

Atribuição de Tráfego em Redes de Filas Finitas Dependentes do Estado

Guilherme D. Carvalho, Renato A. Nascimento & Frederico R. B. Cruz

Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, 31.270-901 - Belo Horizonte - MG

Resumo: Os modelos de tráfego precisam ser detalhados o bastante para capturar as sutilezas fundamentais envolvidas, mas também suficientemente simples para se enquadrarem bem em um arcabouço de otimização. Neste artigo investigamos um modelo de tráfego de veículos, baseado em filas finitas configuradas em redes, acoplado ao modelo do ótimo do sistema, que é um dos modelos clássicos para atribuição de tráfego. O modelo de filas representa bem situações de congestionamento, em que a velocidade de um usuário decai com o aumento de usuários simultâneos no sistema. Resultados preliminares foram obtidos com uma heurística evolucionária que indicaram que a atribuição de tráfego faz sentido e é robusta. **Palavras-chave:** Redes de filas, filas finitas, sistemas estocásticos, problemas de planejamento.

1. INTRODUÇÃO

Sucessivas tentativas têm sido feitas para modelar a seleção de rotas por parte de usuários em redes congestionadas de tráfego de veículos. Duas classes de modelos são normalmente consideradas, o modelo do ótimo do sistema (do inglês *System Optimum (SO) Model*) e o modelo do equilíbrio do usuário (do inglês *User Equilibrium (UE) Model*). O modelo SO pode ser formulado como se segue:

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_{\forall a} x_a c_a(x_a), \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_k f_k^{rs} = q^{rs}, \quad \forall r, s, \quad (2)$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_k^{rs}, \quad \forall a, \quad (3)$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \quad \forall k, r, s, \quad (4)$$

em que x_a é o fluxo no trecho a , $c_a(x_a)$ é o tempo de percurso no trecho a , f_k^{rs} é o fluxo na rota k entre a origem r e o destino s , e q^{rs} é a demanda entre r e s (maiores detalhes sobre os modelos SO e UE, bem como suas variantes e combinações, podem ser encontrados em Sheffi, 1985).

Um grande problema, em qualquer destas duas classes de modelos, é que o tempo de percurso, a principal medida de qualidade, é usualmente considerado determinístico ou senão proveniente de aproximações de modelos estocásticos. Os mais importantes modelos de tempo de percurso, construídos nos últimos 40 anos, podem ser observados na Fig. 1, que apresenta o resultado de vários estudos empíricos em rodovias norte americanas (Drake et al., 1967; Edie, 1961; Greenshields, 1935; TRB, 2000; Underwood, 1961).

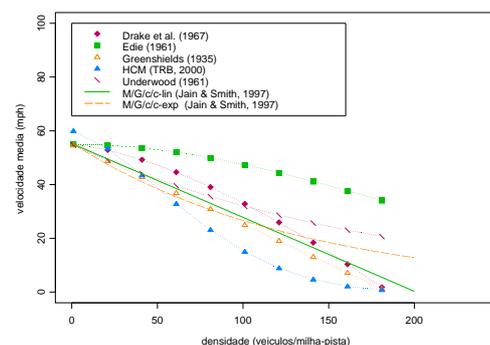


Figura 1: Resultados empíricos de fluxos de veículos e os modelos $M/G/c/c$

Redes de filas finitas aplicadas aos modelos SO e UE apenas começam a ser estudadas. Muitas das questões envolvidas são ainda tópicos de pesquisa em aberto. Em particular, estamos interessados em estudar aqui o modelo de atribuição de tráfego SO no qual os tempos de percurso sejam modelados por redes de filas $M/G/c/c$ dependentes do estado (Jain & Smith, 1997), ver Fig. 1. Na notação de Kendall, M denota um processo markoviano de chegada, G , uma taxa de serviço geral e dependente do estado e c representa tanto o número de servidores em paralelo quanto o espaço total na fila, incluindo os usuários que estão em serviço.

2. METODOLOGIA

O modelo SO e similares foram resolvidos anteriormente por vários algoritmos, tendo sido propostos vários algoritmos exatos e heurísticas (para uma revisão, veja Cruz et al., 2010). Basicamente, dada uma rede de tráfego como o exemplo apresentado na Fig. 2, o que precisa ser feito é a determinação de probabilidades de roteamento, p_{a_1} e p_{a_2} , para deslocar-se de A até B, de tal forma a minimizar a função objetivo $\sum_a x_a c_a(x_a)$. Os passos são detalhados a seguir.

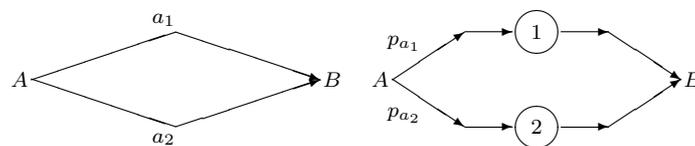


Figura 2: Uma rede com dois trechos e o respectivo modelo $M/G/c/c$

Para resolução do modelo SO, serão utilizados algoritmos evolucionários. Mais especificamente, usaremos um algoritmo *Differential Evolution* (DE), membro da família dos algoritmos genéticos. Algumas das propriedades do DE que o tornam adequados ao modelo SO são a robustez, a rapidez, a facilidade de uso e a habilidade em operar bem em superfícies planas (Price & Storn, 2006).

Dado que o algoritmo DE fornece a cada iteração um vetor de roteamento candidato, p , o cálculo da respectiva função objetivo será feito via modelagem por filas finitas. Para um trecho único de via, podemos considerar que há c servidores em paralelo, que é também a sua capacidade total. A taxa de serviço $f(n)$ pode ser modelada como tendo distribuição geral e dependente do número de usuários presentes no sistema n . Admitindo-se um modelo de filas $M/G/c/c$ dependente do estado, teremos que a distribuição de probabilidades do número de usuário no sistema será dada por:

$$p_n = \left\{ \frac{[\lambda E[T_1]]^n}{n! f(n) f(n-1) \cdots f(2) f(1)} \right\} / \left\{ 1 + \sum_{i=1}^c \left[\frac{[\lambda E[T_1]]^i}{i! f(i) f(i-1) \cdots f(2) f(1)} \right] \right\}, \quad (5)$$

para $n = 1, 2, \dots, c$, em que λ é a taxa de chegada e $E[T_1] = l/V_1$ é a esperança do tempo de serviço para um ocupante único no sistema, para um trecho de comprimento l e uma velocidade máxima V_1 . A capacidade é dada por $c = \lfloor klw \rfloor$, em que k é a capacidade do trecho, por unidade de comprimento por pista, w é a largura do trecho (em número de pistas) e $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro não superior a x . Finalmente, $f(n)$ é a taxa de serviço, dada por:

$$f(n) = V_n/V_1 = \exp \left[- \left(\frac{n-1}{\beta} \right)^\gamma \right],$$

com

$$\gamma = \log \left[\frac{\log(V_a/V_1)}{\log(V_b/V_1)} \right] / \log \left(\frac{a-1}{b-1} \right) \quad \text{e} \quad \beta = \frac{a-1}{[\log(V_1/V_a)]^{1/\gamma}} = \frac{b-1}{[\log(V_1/V_b)]^{1/\gamma}}.$$

Os valores a e b são pontos arbitrários usados para ajustar o modelo exponencial (valores razoáveis são $a = 20lw$ e $b = 140lw$, correspondentes às densidades 20 e 140 veículos/milha-pista, respectivamente (pela Fig. 1, valores razoáveis são $V_1 = 55$ milhas por hora, $V_a = 50$

Tabela 1: Configuração para rede de dois trechos

Rota	l^*	pistas	V_1^\ddagger	V_a^\ddagger	V_b^\ddagger	c (veh)	$E[T_1]^\#$
a_1	1,50 (2,41)	1	55 (88)	50 (80)	20 (32)	300	0,0273 (98)
a_2	1,00 (1,61)	1	55 (88)	50 (80)	20 (32)	200	0,0182 (65)

Obs.: *em milhas (em km); \ddagger em milhas por hora (em km/h); $\#$ em h (em s);

milhas por hora e $V_b = 20$ milhas por hora. Da Eq. (5), podemos obter as várias medidas de desempenho:

$$p_c = \Pr[N = c], \quad \theta = \lambda(1 - p_c), \quad L = E[N] = \sum_{n=1}^c np_n \quad \text{e} \quad W = E[T] = L/\theta,$$

em que p_c é a probabilidade de bloqueio, $\theta \equiv x_a$ é a taxa de saída (em veículos/h), L é a esperança do número de veículos no trecho e $W \equiv c_a(x_a)$ é a esperança do tempo de serviço (em horas), aqui obtido pela Lei de Little.

Como observação final, ressaltamos que o problema de determinação de medidas de desempenho está resolvido apenas parcialmente. A obtenção de medidas para *redes* de filas $M/G/c/c$ é uma tarefa consideravelmente mais complexa. Detalhes não serão dados aqui. Apenas diremos que será adotada uma abordagem computacional para obtenção aproximada destas medidas. Mais especificamente, utilizaremos o método da expansão generalizado, que é uma combinação de métodos de tentativa-e-erro e decomposição nó-a-nó (para detalhes, veja Jain & Smith, 1997).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os algoritmos utilizados foram codificados em C++ e estão disponíveis a pedido, para ensino e pesquisa. Os experimentos foram conduzidos em um PC, no Windows Vista. Utilizamos como exemplo a rede da Fig. 2. Os pontos A e B estão conectados por duas rotas alternativas, sendo que uma delas é mais curta (e conseqüentemente mais rápida) que a outra. A configuração desta rede é apresentada na Tabela 1. Os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 2, para diferentes taxas de chegada.

Tabela 2: Atribuição ótima para rede de dois trechos

λ	rota	atribuição	$E[T]^*$
0	a_1	n/a	0,0273 (98)
	a_2	n/a	0,0182 (65)
500	a_1	0	0,0273 (98)
	a_2	500	0,0190 (68)
1.000	a_1	0	0,0273 (98)
	a_2	1.000	0,0202 (73)
2.000	a_1	408	0,0282 (101)
	a_2	1.592	0,0222 (80)
4.000	a_1	674	0,0290 (104)
	a_2	1.711	0,0228 (82)
8.000	a_1	658	0,0289 (104)
	a_2	1.709	0,0228 (82)

*em horas (em segundos);

Pela Tabela 2, observamos que quando não há chegadas ($\lambda = 0$), o tempo esperado é igual ao menor tempo de percurso, que corresponde à condição de sistema vazio. O ocupante está sozinho no sistema e não tem impedimento de trafegar na velocidade máxima permitida. A partir de $\lambda = 500$, observamos um aumento no tempo esperado de percurso, restrito ao trecho utilizado. Adicionalmente, conforme esperado, o algoritmo direciona o tráfego preferencialmente ao trecho mais rápido, o que é promissor. Notamos também que o tempo de serviço nunca é igual nos dois trechos. Isto significa que um usuário com conhecimento sobre o sistema poderia reduzir o próprio tempo de percurso de A a B, mudando da rota mais lenta para a mais rápida. Tal melhoria é impossível no ótimo do modelo UE (veja Sheffi, 1985), mas não no do modelo SO. De fato, o modelo SO busca minimizar custos *globais* (e não *individuais*).

Uma dúvida levantada é se o algoritmo DE estaria realmente convergindo para o ótimo global. Na Fig. 2, verificaremos a acurácia das soluções obtidas, pelos gráficos da função objetivo, Eq. (1), para várias taxas de chegada. Os resultados parecem contrariar a conjectura inicial de que a função objetivo não é convexa. Entretanto, experimentos adicionais necessitam ser conduzidos, para verificar sob quais condições (topologia de rede e taxas de chegada) isto ocorre. Observamos também uma saturação da função objetivo, a partir de $\lambda = 4.000$, não havendo diferenças perceptíveis após este valor. Notamos também que no estado de saturação a rede alcança

sua capacidade e a restrição (2) não é mais atendida. Este é um importante tópico para investigação futura.

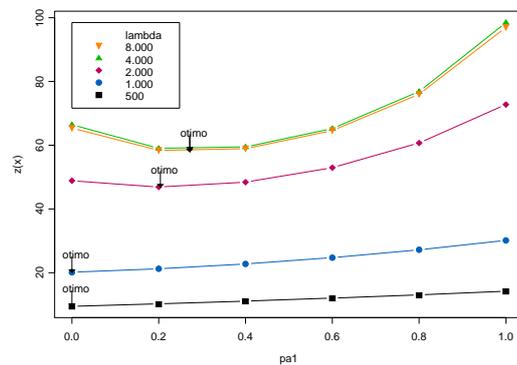


Figura 2: Função objetivo e soluções ótimas

4. CONCLUSÕES

O modelo do ótimo do sistema foi resolvido com a utilização de uma expressão diferente para o tempo entre viagens, baseada em filas $M/G/c/c$ dependentes do estado. Esta nova expressão representa com precisão o fenômeno de congestionamento (isto é, os tempos de viagem aumentam com o aumento do congestionamento), embora traga dificuldades para o algoritmo de otimização, pela possibilidade de ocorrência de ótimos locais. Resultados computacionais são apresentados com uma heurística *Differential Evolution*, que se mostrou eficaz. As soluções são robustas e consistentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cruz, F. R. B., van Woensel, T., Smith, J. M. & Lieckens, K. (2010). On the system optimum of traffic assignment in $M/G/c/c$ state-dependent queueing networks. *European Journal of Operational Research* **201**, 183-193.
- Drake, J. S., Schofer, J. L. & May, A. D. (1967). A statistical analysis of speed density hypotheses. *Highway Research Record* **154**, 53-87.
- Eadie, L. C. (1961). Car following and steady-state theory. *Operations Research* **9**, 66-76.
- Greenshields, B. D. (1935). A study of traffic capacity. *Highway Research Board Proceedings* **14**, 448-477.
- Jain, R. & Smith, J. M. (1997). Modeling vehicular traffic flow using $M/G/C/C$ state dependent queueing models. *Transportation Science* **31**, 324-336.
- Price, K. & Storn, R. (2006). *Differential evolution*, International Computer Science Institute. University of California, Berkeley, Website of DE. Acesso em novembro de 2010. Disponível: <http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html>
- Sheffi, Y. (1985). *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Transportation Research Board (2000). Highway capacity manual. *Technical report*, National Research Council.
- Underwood, R. T. (1961). Speed, volume, and density relationships: Quality and theory of traffic flow. *Yale Bureau of Highway Traffic*, 141-188.