

ESTIMAÇÃO BAYESIANA DA INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS MARKOVIANAS DE SERVIDOR ÚNICO

Eriky S. Gomes¹, Frederico R. B. Cruz²

¹Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia, eriky-tn@ufmg.br
²Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Estatística, fcruz@ufmg.br

RESUMO: Este artigo considera um sistema de filas markoviano de servidor único, onde observamos o número de chegadas de clientes durante o tempo de atendimento de um cliente. Estimamos a intensidade do tráfego, ρ , neste sistema de filas. Propomos uma metodologia bayesiana para estimar o parâmetro de interesse, que é comparada com o estimador clássico de máxima verossimilhança. A abordagem proposta é analisada por meio de simulações Monte Carlo, para atestar sua eficiência. Assim, duas alternativas complementares são apresentadas para a estimação da intensidade de tráfego em filas markovianas de servidor único.

Palavras-chave: Filas markovianas; Estimador de máxima verossimilhança; Estimação bayesiana; Simulação.

1. INTRODUÇÃO

Muitas situações da vida real, como clientes fazendo compras em um supermercado ou pacientes esperando por um transplante de coração, envolvem a chegada de usuários que precisam esperar para ser atendidos. A teoria das filas trata da análise de tais sistemas. O sistema de filas mais simples é uma fila Markoviana de servidor único, onde as chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson, com o parâmetro λ , e os tempos de serviço são distribuídos de forma independente e exponencial, com taxa de serviço μ . De acordo com a conhecida notação de Kendall, denotamos esse sistema de filas como $M/M/1$. Devido às possíveis aplicações práticas das filas, um problema importante que atrai muitos pesquisadores é o da estimativa estatística dos seus parâmetros.

Embora a teoria das filas tenha uma longa história, a inferência para sistemas de filas foi desenvolvida muito mais recentemente, começando com o trabalho pioneiro de CLARKE (1957), que adotou o método clássico de estimativa para estimar λ e μ em uma fila $M/M/1$ estacionária e estável, ou seja, para a intensidade de tráfego $\rho < 1$, em que $\rho = \lambda/\mu$. A abordagem bayesiana foi introduzida para sistemas Markovianos no início dos anos 1970 (ver BAGCHI; CUNNINGHAM, 1972; MUDDAPUR, 1972; REYNOLDS, 1973). Desde então, trabalhos significativos foram desenvolvidos recentemente nessa área, conforme pode ser visto, por exemplo, em SRINIVAS; RAO; KALE (2011), CHOWDHURY; MUKHERJEE (2013), CRUZ;

QUININO; HO (2017), BASAK; CHOUDHURY (2019), SINGH; ACHARYA (2019), entre outros.

Neste artigo, estudamos a estimação estatística da intensidade de tráfego ρ , em sistemas de filas $M/M/1$, segundo um esquema amostral que observa o número de chegadas de clientes durante o tempo de serviço de um cliente, uma forma bastante prática e eficiente de obtenção de amostras. Focamos principalmente no método bayesiano de estimativa.

O artigo está organizado da seguinte forma. A seção 2 descreve o sistema de filas de nosso interesse, apresenta o estimador de máxima verossimilhança para ρ e também descreve um método Bayesiano de estimativa. Para este propósito, usamos a distribuição beta como distribuição a priori para ρ . O estimador é deduzido para uma função de perda simétrica (ou SELF, do inglês *squared error loss function*), a mais comumente usada. Um estudo de simulação foi desenvolvido, para atestar a eficiência do estimador bayesiano utilizado, que é apresentado na seção 3. Finalmente, conclusões e observações finais são apresentadas na seção 4.

2. METODOLOGIA

2.1. Estimação clássica

Considere o modelo de filas markovianas de servidor único, ou seja, o modelo de filas $M/M/1$, na notação de Kendall. Nesse modelo, o número de chegadas segue uma distribuição de Poisson e os tempos de atendimento seguem uma distribuição exponencial. Portanto, temos que as funções densidade de probabilidade dos tempos entre chegadas e dos tempos de serviço são dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \\ b(t) = \mu e^{-\mu t}, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são as taxas médias de chegadas e de serviço, respectivamente.

Na análise da cadeia de Markov associada ao modelo de filas $M/G/1$, sejam $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, em que X_i denotam o número de chegadas durante o tempo de serviço de i -ésimo cliente. Para a fila $M/M/1$, a distribuição de probabilidade da variável aleatória X é uma distribuição geométrica e é dada por

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\rho = \lambda/\mu > 0$ é a intensidade de tráfego.

Suponha que foi extraída uma amostra aleatória $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de tamanho n da distribuição de probabilidade dada na Equação (2). Então, a função de verossimilhança baseada na amostra \mathbf{x} é dada por

$$L(\rho, \mathbf{x}) = \rho^y (1 + \rho)^{-(n+y)}, \quad (3)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$. Da Equação (3), pode-se escrever o estimador de máxima verossimilhança (EMV) para ρ ,

$$\hat{\rho}_{\text{MLE}} = \frac{y}{n}. \quad (4)$$

2.2. Estimação bayesiana

Geralmente, as distribuições a priori são escolhidos de forma que o intervalo do parâmetro corresponda ao intervalo de definição da distribuição. Como o parâmetro de intensidade de tráfego ρ , em condição estacionária e estável, varia de 0 a 1, para uma estimação bayesiana, uma distribuição beta de primeiro tipo (simplesmente distribuição beta) pode ser uma boa escolha como distribuição a priori para ρ . A função de densidade de probabilidade da densidade beta é dada por:

$$p_1(\rho | \alpha, \beta) = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (5)$$

em que $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ é a função beta, uma constante de normalização, para assegurar que a função densidade de probabilidade integra 1 no espaço paramétrico, definida por

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} d\rho \quad (6)$$

e $\alpha, \beta > 0$ são os denominados hiperparâmetros.

A distribuição a posteriori para ρ para a priori $p_1(\rho | \alpha, \beta)$, Equação (5), e dada por:

$$\begin{aligned} q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) &= \frac{L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta)}{\int_0^1 L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta) d\rho} \\ &= \frac{\rho^{y+\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} (1 + \rho)^{-(n+y)}}{\mathcal{B}(y + \alpha, \beta) {}_2F_1(n + y, y + \alpha, y + \alpha + \beta, -1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$, n é o tamanho da amostra e ${}_2F_1(a, b, c, z)$ é a distribuição gaussiana hipergeométrica, dada na forma integral por (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964):

$${}_2F_1(a,b,c,z) = \frac{1}{\mathcal{B}(b,c-b)} \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-zu)^{-a} du, \quad (8)$$

em que $z, c > b > 0$.

Dessa forma, é possível mostrar (SINGH et al., 2020) que o estimador bayesiano para ρ , sob uma função de perda quadrática (SELF, de *squared error loss function*), denotado por $\hat{\rho}_{\text{SELF}}^{\text{B}}$, para uma dada amostra \mathbf{x} , é dado pela esperança a posterior de ρ , ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{SELF}}^{\text{B}} &= \mathbb{E}(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) = \int_0^1 \rho q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) d\rho \\ &= \frac{\int_0^1 \rho^{(y+\alpha+1)-1} (1-\rho)^{\beta-1} (1+\rho)^{-(n+y)} d\rho}{\mathcal{B}(y+\alpha, \beta) {}_2F_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)} \\ &= \frac{(y+\alpha)}{(y+\alpha+\beta)} \frac{{}_2F_1(n+y, y+\alpha+1, y+\alpha+\beta+1, -1)}{{}_2F_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para verificar a eficácia e eficiência do método de estimação bayesiano aqui apresentado, foram desenvolvidos programas em R (R Core Team, 2018) e esses códigos estão disponíveis mediante solicitação aos autores. Todos os experimentos foram executados em um PC com um processador Intel(R) Core(TM) i7-2640M @ 2,80 GHz e 6 GB de RAM executando Microsoft Windows(C) 7 Professional.

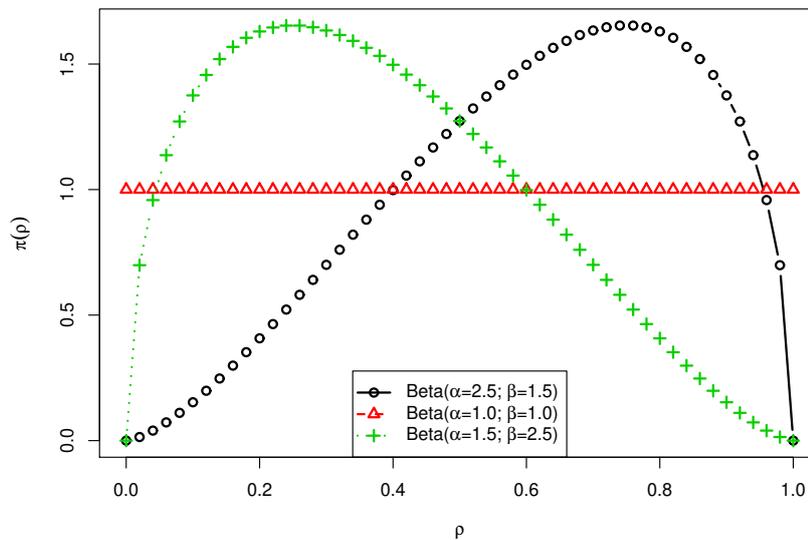


Figura 1. Distribuição a priori beta.
Fonte: dos autores.

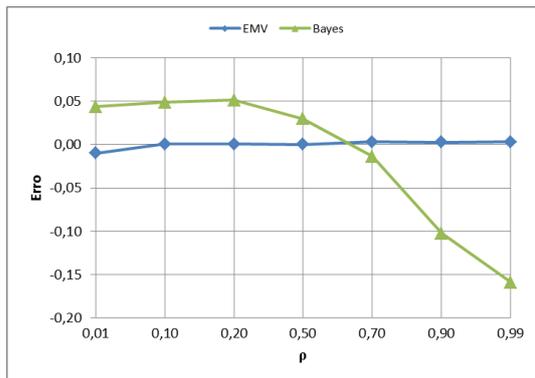
Primeiramente, os resultados computacionais são apresentados a partir de simulações de Monte Carlo que comparam o estimador de máxima verossimilhança, Equação (4), e o estimador bayesiano, Equação (9), para a intensidade de tráfego, ρ , para 1.000 replicações. Os hiperparâmetros usados foram $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$, o que representa uma distribuição a priori vaga, não informativa, conforme pode ser visto na Figura 1, para evitar, em um primeiro momento, uma influência mais forte de algum conhecimento a priori que o analista possa ter. A Tabela 1 apresenta os resultados em termos das médias das estimativas e das raízes dos erros quadráticos médios (REQM). As médias estimadas estão próximas dos parâmetros reais (que são desconhecidos na prática) e as REQMs são pequenas, como é desejável. Mesmo para tamanhos de amostra relativamente pequenos ($n \leq 20$), ambos os estimadores produziram estimativas de muito boa qualidade, em termos de baixo erro e de baixa REQM. Naturalmente, as estimativas melhoram conforme o tamanho da amostra aumenta, e os resultados são muito bons para tamanhos de amostra moderados ($n \geq 100$).

Tabela 1. Estimativas médias para ρ e raízes dos erros quadráticos médios (entre parênteses).

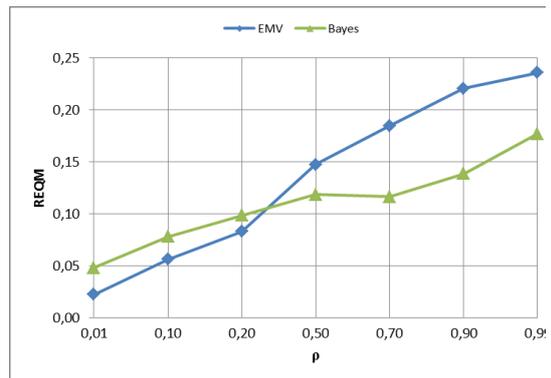
Estimador	ρ	n				
		10	20	50	100	200
EMV	0,01	0,0095 (0,0313)	0,0098 (0,0225)	0,0097 (0,0258)	0,0100 (0,0162)	0,0102 (0,0171)
	0,10	0,0982 (0,1051)	0,0997 (0,0734)	0,1008 (0,0466)	0,1016 (0,0336)	0,1012 (0,0230)
	0,20	0,1970 (0,1530)	0,2014 (0,1077)	0,2006 (0,0696)	0,2022 (0,0494)	0,2016 (0,0345)
	0,50	0,4979 (0,2770)	0,5000 (0,1869)	0,4986 (0,1222)	0,5021 (0,0888)	0,5009 (0,0615)
	0,70	0,7012 (0,3454)	0,7037 (0,2373)	0,7025 (0,1520)	0,7047 (0,1120)	0,7027 (0,0770)
	0,90	0,8988 (0,4150)	0,9028 (0,2866)	0,9021 (0,1798)	0,9060 (0,1307)	0,9032 (0,0908)
	0,99	0,9907 (0,4433)	0,9928 (0,3054)	0,9925 (0,1919)	0,9959 (0,1413)	0,9939 (0,0971)
Bayes	0,01	0,1338 (0,1289)	0,0664 (0,0617)	0,0309 (0,0255)	0,0204 (0,0148)	0,0153 (0,0089)
	0,10	0,2303 (0,1693)	0,1658 (0,1039)	0,1258 (0,0550)	0,1139 (0,0370)	0,1072 (0,0243)
	0,20	0,3252 (0,1875)	0,2755 (0,1366)	0,2298 (0,0784)	0,2165 (0,0530)	0,2086 (0,0359)
	0,50	0,5353 (0,1651)	0,5465 (0,1505)	0,5331 (0,1211)	0,5222 (0,0925)	0,5110 (0,0631)
	0,70	0,6292 (0,1660)	0,6712 (0,1347)	0,7032 (0,1089)	0,7144 (0,0968)	0,7128 (0,0755)
	0,90	0,6949 (0,2464)	0,7540 (0,1837)	0,8144 (0,1179)	0,8495 (0,0842)	0,8734 (0,0601)
	0,99	0,7204 (0,2980)	0,7829 (0,2301)	0,8486 (0,1568)	0,8866 (0,1164)	0,9162 (0,0829)

Fonte: dos autores.

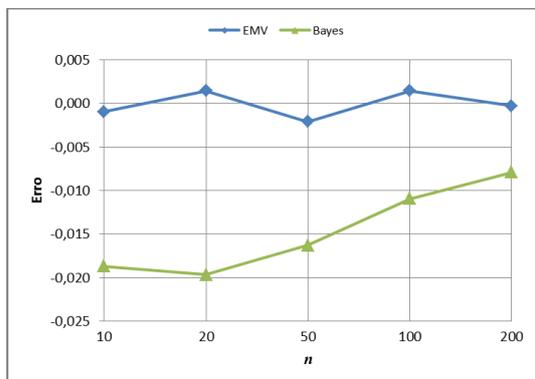
Os resultados da Tabela 1 estão resumidos na Figura 2 que mostra os erros médios e as médias das REQMs, em função dos valores de ρ e dos tamanhos de amostra n . Desse resumo, podemos concluir que as estimativas via máxima verossimilhança apresentam os menores erros, veja a Figura 2-(a). Entretanto, tomando-se como



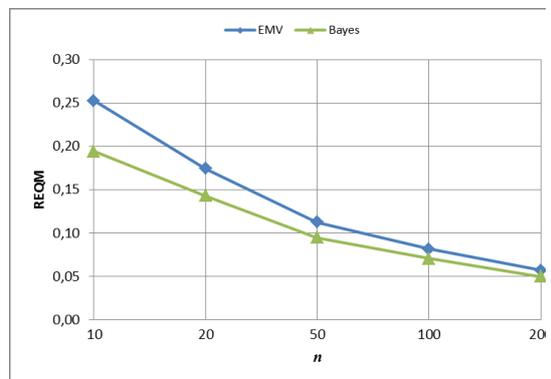
(a) Erro médio para ρ



(b) Média da REQM para ρ



(c) Erro médio para n



(d) Média da REQM para n

Figura 2. Desempenho dos estimadores para ρ .
Fonte: dos autores.

referência os valores da REQM, as estimativas bayesianas são as que produzem os melhores resultados, para $\rho > 0,33$, aproximadamente. Finalmente, olhando para o comportamento dos erros e das REQMs como funções do tamanho da amostra, n , Figura 2-(c) e -(d), confirmamos o decaimento desses valores com o crescimento do n , conforme é desejável.

4. CONCLUSÕES

Sabe-se que as filas são modelos probabilísticos, porém muitas pesquisas podem ser encontradas sobre a inferência estatística de seus parâmetros, o que pode auxiliar na sua aplicação como modelos aproximados de muitas situações práticas da vida real. Nesse artigo, tratamos do problema de estimação da intensidade de tráfego de filas markovianas de servidor único, com um esquema amostral ainda não tratado na literatura, que é uma amostra composta pelo número de chegadas durante os atendimentos. Um conjunto de simulações Monte Carlo atestou a eficiência do estimador de máxima verossimilhança em termos de erros de estimação, mas com um desempenho superior do estimador bayesiano, em termos da variabilidade das estimativas, em situações com intensidade de tráfego $\rho > 0,33$, aproximadamente. Duas alternativas complementares, portanto, foram apresentadas para a estimação da intensidade de tráfego em filas markovianas de servidor único.

Estudos futuros nesta área incluem a análise de outros tipos de filas, incluindo filas de um e vários servidores, filas finitas, filas com chegadas em massa e outros tipos de generalizações não markovianas. Esses são apenas alguns dos tópicos potenciais para estudos futuros nesta área de pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG (*Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais*, processo CEX-PPM-00564-17) e ao CNPq (*Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*, processo 305515/2018-7) pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions**. New York, NY: Dover, 1964.
- BAGCHI, T. P., CUNNINGHAM, A. A. Bayesian approach to the design of queueing systems. *INFORMS*, 10, 36–46, 1972.

- BASAK, A., CHOUDHURY, A. Bayesian inference and prediction in single server $M/M/1$ queuing model based on queue length. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* (in press), 1–13, 2019. URL <https://doi.org/10.1080/03610918.2019.1586924>
- CHOWDHURY, S., MUKHERJEE, S. P. Estimation of traffic intensity based on queue length in a single $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42, 2376–2390, 2013.
- CLARKE, A. B. Maximum Likelihood Estimates in a Simple Queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28, 1036–1040, 1957.
- CRUZ, F. R. B., QUININO, R. C., HO, L. L. Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46, 7319–7331, 2017.
- MUDDAPUR, M. V. Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 24, 327–331, 1972.
- R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing.** Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2018.
- REYNOLDS, J. F. On Estimating the Parameters of a Birth-Death Process. *Australian Journal of Statistics*, 15, 35–43, 1973.
- SINGH, S. K., ACHARYA, S. K. Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 48, 4780–4793, 2019.
- SINGH, S. K.; BANIK, A. D., GOMES, E. S., CRUZ, F. R. B. Estimating Traffic Intensity for Single Server Markovian Queueing Systems. *Unpublished Manuscript* (submitted), 1–30, 2020. URL <http://www.est.ufmg.br/ftp/fcruz/publics/mm1inf.pdf>
- SRINIVAS, V., RAO, S. S., KALE, B. K. Estimation of Measures in $M/M/1$ Queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40, 3327–3336, 2011.