

CORREÇÃO DO VÍCIO EM ESTIMATIVAS BAYESIANAS DA INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS MARKOVIANAS DE SERVIDOR ÚNICO

Eriky S. Gomes

Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil
eriky-tn@ufmg.br

Frederico R. B. Cruz

Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil
fcruz@est.ufmg.br

RESUMO

Neste artigo é considerado o problema de correção de vício de estimativas bayesianas para uma importante medida de desempenho em filas markovianas de servidor único, a intensidade de tráfego ρ , que fornece, entre outras informações importantes, a fração de tempo que tal sistema de filas encontra-se ocupado. Dentre os vários possíveis, é considerado um esquema amostral bastante prático, que é observar o número de chegadas de clientes durante o tempo de atendimento de um cliente. A intensidade de tráfego é estimada por uma metodologia bayesiana, com uma distribuição a priori beta e uma função de perda quadrática, que apresenta um vício grande em comparação com o estimador clássico de máxima verossimilhança. Assim, dois métodos computacionalmente intensivos, o bootstrap e o jackknife, são aplicados com sucesso para a correção desse vício, conforme demonstrado por meio de simulações de Monte Carlo.

PALAVRAS CHAVE. Filas markovianas, Estimação bayesiana, Correção de vício.

Tópico: EST&MP – Estatística e Modelos Probabilísticos

ABSTRACT

This article considers the bias correction problem in Bayesian estimates for an important measure of performance in single-server Markovian queues, the traffic intensity ρ , which offers, among other important information, the fraction of time that such queuing system is busy. Among the many possibilities, a very practical sampling scheme is considered, which is to observe the number of arrivals during the service time of a client. The traffic intensity is estimated by a Bayesian methodology, with a beta prior distribution and a square error loss function, which presents a great bias in comparison with the classic maximum likelihood estimator. Thus, two computationally intensive methods, the bootstrap and jackknife, are successfully applied for the correction of this bias, as demonstrated through Monte Carlo simulations.

KEYWORDS. Markovian queues, Bayesian estimate, Bias correction.

Paper topic: EST&MP – Statistics and Probability Models

1. Introdução

Diversas situações reais envolvem a chegada de usuários que precisam esperar para serem atendidos, tais como clientes que chegam em um caixa de banco ou pacientes que aguardam por um determinado atendimento médico. Esses sistemas podem ser analisados pela teoria das filas e um dos sistemas de filas mais simples é a fila markoviana de servidor único, em que chegadas ocorrem de acordo com um processo de Poisson, com uma taxa λ , e os tempos de serviço são distribuídos de forma independente e exponencial, com taxa de serviço μ . Segundo a notação de Kendall, denotamos essa filas como $M/M/1$. Em virtude das aplicações práticas das filas, um problema que atrai interesse de muitos pesquisadores é a estimativa estatísticas dos seus parâmetros.

A teoria das filas tem uma longa história. Ainda assim, a inferência para sistemas de filas foi desenvolvida recentemente, iniciando-se com o trabalho pioneiro de Clarke [1957], que adotou o método clássico da máxima verossimilhança para estimar as taxas λ e μ , em uma fila $M/M/1$ estável, isto é, com intensidade de tráfego $\rho < 1$, em que $\rho = \lambda/\mu$. A abordagem bayesiana, por sua vez, foi introduzida nesses sistemas no início dos anos 1970 (ver Bagchi e Cunningham [1972]; Muddapur [1972]; Reynolds [1973]). Desde então, trabalhos significativos foram desenvolvidos nessa área, dentre os quais cabe citar a série de artigos de Armero e Bayarri [1994, 1997, 1999, 2001], e, mais recentemente, de Cruz et al. [2017]; Singh e Acharya [2019]; Acharya et al. [2020]; Almeida et al. [2020]; Chandrasekhar et al. [2020]; Singh e Acharya [2021]; Basak e Choudhury [2021] e Singh et al. [2021], entre outros.

Neste artigo, apresentamos resultados de um estudo sobre a estimação estatística da intensidade de tráfego ρ , segundo a metodologia bayesiana, em sistemas de filas $M/M/1$, sob um esquema amostral em que observamos o número de chegadas de clientes durante o tempo de atendimento de um cliente, que é uma maneira bastante prática e efetiva de coletar as amostras. Entretanto, conforme observado por Singh et al. [2021], tais estimativas, embora apresentem variância significativamente inferior aos estimadores clássicos de máxima verossimilhança, apresentam considerável vício. Assim, são aqui propostas metodologias computacionalmente intensivas para a correção desse vício observado nos estimadores bayesianos.

O restante desse artigo está organizado da seguinte forma. A metodologia utilizada é apresentada na Seção 2. Os resultados das simulações realizadas são apresentadas e discutidas na Seção 3. Finalmente, a Seção 4 conclui o artigo, com observações finais e tópicos para futuras pesquisas na área.

2. Materiais e Métodos

2.1. Inferência Clássica

Considere um modelo de filas $M/M/1$, na notação de Kendall. Nesse modelo, as chegadas ocorrem segundo um processo de Poisson e os tempos de atendimento são distribuídos exponencialmente. Sendo assim, podemos representar as funções densidade de probabilidade dos tempos entre chegadas e de serviço, respectivamente, por

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ e} \\ b(t) = \mu e^{-\mu t}, \end{cases} \quad (1)$$

em que $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ são as taxas de chegada e de serviço, respectivamente.

Na análise da cadeia de Markov associada ao modelo de filas $M/G/1$, sejam $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$, variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas que denotam o número de chegadas durante o tempo de serviço do i -ésimo cliente. Para uma fila

$M/M/1$, pode-se mostrar que a variável aleatória X_i segue uma distribuição de probabilidade geométrica com parâmetro $1/(1 + \rho)$, com a seguinte função massa de probabilidade:

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\rho = \lambda/\mu > 0$ é a intensidade de tráfego.

Suponha, agora, que seja extraída uma amostra $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, de tamanho n , da função de probabilidade dada pela Eq. (2). Assim, a função de verossimilhança correspondente a essa amostra é dada pela equação

$$L(\rho, \mathbf{x}) = \rho^y (1 + \rho)^{-(n+y)}, \quad (3)$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$, de onde se obtém o seguinte estimador de máxima verossimilhança, isto é, que produz o valor máximo da função de verossimilhança dada pela Eq. (3):

$$\hat{\rho}_{\text{MLE}} = \frac{y}{n} = \arg \max_{\rho} L(\rho, \mathbf{x}), \quad (4)$$

Note-se que, sob diferentes esquemas amostrais, a definição da função de verossimilhança altera-se, assim como todo o desenvolvimento matemático que se segue para obtenção do estimador de máxima verossimilhança.

2.2. Inferência Bayesiana

Pode-se também estimar a intensidade de tráfego ρ sob a ótica bayesiana. Para tal, assume-se que o sistema de filas esteja em estado estacionário e estável, ou seja, $0 < \rho < 1$. Na inferência estatística bayesiana, o objetivo do pesquisador é obter regras de decisão sob uma função de perda especificada e uma distribuição de probabilidade a priori no espaço do parâmetro. Será considerada aqui a distribuição a priori beta, conforme proposto recentemente por Singh et al. [2021], e uma função de perda quadrática [Zaka e Akhter, 2014], que é simétrica e atribui igual perda para superestimação ou subestimação do parâmetro. Dessa forma, dada uma amostra aleatória $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, de tamanho n , pode ser mostrado que o estimador bayesiano do parâmetro θ , sob a função de perda quadrática, é dado por $\hat{\theta}_B = \mathbb{E}(\theta | \mathbf{x})$.

Como a intensidade de tráfego ρ , sob a condição de estacionariedade e estabilidade da fila, é definida no intervalo de 0 a 1, pode-se mostrar que a seguinte distribuição beta é uma boa escolha como distribuição a priori [Singh et al., 2021].

$$p_1(\rho | \alpha, \beta) = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha, \beta)} \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1}, \quad 0 < \rho < 1, \quad (5)$$

em que $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ é a função beta, que dá a constante normalizadora da distribuição a priori beta, definida por:

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 \rho^{\alpha-1} (1 - \rho)^{\beta-1} d\rho, \quad (6)$$

em que $\alpha, \beta > 0$ são os hiperparâmetros. Assim, para uma dada amostra \mathbf{x} , a distribuição a posteriori de ρ , para a distribuição a priori $p_1(\rho | \alpha, \beta)$, Eq. (5), é dada por:

$$\begin{aligned}
 q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) &= \frac{L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta)}{\int_0^1 L(\rho, \mathbf{x}) \times p_1(\rho | \alpha, \beta) d\rho} \\
 &= \frac{\rho^{y+\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1} (1+\rho)^{-(n+y)}}{\mathcal{B}(y+\alpha, \beta) {}_2\mathcal{F}_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

em que $y = \sum_{i=1}^n x_i$ e ${}_2\mathcal{F}_1(a, b, c, z)$ é a função hipergeométrica gaussiana, dada pela seguinte forma integral [Abramowitz e Stegun, 1964].

$${}_2\mathcal{F}_1(a, b, c, z) = \frac{1}{\mathcal{B}(b, c-b)} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-b-1} (1-zu)^{-a} du, \quad z, c > b > 0. \quad (8)$$

Conseqüentemente, o estimador bayesiano para ρ , para uma amostra aleatória \mathbf{x} , é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{\text{Bayes}} &= \mathbb{E}(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) = \int_0^1 \rho q_1(\rho | \mathbf{x}, \alpha, \beta) d\rho \\
 &= \frac{\int_0^1 \rho^{(y+\alpha+1)-1} (1-\rho)^{\beta-1} (1+\rho)^{-(n+y)} d\rho}{\mathcal{B}(y+\alpha, \beta) {}_2\mathcal{F}_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)} \\
 &= \frac{(y+\alpha)}{(y+\alpha+\beta)} \frac{{}_2\mathcal{F}_1(n+y, y+\alpha+1, y+\alpha+\beta+1, -1)}{{}_2\mathcal{F}_1(n+y, y+\alpha, y+\alpha+\beta, -1)}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

2.3. Correção de Vício via Bootstrap

Dentre os métodos para correção de vício em estimadores, encontra-se o bootstrap [Efron, 1982]. Em sua versão paramétrica, B reamostragens (normalmente usa-se B em torno de 1.000) são extraídas da distribuição discreta (geométrica) definida pela Eq. (2), em que o parâmetro ρ é aquele estimado através desse estimador viciado $\hat{\rho}_v$, para a amostra aleatória original $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, de tamanho n . O parâmetro de interesse $\hat{\rho}_{(i)}$ é estimado para cada uma dessas i reamostras bootstrap, também a partir do estimador viciado. Então, a seguinte média dessas estimativas é tomada,

$$\bar{\rho}_{(\bullet)} = \frac{\sum_{i=1}^B \hat{\rho}_{(i)}}{B}, \quad (10)$$

da qual se pode estimar o vício:

$$\text{bias}_{\text{boot}} = \bar{\rho}_{(\bullet)} - \hat{\rho}. \quad (11)$$

A correção é obtida, então, pela seguinte expressão:

$$\hat{\rho}_{\text{boot}} = \hat{\rho}_v - \text{bias}_{\text{boot}} = 2\hat{\rho}_v - \bar{\rho}_{(\bullet)}. \quad (12)$$

2.4. Correção de Vício via Jackknife

O jackknife é uma abordagem geral, útil também para correção de vício em estimadores [Efron, 1982]. Seja $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma amostra aleatória de tamanho n , $\hat{\rho}_v$, um estimador (viciado) para o parâmetro ρ e $\text{bias}_{\text{jack}}$, o vício a ser estimado. No jackknife, usam-se amostras jackknife, $\mathbf{x}_{(i)} = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$, em que a i -ésima observação foi removida, para calcular estimativas jackknife, $\hat{\rho}_{(i)}$, obtidas a partir do estimador viciado. Então, a média $\bar{\rho}_{(\bullet)}$ dessas estimativas é tomada, Eq. (10), para estimar o vício pela seguinte expressão,

$$\text{bias}_{\text{jack}} = (n - 1) (\bar{\rho}_{(\bullet)} - \hat{\rho}), \quad (13)$$

a partir da qual se obtém a correção:

$$\hat{\rho}_{\text{jack}} = \hat{\rho}_v - \text{bias}_{\text{jack}} = n\hat{\rho}_v - (n - 1)\bar{\rho}_{(\bullet)}. \quad (14)$$

3. Resultados Computacionais

O desempenho dos estimadores e sua correções foi avaliado por meio de simulações de Monte Carlo. Todos os estimadores foram codificados em R [R Core Team, 2020], estando as implementações disponíveis, a pedido, para pesquisadores e profissionais interessados. Os experimentos foram executados em um PC rodando Microsoft Windows(C) 7 Professional com Intel(R) Core(TM) i7-2640M CPU 2,80 GHz e 6 GB de RAM.

Nas simulações Monte Carlo foram geradas 1.000 amostras (número menores e maiores de replicações foram testados, sem alteração significativa das conclusões aqui relatadas), para diferentes intensidades de tráfego $\rho \in \{0, 01; 0, 10; 0, 20; 0, 50; 0, 70; 0, 90; 0, 99\}$ e diferentes tamanhos de amostras $n \in \{10; 20; 50; 100; 200\}$. As médias e variâncias foram calculadas para as estimativas pontuais de ρ obtidas através das seguintes maneiras: (i) estimador de máxima verossimilhança, Eq. (4), (ii) estimador bayesiano, Eq. (9), (iii) estimador bayesiano com correção de vício via bootstrap paramétrico, Eq. (12), e (iv) estimador bayesiano com correção de vício via jackknife, Eq. (14).

Algumas combinações de hiperparâmetros para a distribuição a priori beta $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ são ilustradas na Figura 1, representando vários conjuntos de conhecimentos a priori. Sem perda de generalidade, apresentamos resultados apenas para $\mathcal{B}(1.0, 1.1)$, que é uma distribuição a priori não informativa (ver Figura 1). Os resultados obtidos com diferentes combinações de hiperparâmetros (não mostrados) não mudam nossas conclusões em geral.

Apresentamos os resultados na Tabela 1, em termos das médias das estimativas e suas variâncias. Em geral, as médias das estimativas estão próximas dos valores verdadeiros (definidos na simulação, mas não conhecidos na prática), embora o MLE apresente uma variância elevada para as intensidades de tráfego altas. Além disso, nota-se que as estimativas convergem para o valor real do parâmetro e a variância diminui conforme o tamanho das amostras cresce, o que é uma característica desejável. As Figuras 2-(a), -(b), -(c), -(d) sintetizam os resultados da Tabela 1, mostrando o vício e a variância das estimativas em função da intensidade de tráfego ρ e do tamanho de amostra n .

A partir da Figuras 2-(a) e -(b), é perceptível que as estimativas corrigidas via bootstrap e jackknife apresentam desempenho superior àquelas viciadas nos limites do espaço paramétrico ($\rho \approx 0$ e 1), mas com resultados piores quando no centro do espaço paramétrico ($0.5 < \rho < 0.7$). Observa-se, também, que o vício das estimativas bootstrap e jackknife é praticamente nulo para valores baixos de intensidade de tráfego ($\rho < 0.2$), praticamente sem aumentar a variância. Quando observamos o desempenho para valores altos

Tabela 1: Estimativas médias e variâncias (entre parênteses) para ρ

Estimador	ρ	n				
		10	20	50	100	200
EMV	0,10	0,096 (0,010)	0,098 (0,006)	0,100 (0,002)	0,099 (0,001)	0,099 (0,001)
	0,20	0,197 (0,023)	0,200 (0,012)	0,202 (0,005)	0,201 (0,002)	0,200 (0,001)
	0,50	0,495 (0,068)	0,500 (0,037)	0,502 (0,015)	0,500 (0,008)	0,500 (0,004)
	0,70	0,689 (0,109)	0,696 (0,059)	0,700 (0,023)	0,699 (0,012)	0,701 (0,006)
	0,90	0,882 (0,160)	0,895 (0,085)	0,901 (0,033)	0,900 (0,018)	0,901 (0,008)
	0,99	0,976 (0,188)	0,987 (0,096)	0,992 (0,039)	0,991 (0,021)	0,991 (0,010)
B-SELF	0,10	0,223 (0,010)	0,162 (0,007)	0,124 (0,002)	0,111 (0,001)	0,105 (0,001)
	0,20	0,318 (0,017)	0,270 (0,013)	0,230 (0,005)	0,215 (0,003)	0,207 (0,001)
	0,50	0,525 (0,022)	0,536 (0,021)	0,531 (0,013)	0,518 (0,008)	0,510 (0,004)
	0,70	0,614 (0,020)	0,655 (0,018)	0,694 (0,012)	0,705 (0,009)	0,708 (0,005)
	0,90	0,679 (0,017)	0,739 (0,013)	0,806 (0,007)	0,839 (0,005)	0,867 (0,003)
	0,99	0,705 (0,015)	0,770 (0,010)	0,840 (0,005)	0,878 (0,003)	0,910 (0,002)
Bootstrap	0,10	0,116 (0,015)	0,097 (0,006)	0,098 (0,002)	0,099 (0,001)	0,100 (0,001)
	0,20	0,235 (0,029)	0,206 (0,014)	0,199 (0,005)	0,200 (0,003)	0,200 (0,001)
	0,50	0,524 (0,047)	0,523 (0,035)	0,508 (0,016)	0,500 (0,008)	0,500 (0,004)
	0,70	0,658 (0,046)	0,686 (0,034)	0,704 (0,019)	0,705 (0,013)	0,702 (0,006)
	0,90	0,759 (0,041)	0,809 (0,028)	0,855 (0,013)	0,876 (0,010)	0,891 (0,005)
	0,99	0,800 (0,038)	0,854 (0,023)	0,904 (0,010)	0,930 (0,007)	0,949 (0,003)
Jackknife	0,10	0,116 (0,018)	0,095 (0,006)	0,099 (0,002)	0,099 (0,001)	0,104 (0,001)
	0,20	0,246 (0,034)	0,208 (0,015)	0,201 (0,005)	0,200 (0,002)	0,205 (0,001)
	0,50	0,549 (0,049)	0,543 (0,038)	0,516 (0,018)	0,502 (0,008)	0,500 (0,004)
	0,70	0,676 (0,042)	0,706 (0,033)	0,721 (0,020)	0,714 (0,014)	0,706 (0,007)
	0,90	0,762 (0,032)	0,814 (0,022)	0,865 (0,011)	0,884 (0,008)	0,899 (0,005)
	0,99	0,795 (0,028)	0,852 (0,016)	0,905 (0,007)	0,928 (0,005)	0,950 (0,002)

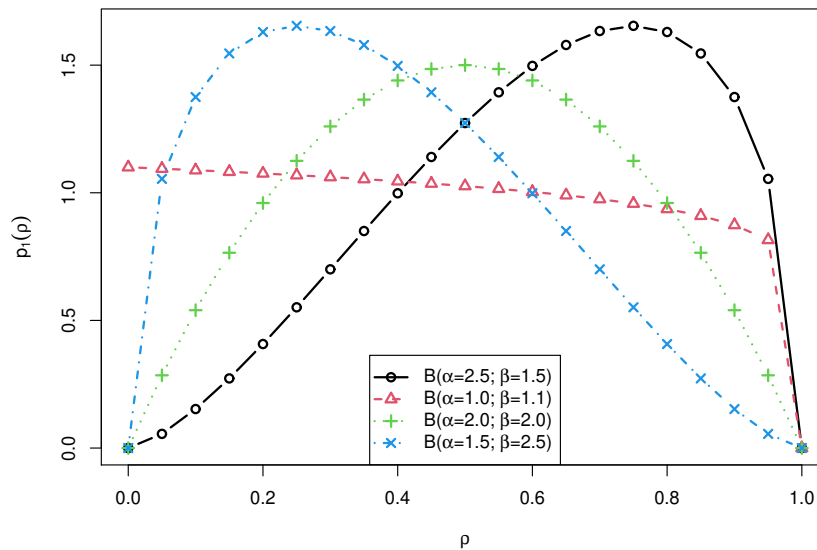
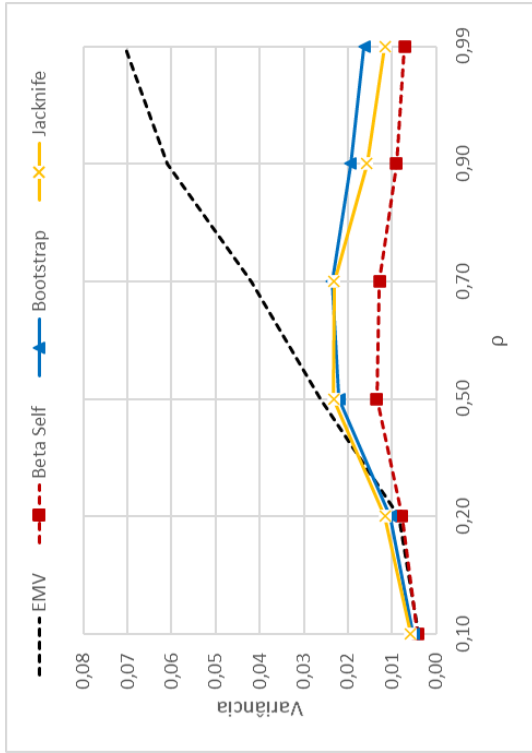


Figura 1: Distribuição a priori beta

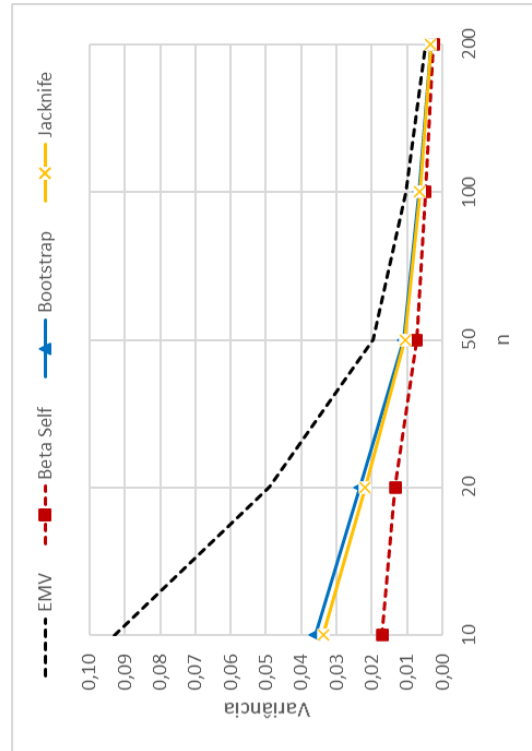
da intensidade de tráfego ($\rho > 0.7$), nota-se que as correções bootstrap e jackknife também reduzem consideravelmente o vício das estimativas bayesianas, sem, praticamente, aumentar a variância, se comparadas às estimativas clássicas de máxima verossimilhança. Além disso, da Figura 2-(c) fica evidente a correção do vício das estimativas bayesianas pelas abordagens bootstrap e, de forma mais clara, jackknife, em função do tamanho da amostra. Ainda, da Figura 2-(d) nota-se que as estimativas bootstrap e jackknife têm variância maior que as estimativas bayesianas; ainda assim, essas estimativas corrigidas apresentam desempenho muito superior ao MLE, quando consideramos a variância em função do tamanho da amostra. Por fim, resultados não apresentados mostram que, considerando a raiz do erro quadrático médio, o desempenho das estimativas corrigidas via bootstrap e jackknife é superior às estimativas clássicas de máxima verossimilhança e às bayesianas, para valores de ρ altos ($\rho \geq 0.9$). Quando a intensidade de tráfego é baixa ($\rho \leq 0.2$), os estimadores apresentam desempenho semelhante.

4. Conclusões e Observações Finais

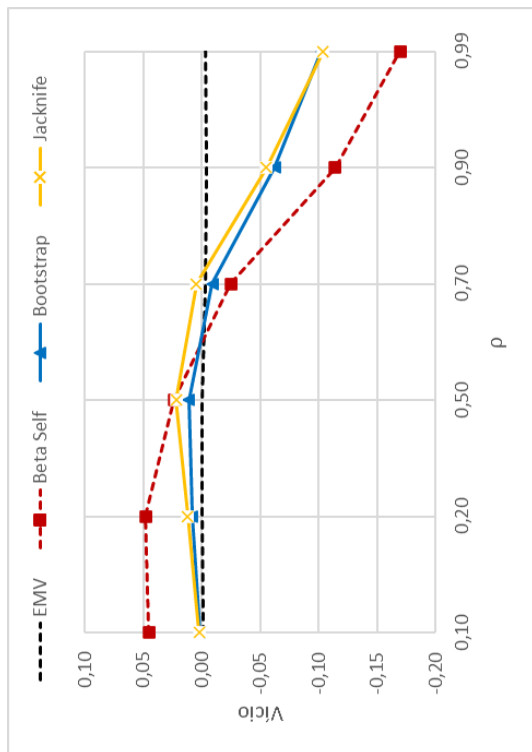
Neste artigo, foi estudada a estimação estatística da intensidade de tráfego ρ , para filas markovianas de servidor único, por meio da observação do número de chegadas de clientes durante o tempo de serviço de um cliente. Tais filas, com esse mesmo processo de amostragem, foram estudadas recentemente por Singh et al. [2021], quando foi mostrada a superioridade da estimativa bayesiana em comparação com a estimativa de máxima verossimilhança. Entretanto, como as estimativas bayesianas podem apresentar vício, foram estudados aqui métodos computacionalmente intensivos para sua correção, o bootstrap e o jackknife. Simulações de Monte Carlo atestaram que tais métodos são apropriados para a capacidade computacional atual e são completados em frações de segundo. Além disso, ficou evidenciada a eficácia dos métodos propostos, com desempenho superior dos métodos de correção de vício, para intensidades de tráfego altas ($\rho \geq 0.9$).



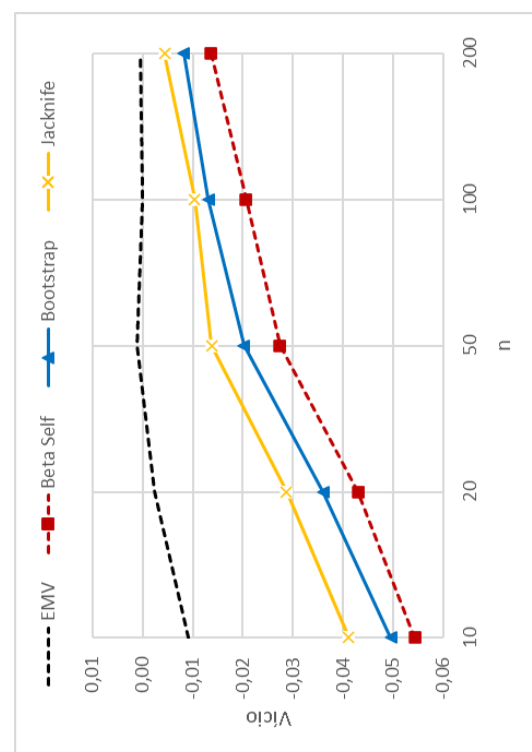
(a) Vício em função de ρ



(b) Variança em função de ρ



(c) Vício em função de n



(d) Variança em função de n

Figura 2: Desempenho dos estimadores de ρ

A área de inferência em filas vem atraindo a atenção de vários grupos de pesquisa. Extensões para filas finitas e filas com múltiplos servidores, por exemplo, devem ser tópicos para futuras pesquisas nessa área.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, processo CEX-PPM-00564-17), ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, processo 305515/2018-7), e à Universidade Federal de Minas Gerais, através de sua Pró-Reitoria de Pesquisa, pelo apoio parcial a este trabalho.

Referências

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1964). Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, NY.
- Acharya, S. K., Singh, S. K., e Villarreal-Rodríguez, C. E. (2020). Asymptotic study on change point problem for waiting time data in a single server queue. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 15(1):39–46.
- Almeida, M. A. C., Cruz, F. R. B., Oliveira, F. L. P., e de Souza, G. (2020). Bias correction for estimation of performance measures of a Markovian queue. *Operational Research*, 20(2):943–958.
- Armero, C. e Bayarri, M. J. (1994). Bayesian prediction in $M/M/1$ queues. *Queueing System*, 15:401–417.
- Armero, C. e Bayarri, M. J. (1997). A Bayesian analysis of a queueing system with unlimited service. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 58(2):241–261.
- Armero, C. e Bayarri, M. J. (1999). Dealing with uncertainties in queues and networks of queues: A Bayesian approach. In Ghosh, S., editor, *Multivariate analysis, design of experiments and survey sampling*, p. 579–608. Springer Science+Business Media, Marcel Dekker, New York, NY.
- Armero, C. e Bayarri, M. J. (2001). Queues. In Smelser, N. J. e Baltes, P. B., editors, *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, p. 12676–12680. Pergamon, Oxford.
- Bagchi, T. P. e Cunningham, A. A. (1972). Bayesian approach to the design of queueing systems. *INFORMS*, 10:36–46.
- Basak, A. e Choudhury, A. (2021). Bayesian inference and prediction in single server $M/M/1$ queueing model based on queue length. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 50(6):1576–1588.
- Chandrasekhar, P., Vaidyanathan, V. S., Durairajan, T. M., e Yadavalli, V. S. S. (2020). Classical and Bayes estimation in the $M/D/1$ queueing system. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, (in press):1–11. URL <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1734833>.
- Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(4):1036–1040.

- Cruz, F. R. B., Quinino, R. C., e Ho, L. L. (2017). Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server $M/M/s$ queue. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 46(9):7319–7331.
- Efron, B. (1982). The jackknife, the bootstrap and other resampling plans. SIAM.
- Muddapur, M. V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 24(1):327–331. ISSN 1572-9052.
- R Core Team. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020. URL <https://www.R-project.org/>.
- Reynolds, J. F. (1973). On estimating the parameters of a birth-death process. *Australian Journal of Statistics*, 15(1):35–43.
- Singh, S. K. e Acharya, S. K. (2019). Equivalence between Bayes and the maximum likelihood estimator in $M/M/1$ queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 48(19):4780–4793.
- Singh, S. K. e Acharya, S. K. (2021). Bernstein-von Mises theorem and Bayes estimation from single server queues. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 50(2): 286–296.
- Singh, S. K., Acharya, S. K., Cruz, F. R. B., e Quinino, R. C. (2021). Bayesian sample size determination in a single-server deterministic queueing system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 187:17–29.
- Zaka, A. e Akhter, A. S. (2014). Bayesian approach in estimation of scale parameter of Nakagami distribution. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 65: 71–80.