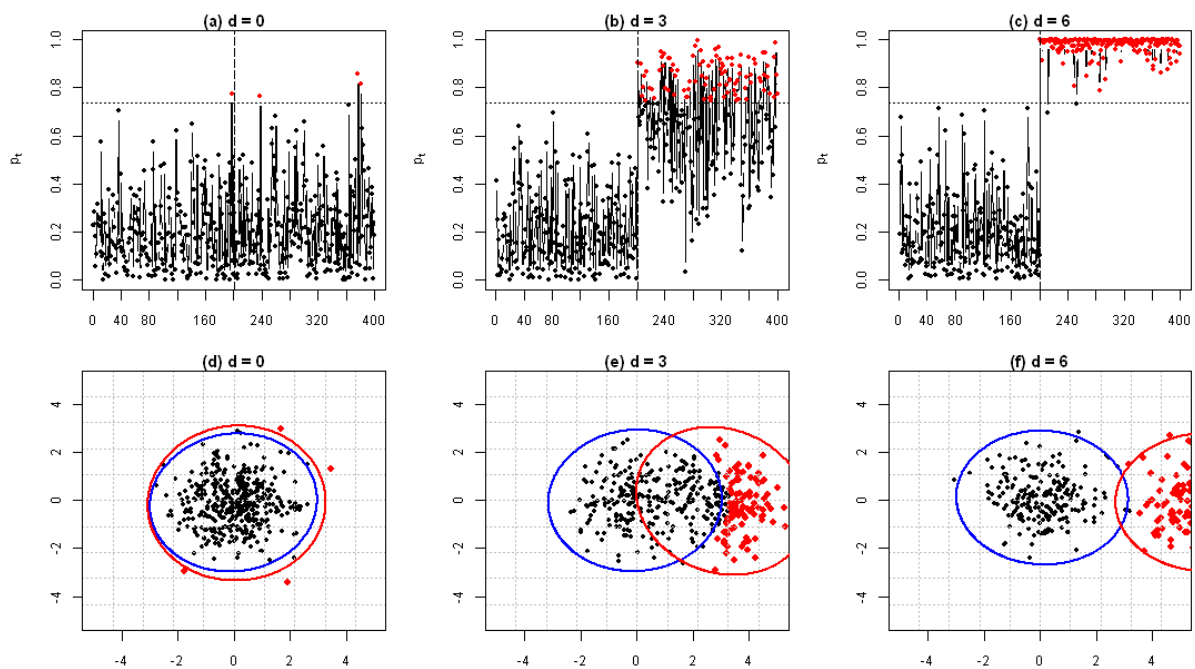


FIGURA 1 – Gráficos de controle de confiança para observações individuais (Hotelling transformado); elipses de confiança estimadas por ACP nos gráficos de dispersão em cada período (sob controle e fora de controle)



TABELA 1 - Resumo das estatísticas de primeira e segunda ordem dos gráficos de controle de Hotelling e de Confiança para vetores individuais com comparação do ARL.

$d$	$\bar{d}^2$	$Sd(d^2)$	ARL	$\bar{p}(\%)$	$Sd(p)(\%)$	ARL
0,0	2,000	1,850	200,6	20,00	15,74	200,6
	0,006	0,006	0,634	0,001	0,000	0,634
0,5	2,251	2,070	118,8	21,97	16,93	117,7
	0,007	0,007	0,376	0,001	0,001	0,372
1,0	3,001	2,642	43,1	27,62	19,57	43,1
	0,009	0,008	0,136	0,001	0,001	0,136
1,5	4,252	3,407	16,0	36,13	21,96	16,0
	0,013	0,011	0,051	0,001	0,001	0,051
2,0	6,003	4,263	7,0	46,39	22,98	7,0
	0,019	0,013	0,022	0,001	0,001	0,022
2,5	8,253	5,163	3,6	57,19	22,30	3,6
	0,026	0,016	0,011	0,002	0,001	0,011
3,0	11,004	6,086	2,2	67,49	20,13	2,2
	0,035	0,019	0,007	0,002	0,001	0,007
3,5	14,270	7,039	1,5	76,51	16,97	1,5
	0,143	0,070	0,005	0,002	0,001	0,005
4,0	18,021	7,987	1,2	83,86	13,39	1,2
	0,180	0,080	0,004	0,003	0,000	0,004
$h(ARL_0=200)$		10,66		73,62		

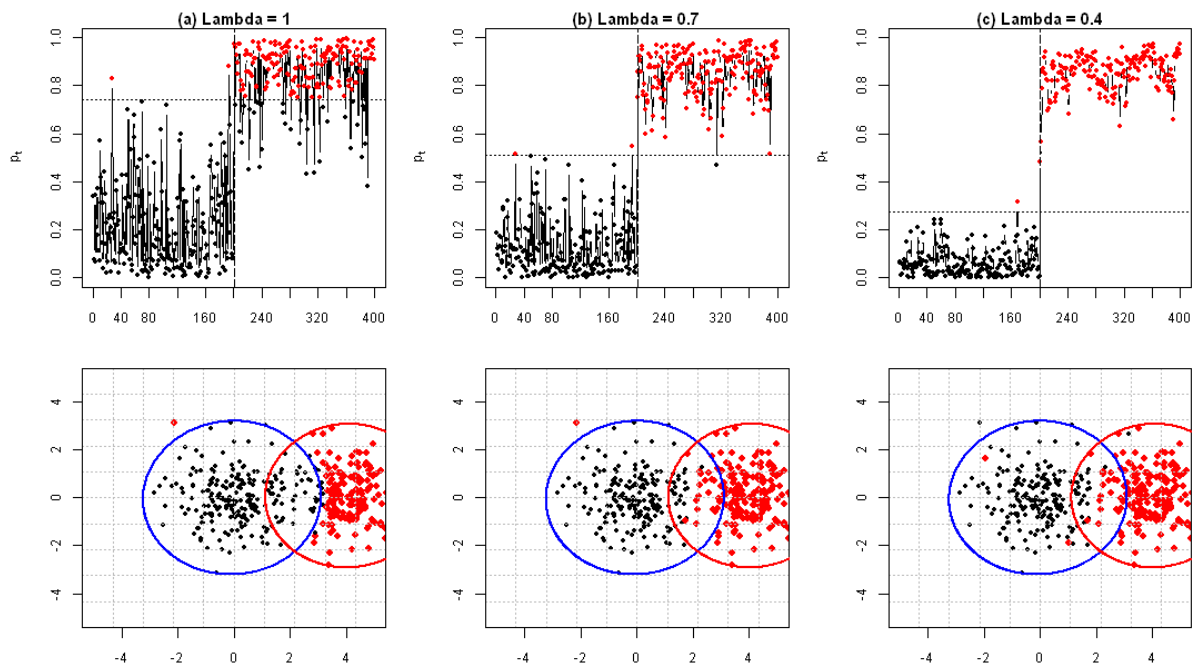


FIGURA 2 – Gráfico de controle de confiança MEWMA para uma mudança no vetor de médias em  $t = 201$  para  $d = 3$ , (a) vetores individuais,  $\lambda = 1,0$ ; vetores de médias (b)  $\lambda = 0,7$  e (c)  $\lambda = 0,4$

A observação da Figura 1 (c) indica que quando o processo fora-de-controle está completamente separado do estado sob-controle, o gráfico de controle de confiança gera um limite superior para os valores de probabilidade, indicando que com probabilidade aproximadamente 1 os processos estão completamente separados. Essa característica é inexistente na abordagem tradicional do gráfico de Hotelling, fazendo que as distâncias obtidas sejam de difícil avaliação. Um resumo detalhado das estatísticas de primeira e segunda ordem das probabilidades de confiança para distâncias crescentes no intervalo 0-4 é fornecido na Tabela 1, onde são feitas 100.000 replicações de uma amostra de tamanho igual a 10. Observe que o desempenho do gráfico de Hotelling utilizando  $d^2$  é exatamente o mesmo que o gráfico de controle de confiança a transformação dada pelos limites de Chernoff.

A FIGURA 2 ilustra o compartimento do gráfico de controle de confiança considerando apenas a transformação do método MEWMA com parâmetro  $\lambda$ . Nota-se que quando  $\lambda = 1$  o gráfico é exatamente a transformação apresentada na FIGURA 1 e que a redução de  $\lambda$  indicada para monitorar deslocamentos menores reduz os níveis usuais de confiança do processo para medidas menores. Esse fato destaca que ao procurar pequenos deslocamentos o pesquisador deve perceber que essa tarefa é mais difícil, aumentando a probabilidade de erro e diminuindo conseqüentemente o nível de confiança usual. Para que seja mantido o mesmo ARL, os limites de confiança foram reduzidos de  $h = 0.7362$  para  $h^* = 0.5086$  ( $d = 2.3842$ ) quando  $\lambda = 0.7$  e  $h^* = 0.2747$  ( $d = 1.6028$ ) quando  $\lambda = 0.4$ .

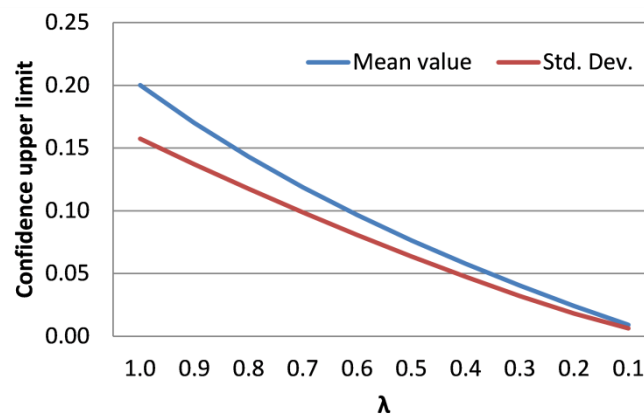


FIGURA 3 – Valores da média e desvio padrão para o gráfico de controle de confiança MEWMA para o processo sob controle, com vários  $\lambda$ 's

Os valores médios e desvios observados para a estatística proposta com  $\lambda$  variando de 1 a 0.1 são apresentados na TABELA 2 e também na FIGURA 3. Baseados nessas informações é possível estabelecer uma relação entre o parâmetro  $\lambda$  e os níveis usuais de variação de um processo gaussiano bivariado, podendo assim escolher adequadamente os limites de controle do processo.

O procedimento adotado é do tipo Fase 2, já que considera que os parâmetros do processo já foram previamente estimados durante uma Fase 1. Sendo um procedimento do tipo Fase 2, é assumido que a mudança no processo pode ocorrer a partir do início da fase de monitoramento. Os dados da TABELA 3 estão também ilustrados na FIGURA 4 apresentam os valores médios e os desvios observados durante um período (*run length*) de tamanho igual a 20.

É interessante observar que apesar do sinal médio esperado quando o processo está fora de controle ( $d = 7.0$ ) e  $\lambda = 0.1$  ser limitado superiormente por,

$$\begin{aligned}
 E(p|\mathbf{M}_1 = (7,0)) &= E\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(d^2)\right) \mid \mathbf{M}_1 = (7,0)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-E(d^2|\mathbf{M}_1 = (7,0))\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}E(d^2|\mathbf{M}_1 = (7,0))\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(n + \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1)\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}\left(2 + (7 \ 0)\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(2 + 49)\right) = 1 - \exp\left(-\frac{51}{8}\right) = 0.9983,
 \end{aligned}$$

o valor médio observado em 50.000 simulações de Monte Carlo com uma amostra dos 20 primeiros vetores observados não converge para aproximadamente 0,7. Isso reflete o forte efeito inercial sofrido pelos gráficos de controle configurados para mudanças pequenas e quando na realidade são confrontados com grandes mudanças.

TABELA 2 – Sumário das estatísticas do gráfico MEWMA para o processo sob controle.

$\lambda$	$\bar{p}(\%)$	Sd( $p$ )(%)
1,0	0,20013	0,15740
	0,00090	0,00070
0,9	0,16995	0,13706
	0,00076	0,00061
0,8	0,14299	0,11748
	0,00064	0,00053
0,7	0,11870	0,09872
	0,00053	0,00044
0,6	0,09664	0,08078
	0,00043	0,00036
0,5	0,07644	0,06367
	0,00034	0,00028
0,4	0,05778	0,04740
	0,00026	0,00021
0,3	0,04039	0,03211
	0,00018	0,00014
0,2	0,02407	0,01811
	0,00011	0,00008
0,1	0,00908	0,00634
	0,00004	0,00003



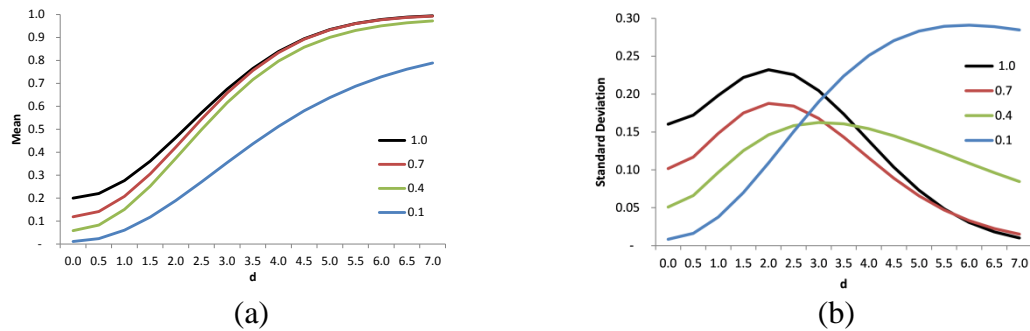


FIGURA 4 – Valores médios (a) e desvios padrão (b) dos gráficos de controle de confiança MEWMA para diversos  $d$ 's

É interessante observar que apesar do sinal médio esperado quando o processo está fora de controle ( $d = 7.0$ ) e  $\lambda = 0.1$  ser limitado superiormente por,

$$\begin{aligned}
 E(p|\mathbf{M}_1 = (7,0)) &= E\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(d^2)\right) \mid \mathbf{M}_1 = (7,0)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-E(d^2|\mathbf{M}_1 = (7,0))\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}E(d^2|\mathbf{M}_1 = (7,0))\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(n + \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1)\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}\left(2 + (7 \ 0)\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\
 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}(2 + 49)\right) = 1 - \exp\left(-\frac{51}{8}\right) = 0.9983,
 \end{aligned}$$

o valor médio observado em 50.000 simulações de Monte Carlo com uma amostra dos 20 primeiros vetores observados converge para 0.7886. Isso reflete o forte efeito inercial sofrido pelos gráficos de controle configurados para mudanças pequenas e quando na realidade são confrontados com grandes mudanças.

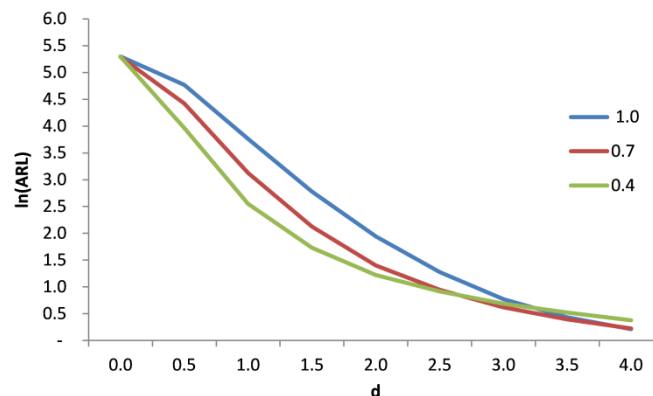


FIGURA 5 – Comparação de desempenho dos gráficos de controle de confiança MEWMA em relação à variação do parâmetro  $\lambda$  para diversos  $d$ 's

Esse efeito inercial prova ser muito inferior para os valores maiores de  $\lambda$ , já que tanto a média das 20 observações converge mais rapidamente para 1 quanto os respectivos desvios convergem para zero. Da mesma forma, o desvio padrão quando  $\lambda = 0.1$  e  $d = 7.0$  não converge para zero como esperado, mas para próximo de 28% pois no período inicial do

movimento do processo existe uma alta variação devido a um processo característico do gráfico de controle que pode ser visto como uma “transição de fase”.

Na TABELA 4 são comparados os valores do ARL para os diferentes níveis de suavização utilizados. Através da FIGURA 5, o logaritmo natural desses valores é comparado de forma a diminuir a diferença entre escalas do ARL para  $d = 0$  e  $d = 4$ . Apesar do melhor desempenho para pequenas mudanças, a ilustração dos dados torna possível perceber de forma clara o efeito inercial dos gráficos de controle configurados para pequenas mudanças.

TABELA 3 - Sumário das estatísticas do gráfico MEWMA - processo fora de controle e  $\lambda = 1,0; 0,7; 0,4$  e  $0,1$

$\lambda$	1		0,7		0,4		0,1	
$d$	$\bar{p}(\%)$	Sd(p)(%)	$\bar{p}(\%)$	Sd(p)(%)	$\bar{p}(\%)$	Sd(p)(%)	$\bar{p}(\%)$	Sd(p)(%)
0,0	19,99	16,03	11,86	10,17	5,83	5,09	1,08	0,83
	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	21,97	17,22	14,16	11,69	8,23	6,62	2,35	1,61
	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
1,0	27,61	19,83	20,72	14,82	15,04	9,67	6,03	3,77
	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000
1,5	36,12	22,19	30,53	17,50	25,22	12,53	11,75	7,00
	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000
2,0	46,37	23,21	42,24	18,76	37,33	14,62	18,97	10,92
	0,002	0,001	0,002	0,001	0,002	0,001	0,001	0,000
2,5	57,17	22,57	54,40	18,42	49,87	15,83	27,08	15,05
	0,003	0,001	0,002	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
3,0	67,47	20,46	65,79	16,78	61,58	16,26	35,49	18,98
	0,003	0,001	0,003	0,001	0,003	0,001	0,002	0,001
3,5	76,49	17,36	75,59	14,33	71,64	16,07	43,67	22,39
	0,003	0,001	0,003	0,001	0,003	0,001	0,002	0,001
4,0	83,84	13,82	83,40	11,56	79,69	15,43	51,25	25,11
	0,004	0,001	0,004	0,001	0,004	0,001	0,002	0,001
4,5	89,43	10,35	89,22	8,89	85,74	14,49	58,00	27,06
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,001	0,003	0,001
5,0	93,43	7,30	93,29	6,58	90,06	13,36	63,82	28,31
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,001	0,003	0,001
5,5	96,11	4,86	95,98	4,71	93,03	12,14	68,73	28,94
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,001	0,003	0,001
6,0	97,81	3,05	97,67	3,28	95,01	10,88	72,79	29,10
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,000	0,003	0,001
6,5	98,83	1,81	98,68	2,24	96,33	9,63	76,13	28,91
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,000	0,003	0,001
7,0	99,40	1,02	99,27	1,50	97,21	8,45	78,86	28,47
	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,000	0,004	0,001

TABELA 4 – Comparação do comprimento médio para  $\lambda = 1,0; 0,7$  e  $0,4$

$d \setminus \lambda$	1,0	0,7	0,4
0,0	200,6	198,9	199,3
	0,634	4,45	4,46
0,5	117,7	83,2	52,6
	0,372	0,83	0,53
1,0	43,1	22,7	12,8
	0,136	0,23	0,13
1,5	16,0	8,4	5,6
	0,051	0,08	0,06
2,0	7,0	4,1	3,4
	0,022	0,04	0,03
2,5	3,6	2,6	2,5
	0,011	0,03	0,03
3,0	2,2	1,9	2,0
	0,007	0,02	0,02
3,5	1,5	1,5	1,7
	0,005	0,01	0,02
4,0	1,2	1,3	1,5
	0,004	0,01	0,01

#### 4. Conclusões preliminares

Neste trabalho, propomos uma nova forma do monitoramento do vetor de médias de processos gaussianos pelo uso de um limite superior sobre a confiança de que o processo está sob controle. A monitorização do parâmetro de não centralidade sugere-se a utilização da distância Bhattacharyya. Enquanto a distância tradicional de Hotelling não tem valores máximos, fazendo que as distâncias obtidas sejam de difícil avaliação.

O gráfico de controle de confiança proposto com base em probabilidades para vetores de observação individuais manifestam uma distinção útil entre os processos na faixa de 0-1. Nestes experimentos iniciais, quando o processo fora de controle tornou-se completamente separável do processo sob controle, a estatística proposto convergem para 1.

Trabalhos em andamento vêm sendo desenvolvidos sobre este tema onde incluem o monitoramento da matriz de covariância de processos gaussianos através da utilização de gráficos de controle baseados em probabilidades, bem como o acompanhamento do processo global, ou seja, o monitoramento conjunto da matriz de covariância e do monitoramento do vetor de médias de processos gaussianos multivariados.

#### Referências

Hotelling, H. Multivariate quality control - illustrated by the air testing of sample bombsights. *Techniques of Statistical Analysis*, 1947; 111–184.



Lowry, C. A., Woodall, W.H. & Rigdon, S. E. A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Technometrics*, 1992; **34**(1): 46-53.

Bersemis S, Psarakis S, Paranetos J. Multivariate Statistical Process Control Charts: An Overview. *Qual. Reliab. Engng. Int.* 2007; 23:517–543.

Zou, C. & Tsung, F. Directional MEWMA Schemes for Multistage Process Monitoring and Diagnosis. *Journal of Quality Technology*, 2008; **40**(4): 407-427.

Crosier, R. B. Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-Control Schemes. *Technometrics*, 1998; **30**(3): 291-303.

Faraz, A. & Saniga, E. Multiobjective Genetic Algorithm Approach to the Economic Statistical Design of Control Charts with an Application to  $\bar{X}$  and  $S^2$  Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 2013; **29**: 407-415.

Fukunaga, K. *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. (2nd ed.). Boston: Academic Press, 1990.

Niaki, S.T.A. & Memar, A.O. A new statistical process control method to monitor and diagnose bivariate normal mean vectors and covariance matrices simultaneously. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2009; **43**: 964-981.

Rao, C.R. The problem of classification and distance between two populations. *Nature*, 1947; 159, 30.

Rao, C. R. On the distance between two populations. Shankya: *The Indian Journal of Statistics*, 1949; **9**: 246-248.

Therrien, C. W. *Decision Estimation and Classification, an Introduction to Pattern Recognition and Related Topics*. John Wiley & Sons, 1989.