

ESTIMAÇÃO DE INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS TRUNCADAS VIA AMOSTRAS FINITAS

FREDERICO R. B. CRUZ*, MÁRCIO A. C. ALMEIDA†, MARCOS F. S. V. D’ANGELO‡,
FERNANDO L. P. OLIVEIRA§

**Departamento de Estatística
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG, Brasil*

†*Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento
Universidade Federal do Pará
Belém, PA, Brasil*

‡*Departamento de Ciência da Computação
Universidade Estadual de Montes Claros
Montes Claros, MG, Brasil*

§*Departamento de Estatística
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto, MG, Brasil*

Emails: fcruz@est.ufmg.br, marcio@ufpa.br, marcos.dangelo@unimontes.br,
fernandoluiz@iceb.ufop.br

Abstract— In many everyday life situations in which some queueing is forming, queueing models may play a key role. By using such models, which are idealizations of reality, accurate performance measures are determined, such as the traffic intensity (ρ), defined as the ratio between the arrival rate and the service rate, among others. An intermediate step in the process includes the statistical estimation of the parameters of the proper model. Specifically, we are interested in the estimation of ρ for single-serve finite Markovian queues, or, in Kendall notation, $M/M/1/K$ queues. Computational results show that accurate estimates can be obtained for a broad range of values in the parametric space, by means of the maximum likelihood estimator (MLE), Bayesian, and bootstrap corrected MLE.

Keywords— Discrete event systems, Markovian queues, Bias, Bootstrap.

Resumo— Nas diversas situações cotidianas em que há formação de filas, os modelos de filas de espera podem ser de grande utilidade. Através de tais modelos, que são idealizações da realidade, acuradas medidas de desempenho podem ser determinadas, tais como a intensidade de tráfego (ρ), definida como a razão entre a taxa de chegada e a de saída, entre outras. Uma etapa intermediária nesta determinação inclui a estimação estatística dos parâmetros do modelo em questão. Especificamente, estamos interessados na estimação do ρ nos modelos de filas markovianas finitas com servidor único, ou, na notação de Kendall, filas $M/M/1/K$. Resultados computacionais mostram que estimativas acuradas podem ser obtidas para diversos valores no espaço paramétrico, via utilização do estimador de máxima verossimilhança (EMV), bayesiano e EMV corrigido via *bootstrap*.

Palavras-chave— Sistemas a eventos discretos, Filas markovianas, Vício, *Bootstrap*.

1 Introdução

De acordo com Gross et al. (2009), um sistema de filas pode ser assim descrito. Clientes chegam para serviço; aguardam, se não puderem ser imediatamente servidos; e, após esperar, deixam o sistema depois de atendidos. Os modelos teóricos de filas de espera são idealizações de diversos sistemas reais, tais como redes de computadores e telecomunicações (Kleinrock, 1975; Lakatos et al., 2013), sistemas de manufatura (Papadopolous et al., 1993; Govil & Fu, 1999), de serviços (Koole & Mandelbaum, 2002; Cruz et al., 2016), de saúde (van Brummelen et al., 2015; Almehdawe et al., 2013; Almehdawe et al., 2016), entre outros problemas semelhantes. Tais modelos possibilitam a determinação acurada de medidas de desempenho, desde que uma etapa anterior tenha

sido cumprida, que é a de *estimação estatística dos seus parâmetros*. Assim, o objetivo aqui é estimar, da maneira mais eficiente possível, um dos parâmetros mais importantes dos modelos de filas, que é a intensidade de tráfego (ρ), definida como a razão entre a taxa de chegada (λ) e a taxa de serviço (μ).

Os primeiros esforços de pesquisa na área de estimação em modelos de filas remontam aos trabalhos de Clarke (1957) e Beneš (1957), na linha da inferência clássica, com o desenvolvimento de estimativas de máxima verossimilhança para λ e μ em filas markovianas infinitas com servidor único, as mais elementares. A abordagem bayesiana é mais recente e ganha impulso após os influentes trabalhos de Armero & Bayarri (1994a; 1994b). A partir de então, com a publicação recente de vários artigos relevantes, a área continua a desenvolver-

se (para uma bibliografia atualizada na área, veja Asanjarani et al., 2017).

Entretanto, do melhor conhecimento dos autores, ainda não foram realizados estudos, como este aqui apresentado, sobre o desempenho de estimadores para ρ , para filas $M/M/1/K$, em que, na notação de Kendall (1953), as chegadas seguem um processo de Poisson (Markoviano), os tempos de serviço são exponenciais (Markovianos), o servidor é único e a capacidade máxima total de clientes simultaneamente no sistema é K , incluindo aquele em serviço. Portanto, é trazida neste artigo uma inédita avaliação empírica do desempenho de estimadores de ρ , especificamente para modelos de filas $M/M/1/K$, prevalente em alguns sistemas reais (Gross et al., 2009).

O restante do texto está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, são detalhadas as equações da fila e os estimadores para ρ . Os resultados computacionais são apresentados e discutidos na Seção 3, seguida pela Seção 4, que encerra o texto, com observações finais.

2 Modelos Matemáticos

Para filas $M/M/1/K$, é conhecido (Wagner, 1986) que a probabilidade do número de usuários N no sistema, para $n = 0, 1, \dots, K$, é dada por:

$$P(N = n) = \begin{cases} \frac{\rho^n (1-\rho)}{1-\rho^{K+1}}, & \text{para } \rho \neq 1, \\ \frac{1}{K+1}, & \text{para } \rho = 1. \end{cases} \quad (1)$$

2.1 Estimador de Máxima Verossimilhança

Considere a distribuição de probabilidade estacionária da Eq. (1). Considere agora uma amostra aleatória de tamanho n , $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, do número de clientes remanescentes no sistema nos momentos de partida. Neste caso é permitido que no máximo K clientes permaneçam no sistema. Assim, a função de verossimilhança é:

$$\begin{aligned} L(\rho, \mathbf{x}) &= \frac{\rho^{x_1} (1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \times \dots \times \frac{\rho^{x_n} (1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \\ &= \frac{\rho^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\rho)^n}{(1-\rho^{K+1})^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Note-se que a verossimilhança é uma função da intensidade de tráfego ρ e da amostra \mathbf{x} . Entretanto, somente é necessário o tamanho da amostra n e o seu somatório $\sum_{i=1}^n x_i$, que é estatística suficiente (Fisher, 1922) para ρ . Também é importante ressaltar que a implementação do estimador de máxima verossimilhança (EMV) passa pela maximização numérica da função de verossimilhança, Eq. (2), o que, dado seu comportamento suave, conforme visto na Figura 1, pode ser feito sem dificuldades por algoritmos clássicos de otimização que não fazem uso de derivadas, tais como

bissecção, seção áurea, dentre outros (para maiores detalhes sobre métodos de otimização, veja Mateus & Luna, 1986).

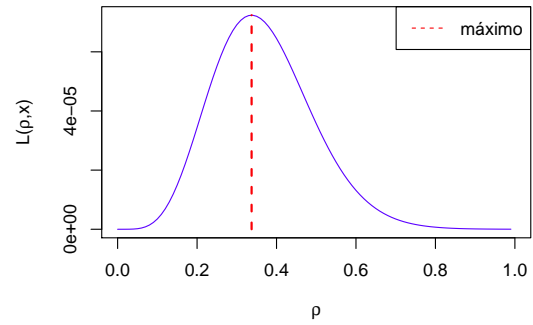


Figura 1: Função de verossimilhança, $L(\rho, \mathbf{x})$, e seu máximo, para uma amostra de tamanho $n = 10$, $\rho = 0, 20$ e $K = 5$

2.2 Inferência Bayesiana

Uma das alternativas para estimar ρ é pela metodologia bayesiana. Uma das principais diferenças em relação à metodologia clássica é que na metodologia bayesiana é permitida a incorporação da informação *a priori* sobre os parâmetros desconhecidos do modelo e, ao contrário dos métodos clássicos, os métodos bayesianos consideram estes parâmetros como variáveis aleatórias, associando a eles uma distribuição de probabilidade. Desta forma, o conhecimento que o especialista tem sobre um determinado parâmetro desconhecido pode ser levado em consideração.

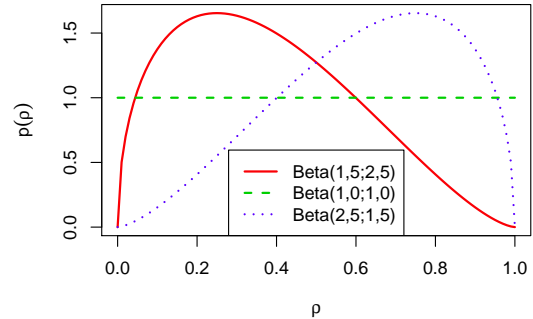


Figura 2: Funções de distribuição *a priori* $Beta(a, b)$

Assim, o processo de estimação de ρ parte da Eq. (2), assume uma distribuição *a priori* beta. Entre outras escolhas possíveis, optou-se pela beta, por ser definida no espaço paramétrico $\rho \in (0, 1)$ e pela flexibilidade, conforme visto na Figura 2. Assim, considerando-se $p(\rho) \sim Beta(a, b)$, conforme já utilizado com sucesso em inferência em outras filas markovianas (Choudhury & Borthakur, 2008; Almeida & Cruz, 2017), a seguinte distribuição *a posteriori* é obtida:

$$\begin{aligned} p(\rho|\mathbf{x}) &\propto L(\rho, \mathbf{x}) \times p(\rho) \\ &\propto \frac{\rho^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-\rho)^n}{(1-\rho^{K+1})^n} \times \\ &\quad \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \rho^{(a-1)} (1-\rho)^{(b-1)} \end{aligned}$$

$$p(\rho|\mathbf{x}) \propto \frac{\rho^{\sum_{i=1}^n x_i + a - 1} (1 - \rho)^{n + b - 1}}{(1 - \rho^{K+1})^n}. \quad (3)$$

Dado que a distribuição *a posteriori* para ρ , Eq. (3), não representa uma distribuição conhecida, é necessário utilizar algum método de aproximação, que envolve a geração de amostras da distribuição de interesse, uma vez que mesmo sem conhecer a distribuição, é ainda possível gerar uma amostra desta distribuição, conforme visto na Figura 3. O método aqui utilizado é o *adaptive rejection Metropolis sampling* (ARMS), desenvolvido por Gilks et al. (1995). É importante notar que, embora seja conhecido desde os anos 1990, somente mais recentemente, com os modernos computadores, o ARMS ficou viável para aplicações como esta aqui apresentada. Como será considerada a função de perda quadrática, o estimador pontual de Bayes é a média aritmética simples da amostra extraída da distribuição *a posteriori* para ρ (ver Figura 3).

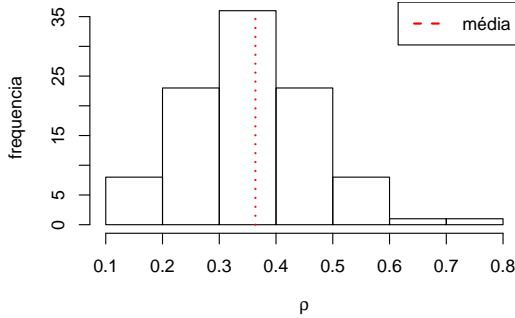


Figura 3: Amostra de tamanho 100 da distribuição *a posteriori* e sua média, para $n = 10$, $\rho = 0, 20$, $K = 5$ e distribuição *a priori* Beta(1, 5; 2.5)

2.3 Correção Bootstrap

Dentre os métodos comumente utilizados para correção de vício de estimadores, encontra-se o *bootstrap*, proposto por Efron & Tibshirani (1993), que, na sua versão não paramétrica, consiste na realização de B reamostragens (usualmente, em torno de 200), $\mathbf{x}^{(i)}$, com reposição. O parâmetro Θ é reestimado, tira-se a média de tais estimativas, $\bar{\Theta}_{(\bullet)}$ e uma estimativa do vício é dada por:

$$\text{vício} = \bar{\Theta}_{(\bullet)} - \hat{\Theta}, \quad (4)$$

em que $\hat{\Theta}$ é a estimativa obtida da amostra original. Pode-se então obter a seguinte versão corrigida do estimador:

$$\tilde{\Theta}_B = 2\hat{\Theta} - \bar{\Theta}_{(\bullet)}. \quad (5)$$

Este método (ver Figura 4) foi usado por diversos pesquisadores no passado, com resultados bastante satisfatórios em correção de vício, construção de intervalos de confiança e testes de hipóteses (Cruz et al., 2004; Pereira et al., 2015; Almeida & Cruz, 2017). O parâmetro K é o número

máximo de usuários simultaneamente (em serviço e em espera) na fila $M/M/1/K$. Note-se que em geral são utilizadas em torno de 200 replicações *bootstrap* e que a correção dá-se sobre o EMV.

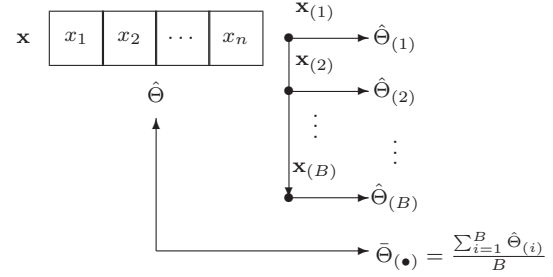


Figura 4: O método *bootstrap*

2.4 Simulação de Filas $M/M/1/K$

O número de usuários presentes em uma fila $M/M/1/K$ nos momentos de partida, Eq. (1), não segue uma distribuição conhecida. Assim, é necessário utilizar algum método de geração de variáveis aleatórias para uma distribuição discreta geral. Na literatura existem alguns métodos que são bastante utilizados. Um deles é o análogo discreto do método da transformação inversa, em que, basicamente, é necessário gerar números $R \sim \text{Unif}(0, 1)$, isto é, de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, e conhecer as probabilidades de interesse, $P\{N = n_j\} = p_j$, $\forall j$. Assim, para simular uma variável aleatória discreta N com função de probabilidade

$$P\{N = n_j\} = p_j, \quad j = 0, 1, \dots, \sum_{\forall j} p_j = 1,$$

deve-se fazer:

$$N = \begin{cases} n_0, & \text{se } R \leq p_0, \\ n_1, & \text{se } p_0 < R \leq p_0 + p_1, \\ \vdots & \\ n_j, & \text{se } \sum_{i=0}^{j-1} p_i < R \leq \sum_{i=0}^j p_i, \\ \vdots & \end{cases}$$

Como

$$P\{N = n_j\} = P\left\{\sum_{i=0}^{j-1} p_i < R \leq \sum_{i=0}^j p_i\right\} = p_j,$$

então N segue a distribuição desejada.

No caso das filas $M/M/1/K$, tem-se, da Eq. (1), que:

$$\sum_{i=0}^n p_i = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho^{K+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, K.$$

Fazendo $c = 1 - \rho^{K+1}$, segue que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} p_i &< R &< \sum_{i=0}^N p_i \\ \frac{1 - \rho^N}{c} &< R &< \frac{1 - \rho^{N+1}}{c} \\ 1 - \rho^N &< Rc &< 1 - \rho^{N+1} \\ -1 + \rho^{N+1} &\leq -Rc &< -1 + \rho^N \\ \rho^{N+1} &\leq 1 - Rc &< \rho^N \\ (N+1) \log(\rho) &\leq \log(1 - Rc) &< N \log(\rho) \\ N &< \frac{\log(1 - Rc)}{\log(\rho)} &\leq N + 1 \Rightarrow \\ \frac{\log(1 - Rc)}{\log(\rho)} - 1 &\leq N &< \frac{\log(1 - Rc)}{\log(\rho)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N = \left\lceil \frac{\log(1 - Rc)}{\log(\rho)} - 1 \right\rceil, \quad (6)$$

em que $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro não inferior a x .

3 Resultados Computacionais

Todos os algoritmos foram codificados em R (R Core Team, 2017) e estão disponíveis a pedido, para fins de pesquisa. Códigos em R são conhecidos por rodar em diversos computadores e sistemas operacionais. Em um *notebook* comum, cada estimação toma tipicamente menos de um segundo para ser calculada. Para análise de desempenho dos estimadores, 100 amostras foram geradas a partir da Eq. (6), de tamanhos $n \in \{10; 20; 50\}$ e intensidades de tráfego $\rho \in \{0, 10; 0, 50; 0, 90\}$. Para cada um desses cenários, foram calculadas médias (sobre essas 100 replicações Monte Carlo) das estimativas pontuais de ρ ; (i) pelo EMV, via maximização numérica da verossimilhança, Eq. (2); (ii) pelo método bayesiano, com distribuição *a priori* Beta(1, 5; 2, 5) e médias de amostras (de tamanho 100) da distribuição *a posteriori*, Eq. (3), obtidas pelo método ARMS (Gilks et al., 1995); (iii) e estimativas pontuais pelo EMV, corrigidas pelo método *bootstrap*, Eq. (5), com $B = 200$. Também foram calculadas os respectivos erros padrão da média (EPM). Os resultados podem ser vistos nas Tabelas 1–3.

Para as filas com capacidade $K = 5$, Tabela 1, notamos que o erro de estimação médio (diferença entre estimativa média e ρ) segue aproximadamente constante para o EMV e para o *bootstrap*, com $\rho \leq 0, 50$. O estimador bayesiano não apresentou desempenho equivalente, inclusive as estimativas tendem a superestimar o valor verdadeiro (erro positivo), quando $\rho < 0, 5$, e a subestimar, caso contrário. Em relação ao tamanho da amostra n , todos os estimadores apresentaram uma redução monotônica no erro, conforme esperado. Do lado do EPM, que mede a variabilidade das estimativas, o estimador bayesiano apresenta-se como

a melhor alternativa, uma vez que apresenta sempre os menores valores. Entre o EMV e EMV corrigido *bootstrap*, os valores são semelhantes, com uma vantagem para o EMV original.

Aumentando-se um pouco a capacidade da fila, para $K = 20$, Tabela 2, notamos um comportamento bastante semelhante. Entretanto, a dificuldade de estimação para intensidades de tráfego $\rho \rightarrow 1, 0$ parece ter diminuído, sendo que os maiores erros de estimação médios ocorrem com $\rho = 0, 5$, para os estimadores EMV e EMV corrigido. Este comportamento é similar ao observado para filas markovianas infinitas, $M/M/1$ (Almeida & Cruz, 2015). Por seu lado, o estimador bayesiano mantém seu padrão de desempenho, que é pior, em termos de erro de estimação médio. As estimativas são superestimadas para $\rho < 0, 5$ e subestimadas, caso contrário. Todos os estimadores apresentam erros que convergem para zero, à medida que o tamanho da amostra cresce, com destaque para o estimador EMV corrigido, que apresenta erro de estimação médio aproximadamente zero, para amostras $n \approx 50$. Do ponto de vista do EPM, novamente os menores valores são aqueles obtidos para o estimador bayesiano, que parece apresentar a menor variabilidade, embora não tenha os menores erros de estimação médios.

Finalmente, para filas com $K = 80$, Tabela 3, o comportamento observado é similar àquele relatado por Almeida & Cruz (2015), para filas markovianas infinitas, em termos de erros de estimação médios e EPM. Esta constatação é uma evidência da correção das nossas implementações e da qualidade dos resultados computacionais apresentados.

4 Conclusões e Observações Finais

O problema de estimação da intensidade de tráfego nas filas markovianas truncadas $M/M/1/K$ apresenta-se como bastante desafiador. De fato, nenhum estimador foi absolutamente superior a outro, considerando os quesitos erro de estimação e EPM. A estimação pelos métodos EMV e EMV corrigido apresenta menor vício que o estimador bayesiano, mas apresenta uma maior variabilidade. Possivelmente pela assimetria da distribuição *a posteriori*, o estimador bayesiano não foi competitivo, em termos de erro de estimação. Em geral, para amostras de tamanho $n = 50$ e filas com $K \geq 20$, os erros de estimação médios foram inferiores a 0,005, superando este valor apenas para o estimador bayesiano, em filas de capacidade total $K = 5$.

No que diz respeito ao comportamento dos erros de estimação médios e EPM médios em função da intensidade de tráfego ρ , podemos confirmar os maiores erros quando as amostras são pequenas ($n \leq 20$) e as intensidades de tráfego elevadas, $\rho \approx 1, 0$, diferentemente do que ocorre com as filas $M/M/1$, que possuem maior vício para

Tabela 1: Estimativas médias de ρ e EPM (entre parênteses) para $K = 5$

Estimação	ρ	n		
		10	20	50
EMV	0,10	0,07983 (0,00738)	0,09214 (0,00626)	0,09513 (0,00375)
	0,50	0,47732 (0,01264)	0,49390 (0,00943)	0,49748 (0,00558)
	0,90	0,86290 (0,01262)	0,88850 (0,00933)	0,89979 (0,00655)
Beta	0,10	0,16018 (0,00508)	0,13566 (0,00527)	0,11361 (0,00343)
	0,50	0,46407 (0,01015)	0,48578 (0,00848)	0,49468 (0,00536)
	0,90	0,73145 (0,00758)	0,79029 (0,00569)	0,84142 (0,00413)
Bootstrap	0,10	0,08499 (0,00778)	0,09584 (0,00642)	0,09677 (0,00381)
	0,50	0,48948 (0,01235)	0,50059 (0,00929)	0,49999 (0,00555)
	0,90	0,88519 (0,01408)	0,90313 (0,01055)	0,90667 (0,00731)

Obs.: Em negrito, valores mais próximos do exato ρ e menores EPM (entre parênteses)

Tabela 2: Estimativas médias de ρ e EPM (entre parênteses) para $K = 20$

Estimação	ρ	n		
		10	20	50
EMV	0,10	0,07976 (0,00736)	0,09206 (0,00623)	0,09511 (0,00374)
	0,50	0,46662 (0,01059)	0,48536 (0,00739)	0,49461 (0,00468)
	0,90	0,88971 (0,00547)	0,89813 (0,00372)	0,89888 (0,00223)
Beta	0,10	0,15906 (0,00509)	0,13425 (0,00505)	0,11376 (0,00344)
	0,50	0,45084 (0,00900)	0,47404 (0,00690)	0,48923 (0,00459)
	0,90	0,84888 (0,00474)	0,87609 (0,00326)	0,89037 (0,00208)
Bootstrap	0,10	0,08509 (0,00778)	0,09585 (0,00641)	0,09678 (0,00381)
	0,50	0,48686 (0,01072)	0,49702 (0,00738)	0,49936 (0,00470)
	0,90	0,89750 (0,00536)	0,90149 (0,00372)	0,89995 (0,00220)

Obs.: Em negrito, valores mais próximos do exato ρ e menores EPM (entre parênteses)

Tabela 3: Estimativas médias de ρ e EPM (entre parênteses) para $K = 80$

Estimação	ρ	n		
		10	20	50
EMV	0,10	0,07976 (0,00736)	0,09206 (0,00623)	0,09511 (0,00374)
	0,50	0,46659 (0,01058)	0,48534 (0,00739)	0,49460 (0,00468)
	0,90	0,88826 (0,00341)	0,89573 (0,00207)	0,89812 (0,00133)
Beta	0,10	0,15907 (0,00509)	0,13425 (0,00505)	0,11376 (0,00344)
	0,50	0,45061 (0,00897)	0,47386 (0,00685)	0,48930 (0,00459)
	0,90	0,86579 (0,00384)	0,88486 (0,00224)	0,89361 (0,00137)
Bootstrap	0,10	0,08509 (0,00778)	0,09585 (0,00641)	0,09678 (0,00381)
	0,50	0,48690 (0,01072)	0,49703 (0,00738)	0,49936 (0,00470)
	0,90	0,89743 (0,00322)	0,90023 (0,00198)	0,89987 (0,00131)

Obs.: Em negrito, valores mais próximos do exato ρ e menores EPM (entre parênteses)

$\rho \approx 0,5$. Possivelmente devido ao truncamento do número de usuários no tamanho máximo da fila, K , os sistemas com altas intensidades de tráfego apresentam-se como os que exigem maior esforço computacional e que são os mais difíceis de estimar. Finalmente, é importante ressaltar que, para filas com capacidade $K = 80$, o erro de estimação médio é maior e o EPM é mais alto quando $\rho \approx 0,5$.

Trabalhos futuros nesta área incluem o teste de outros estimadores bayesianos pontuais (por exemplo, a mediana, pela assimetria da distribuição *a posteriori*), bem como outras distribuições *a priori*.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (processos 304671/2014-2, 305841/2016-5 e 300825/2016-

1), à FAPEMIG (processos APQ-02119-15, BIP-00106-16, CEX-PPM-00564-17 e CEX-PPM-00427-17) e à UFPA, pelo auxílio financeiro parcial a esta pesquisa.

Referências

- Almehdawe, E., Jewkes, B. & He, Q.-M. (2013). A Markovian queueing model for ambulance offload delays, *European Journal of Operational Research* **226**(3): 602–614.
- Almehdawe, E., Jewkes, B. & He, Q.-M. (2016). Analysis and optimization of an ambulance offload delay and allocation problem, *Omega* **65**: 148–158.
- Almeida, M. A. C. & Cruz, F. R. B. (2015). Análise de desempenho em filas $M/M/1$ usando

- uma abordagem bayesiana, *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - III CMAC-Sudeste 2015*, v. 3 de *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, Vitória, ES, Brasil, pp. 0200571–0200577.
- Almeida, M. A. C. & Cruz, F. R. B. (2017). A note on Bayesian estimation of traffic intensity in single-server Markovian queues, *Communications in Statistics - Simulation & Computation* (Available on line 13 Jul 2017). doi: 10.1080/03610918.2017.1353614
- Armero, C. & Bayarri, M. J. (1994a). Bayesian prediction in $M/M/1$ queues, *Queueing Systems* **15**(1-4): 401–417.
- Armero, C. & Bayarri, M. J. (1994b). Prior assessments for prediction in queues, *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)* **43**(1): 139–153.
- Asanjarani, A., Nazarathy, Y. & Pollett, P. K. (2017). Parameter and state estimation in queues and related stochastic models: A bibliography (acessado em 10/Fev/2017). url: <http://www.maths.uq.edu.au/%7Epkp/papers/Qest/Qest.html>
- Beneš, V. E. (1957). A sufficient set of statistics for a simple telephone exchange model, *Bell Labs Technical Journal* **36**(4): 939–964.
- Choudhury, A. & Borthakur, A. C. (2008). Bayesian inference and prediction in the single server Markovian queue, *Metrika* **67**(3): 371–383.
- Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue, *The Annals of Mathematical Statistics* **28**(4): 1036–1040.
- Cruz, F. R. B., Colosimo, E. A. & Smith, J. M. (2004). Sample size corrections for the maximum partial likelihood estimator, *Communications in Statistics - Simulation & Computation* **33**(1): 35–47.
- Cruz, F. R. B., Quinino, R. C. & Ho, L. L. (2016). Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue, *Communications in Statistics - Simulation & Computation* (Available on line 29 Sep 2016). doi: 10.1080/03610918.2016.1236953
- Efron, B. & Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, London, UK.
- Fisher, R. A. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **222**: 309–368.
- Gilks, W. R., Best, N. G. & Tan, K. K. C. (1995). Adaptive rejection Metropolis sampling within Gibbs sampling, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* **44**(4): 455–472.
- Govil, M. K. & Fu, M. C. (1999). Queueing theory in manufacturing: A survey, *Journal of Manufacturing Systems* **18**(3): 214.
- Gross, D., Shortle, J. F., Thompson, J. M. & Harris, C. M. (2009). *Fundamentals of Queueing Theory*, 4 ed., Wiley-Interscience, New York, NY, EUA.
- Kendall, D. G. (1953). Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains, *Annals Mathematical Statistics* **24**: 338–354.
- Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Vol. I: Theory*, John Wiley & Sons, New York, NY, EUA.
- Koole, G. & Mandelbaum, A. (2002). Queueing models of call centers: An introduction, *Annals of Operations Research* **113**(1-4): 41–59.
- Lakatos, L., Szeidl, L. & Telek, M. (2013). *Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications*, Springer Science & Business Media, New York, NY, EUA.
- Mateus, G. R. & Luna, H. P. L. (1986). *Programação Não-Linear*, V Escola de Computação, Belo Horizonte, Brazil.
- Papadopolous, H. T., Heavey, C. & Browne, J. (1993). *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*, Springer Science & Business Media.
- Pereira, L. C. R., Almeida, M. A. C., Cruz, F. R. B. & Oliveira, F. L. P. (2015). Inferência e correção de vício em filas markovianas de servidor Único, *II Encontro Goiano de Probabilidade e Estatística - II EnGOPE*, Goiânia, GO, Brasil, p. 1–12.
- R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. url: <http://www.R-project.org/>
- van Brummelen, S. P. J., Kort, W. L. D. & van Dijk, N. M. (2015). Waiting time computation for blood collection sites, *Operations Research for Health Care* **7**: 70–80.
- Wagner, H. M. (1986). *Pesquisa Operacional*, 2 ed., Prentice-Hall do Brasil Ltda., Rio de Janeiro.