



## DETERMINAÇÃO DE MEDIDAS DE DESEMPENHO EM REDES DE FILAS FINITAS

**Frederico R. B. Cruz**

Departamento de Estatística – ICEX – UFMG  
Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 – Belo Horizonte – MG  
[e-mail: fcruz@ufmg.br](mailto:fcruz@ufmg.br)

**Maria Luíza G. Toledo**

Departamento de Estatística – ICEX – UFMG  
Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 – Belo Horizonte – MG  
[e-mail: mlgt@ufmg.br](mailto:mlgt@ufmg.br)

**Paulo César S. Luiz**

Departamento de Estatística – ICEX – UFMG  
Av. Antônio Carlos, 6627, 31270-901 – Belo Horizonte – MG  
[e-mail: paulocesar@ufmg.br](mailto:paulocesar@ufmg.br)

### Resumo

Sistemas modelados por redes de filas finitas configuradas em redes vêm atraindo a atenção de muitos pesquisadores, principalmente pelas aplicações práticas e desafios teóricos. Medidas de desempenho são sempre de interesse, embora nem sempre sejam de fácil obtenção. Configurações simples podem ser tratadas analiticamente, mas alguns sistemas de interesse, em arranjos mais complexos, ainda resistem ao tratamento matemático exato, estando disponíveis apenas aproximações ou técnicas baseadas em simulação a eventos discretos. Simulações normalmente envolvem replicações, como forma construção de intervalos de confiança para as medidas de desempenho. Neste trabalho, são avaliados alguns métodos conhecidos para construção de intervalos de confiança aplicado à estimação de medidas de desempenho de redes de filas finitas configuradas em redes. Vários testes atestam a eficiência das técnicas *bootstrap*, com vantagens sobre os intervalos normais tradicionais.

**Palavras-Chaves:** Redes de filas finitas; intervalos de confiança; medidas de desempenho.

### Abstract

Nowadays, stochastic systems based on finite queueing networks have attracted considerable research efforts, not only because of the important practical applications but also because of the theoretical challengers. Performance measures may not be easily obtained but are always sought. Usually, only simple configurations are treatable by analytical tools and more complex topologies still resist an exact mathematical treatment. Discrete event simulation is a possible way to evaluate such systems and it usually involves statistical treatment of the replications as a way of estimating performance measures. In this paper a comparison is presented for some popular techniques to computing confidence intervals for performance measures of finite queueing networks. Experiments attest for the superiority of bootstrap techniques over the traditional normal confidence intervals.

**Keywords:** Finite queueing networks; confidence intervals; performance measures.



## 1. INTRODUÇÃO

Modelos de filas finitas configuradas em redes têm alcançado uma substancial valorização na maioria das aplicações práticas via, principalmente, métodos de simulação intensiva. Modelos analíticos são preferíveis, porém para casos de topologias mais complexas, seu desenvolvimento é tópico de pesquisa em aberto. Técnicas de simulação trazem a necessidade de utilização de ferramentas estatísticas, como a construção de intervalos de confiança, para uma análise adequada.

Em particular, há um grande interesse em se investigar o comportamento de um particular conjunto de modelos de filas finitas, conhecido como filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado [8], apropriado para avaliar o congestionamento em sistemas de tráfego de veículos [4], pedestres [7], e sistemas de serviço e manufatura [6]. Adotando-se a notação de Kendall [5],  $M$  indica que a chegada é um processo markoviano,  $G$  representa um serviço com distribuição geral e dependente do estado,  $c$  refere-se ao número de servidores e, por fim, assume-se que a capacidade do sistema está restrita a  $c$  usuários. A principal característica desses modelos é o decrescimento da taxa de serviço com o aumento do número de usuários no sistema, conforme observado na Figura 1 [12], para fluxos de pedestres.

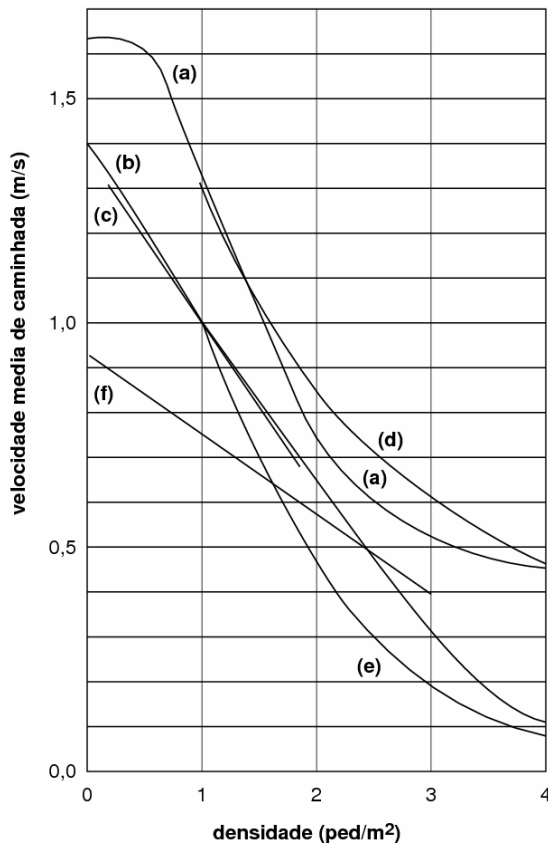


Figura 1: Velocidade de pedestres versus densidade de aglomeração [12].

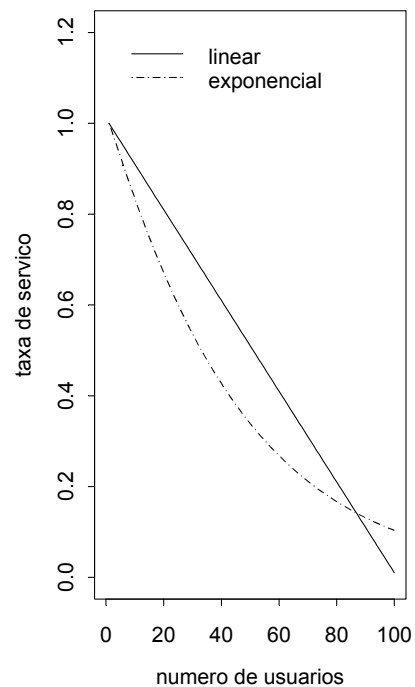


Figura 2: Taxa de serviço  $f(n)=V_n/V_1$  em um corredor de pedestres de  $8 \times 2,5 \text{ m}^2$ .

Em se tratando do modelo de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, é de interesse analisar seu comportamento através de medidas de desempenho relacionadas a cada configuração analisada. Essas medidas incluem, entre outras, a probabilidade de bloqueio, a taxa de atendimento (do inglês, *throughput*), o número médio de usuários no sistema (*work-in-process*) e o tempo médio no sistema. Essas medidas podem ser tratadas com um resumo do comportamento do sistema sob análise e serão definidas matematicamente adiante.



## 1.1. MOTIVAÇÃO

Neste artigo serão apresentadas duas maneiras de se obter essas medidas de desempenho. Uma delas é através de modelos analíticos, ainda limitados a redes simples, e a outra é via simulação, que ainda é a forma preferida para sistemas mais complexos. O modelo de simulação tem por objetivo avaliar uma determinada configuração, caracterizada pela sua topologia, número de nós, largura, comprimento e taxa de chegada de cada nó, entre outras, e então atribuir os valores das medidas de desempenho para cada nó. Neste caso, essas medidas de desempenho podem ser avaliadas como variáveis aleatórias, cujos valores podem ser compostos pelas replicações fornecidas pela simulação. Esse modelo de simulação fornece, além dos valores das replicações das medidas de desempenho, seus valores médios e os intervalos de confiança referentes a cada uma delas. Esses intervalos podem ser entendidos como uma estimativa para os verdadeiros valores das medidas de desempenho.

Uma das motivações para este artigo são os resultados inexatos dos intervalos de confiança tradicionais, baseados na normalidade, obtidos com o uso do modelo de simulação para uma única fila  $M/G/c/c$ , para a qual resultados analíticos são conhecidos. Como exemplo, temos o caso em que intervalos de confiança para uma medida de desempenho bastante importante, a probabilidade de bloqueio,  $p_c$  (isto é, a probabilidade de um usuário encontrar a fila finita cheia), resultaram em limites inferiores negativos, como pode ser visto na Figura 3. Fazendo-se uma análise mais detalhada dos intervalos de confiança baseados na normalidade, a causa do problema foi determinada como sendo a não-normalidade dos dados, provavelmente relacionada aos problemas de fronteira das variáveis [10].

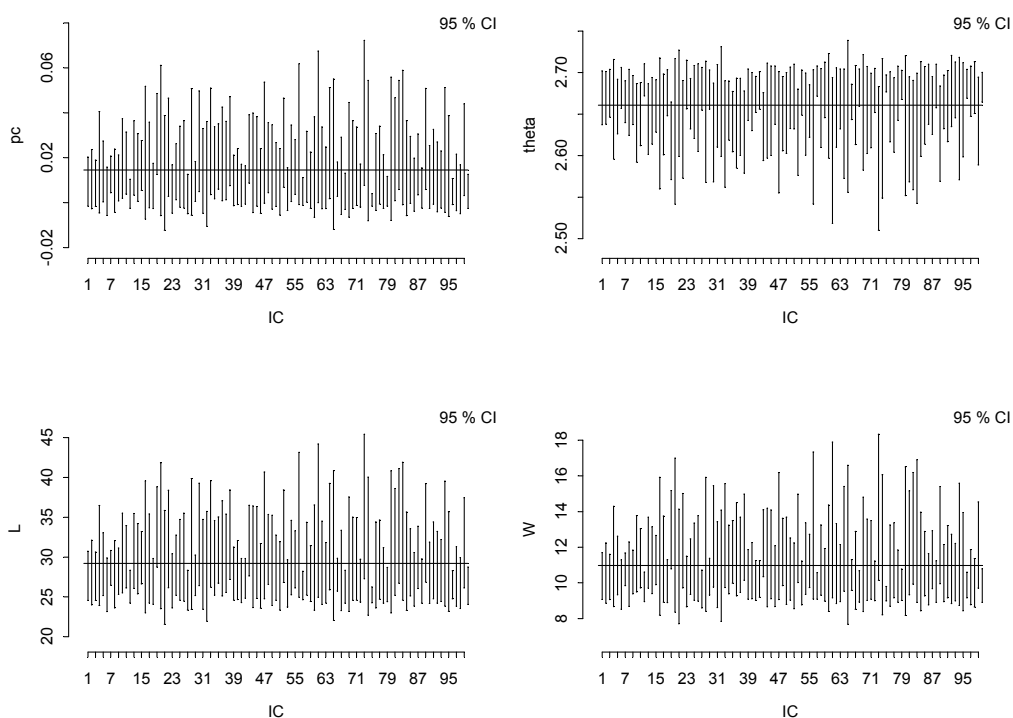


Figura 3: Valores analíticos e intervalos de confiança normais para diversas medidas desempenho em corredores com dimensões  $8 \times 2,5 \text{ m}^2$ ,  $\lambda=2,7$  ped/s e tamanho de amostra  $n=10$ .

## 1.2. ORGANIZAÇÃO

Na Seção 2 são descritos os modelos matemáticos para filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, úteis para estudar fenômenos de fluxos de usuários sujeitos a congestionamentos. Na



seção 3 comenta-se sobre a técnica de simulação a eventos discretos e sua utilidade no estudo de filas finitas configuradas em redes. Essa seção também apresenta métodos de construção dos intervalos de confiança. Na Seção 4 são apresentados os resultados dos experimentos computacionais realizados e a análise de desempenho dos IC's construídos, normal e *bootstrap*. Finalmente, na Seção 5 concluímos o artigo com algumas observações finais.

## 2. OBTENÇÃO ANALÍTICA DE MEDIDAS DE DESEMPENHO

### 2.1. FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO E MEDIDAS DE DESEMPENHO PARA FILAS ÚNICAS

Diversos fatores podem ser associados a diferentes velocidades de caminhada [1,13]. Entretanto, quando a densidade do tráfego aumenta, estes fatores tendem a ter um efeito menor sobre a velocidade de caminhada de pedestres individuais [1,13]. Portanto, dentro de um corredor o movimento de pedestres tende a tornar-se mais lento na medida em que o espaço do corredor é ocupado por mais pedestres. Para o modelo de fila de um corredor, o tempo de ocupação é igual ao tempo gasto para que um pedestre o atravesse e a taxa de serviço  $f(n)$  depende do número de ocupantes  $n$  e segue uma distribuição geral  $G$  dependente do estado.

Considera-se, ainda, que a densidade de aglomeração de pedestres dentro do sistema está aproximadamente distribuída de maneira uniforme e que essa densidade determina a velocidade média de um indivíduo. Assim, se existirem  $n$  pedestres dentro de um corredor, esses terão uma taxa de serviço  $f(n)$ , enquanto que numa determinada chegada ou saída, essa taxa de serviço será alterada para  $f(n+1)$  ou  $f(n-1)$ , respectivamente.

Sob esse ponto de vista, admitindo-se o modelo de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, pode-se expressar a probabilidade do número de pedestres,  $N$ , num modelo de fila  $M/G/c/c$  dependentes do estado,  $p_n \equiv P_r\{N = n\}$ , por [13]:

$$P\{N = n\} = p_n = \left[ \frac{[\lambda E(T_1)]^n}{n! f(n) f(n-1) \dots f(2) f(1)} \right] p_0, \quad n=1,2,\dots,c, \quad (1)$$

sendo

$$p_0^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^c \left[ \frac{[\lambda E(T_1)]^i}{i! f(i) f(i-1) \dots f(2) f(1)} \right],$$

o inverso da probabilidade de não se ter pedestre esperando na fila;  $\lambda$ , a taxa de chegada,  $E(T_1)=l/V_1$ , o tempo de atendimento esperado considerando-se um único pedestre num corredor de comprimento  $l$  e  $f(n)=Vn/V_1$ , a taxa de serviço.

Utilizando-se (1) é possível calcular importantes medidas de desempenho para o modelo de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado. Essas medidas incluem, entre outras, a probabilidade de bloqueio,

$$p_c \equiv P_r\{N = c\}, \quad (2)$$

a taxa de atendimento,

$$\theta = \lambda(1 - p_c), \quad (3)$$

o número médio de usuários no sistema, que vem da definição de esperança matemática,

$$L = E(N) = \sum_{n=1}^c n p_n, \quad (4)$$

e o tempo médio no sistema, que pode ser dado pela lei de Little,

$$W = E(T) = \frac{L}{\theta}. \quad (5)$$

Estimativas para essas medidas de desempenho podem ser vistas na Figura 3, para corredores de pedestres com dimensões  $8 \times 2,5 \text{ m}^2$  e  $\lambda=2,7 \text{ ped/s}$ .



### 2.1.1. Cálculo da taxa de serviço $f(n)$

Utilizando-se o modelo de filas  $M/G/c/c$  dependentes do estado, um corredor pode ser considerado como servidores para seus ocupantes. O número de servidores em paralelo é igual à capacidade do corredor, que também representa o número total de pedestres permitidos simultaneamente no sistema e é dado por:

$$c = \lfloor k * l * w \rfloor, \quad (6)$$

em que  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro não superior a  $x$ ,  $l$  é o comprimento do corredor,  $w$  é a sua largura e  $c$ , sua capacidade. De acordo com estudos anteriores [12], pôde-se constatar que um valor razoável para  $k$ , visto como a densidade máxima de aglomeração, é 5 ped/m<sup>2</sup>. No modelo de congestionamento, o fluxo de tráfego unidirecional através de corredores segue uma velocidade média de caminhada de um pedestre,  $V_n$ , como uma função do número de indivíduos  $n$  que ocupam o corredor e sua capacidade,  $c$ .

Baseado nessa e em outras observações empíricas, modelos analíticos foram desenvolvidos para essa velocidade (unidirecional), em função do número de pedestres em um corredor [13], usando as seguintes definições:

- $V_n \rightarrow$  velocidade média para uma ocupação de  $n$  pedestres;
- $V_1 \rightarrow$  velocidade média de um pedestre sozinho que corresponde a 1,5 m/s;
- $V_a \rightarrow$  velocidade média quando a densidade de aglomeração é de 2 ped/m<sup>2</sup>;
- $V_b \rightarrow$  velocidade média quando a densidade de aglomeração é de 4 ped/m<sup>2</sup>;
- $\gamma$  e  $\beta$  são parâmetros de forma e escala para o modelo exponencial;
- $a=2 * l * w$ ;
- $b=4 * l * w$ .

De acordo com estudos anteriores [12], a velocidade de um único ocupante no corredor,  $V_1$ , é cerca de 1,5 m/s. Assumindo-se que uma população de  $n = c + 1$  é impossível e que  $V_n$  é zero para todo  $n \geq c + 1$ , a seguinte relação linear é proposta [13]:

$$f(n) = \frac{V_n}{V_1} = \frac{(c+1-n)}{c}. \quad (7)$$

O seguinte modelo exponencial parece fornecer uma aproximação também aceitável para a média da velocidade de um pedestre *versus* a densidade de aglomeração [13], conforme o formato das curvas apresentadas na Figura 1:

$$f(n) = \frac{V_n}{V_1} = \exp \left[ - \left( \frac{n-1}{\beta} \right)^\gamma \right], \quad (8)$$

em que  $\gamma = \ln \left[ \frac{\ln(V_a/V_1)}{\ln(V_b/V_1)} \right] / \ln \left( \frac{a-1}{b-1} \right)$  e  $\beta = \frac{a-1}{[\ln(V_1/V_a)]^{1/\gamma}} = \frac{b-1}{[\ln(V_1/V_b)]^{1/\gamma}}$ .

Parâmetros razoáveis para o fluxo de tráfego unidirecional são  $V_a=0,64$  e  $V_b=0,25$ . Na realidade, constatou-se que ao estender o estudo para fluxos bi e multidirecional os valores apresentados permaneciam quase inalterados [1], sendo  $V_a=0,60$ ,  $V_b=0,21$  (bidirecional) e  $V_a=0,56$ ,  $V_b=0,17$  (multidirecional). A Figura 2 mostra o comportamento da taxa de serviço para pedestre em função do aumento da densidade,  $f(n)=V_n/V_1$ , para fluxos unidirecionais.

## 3. CALCULANDO O DESEMPENHO VIA SIMULAÇÃO

Uma maneira bastante eficaz de obterem-se medidas de desempenho é via simulação. Através dela, ao se analisar uma rede com uma determinada topologia e um determinado número de nós, alocando-se a taxa de chegada desejada aos nós, podem ser obtidas as medidas de interesse para cada nó. Além disso, há a possibilidade de realizarem-se replicações, que são fundamentais para a estimação da variabilidade das medidas de



desempenho de interesse.

Foi usado um modelo de simulação a eventos discretos, recentemente proposto, juntamente com uma discussão detalhada sobre as suas idéias básicas, assim como para a apresentação de resultados de validação e um interessante exemplo de aplicação relacionado às redes de evacuação [2]. Esse modelo de simulação, disponível na *web*<sup>1</sup>, encontra-se implementado em C++, devido principalmente à sua capacidade de abstração de dados, bem como à praticidade de possuir códigos facilmente modificáveis. Trabalhou-se no sistema operacional *Windows*<sup>®</sup> *Millenium*, numa máquina com 256 MB de memória RAM, usando um processador AMD-k7 com frequência de 1.2 GHz.

### 3.1. INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalos de confiança são importantes componentes da ampla coleção de ferramentas estatísticas de análise de dados. Eles combinam estimação pontual e testes de hipóteses em uma única estimativa de grande poder intuitivo. Recentes avanços na metodologia estatística permitem a construção de intervalos de confiança com alta precisão, mesmo para modelos probabilísticos muito complicados e estruturas de dados elaboradas. São mostrados aqui métodos *bootstrap* para a construção de intervalos de uma maneira rotineira e automática.

Duas aproximações distintas têm guiado a construção de intervalos de confiança desde a década de 1930. Um pequeno catálogo de intervalos exatos foi construído para situações especiais, como um parâmetro binomial único. Entretanto, a maioria dos intervalos de confiança é aproximada, sendo a aproximação mais utilizada o intervalo padronizado:

$$\hat{\theta} \pm z^{(\alpha)} \hat{\sigma}. \quad (9)$$

Aqui  $\hat{\theta}$  é uma estimativa pontual do parâmetro de interesse  $\theta$ ,  $\hat{\sigma}$  é uma estimativa do desvio-padrão de  $\hat{\theta}$ , e  $z^{(\alpha)}$  é o  $100\alpha$ -ésimo percentil da distribuição normal padronizada. Frequentemente,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\sigma}$  são obtidos pela teoria da máxima verossimilhança e os intervalos padronizados são ferramentas extremamente úteis. O método é completamente automático. O estatístico insere os dados, a classe dos possíveis modelos probabilísticos e dos parâmetros de interesse, e então um algoritmo computacional fornece os intervalos calculados a partir de (9), sem nenhuma intervenção necessária. Este processo contrasta com a construção de um intervalo exato, que por sua vez requer raciocínio em um grande número de problemas. E nem sempre é possível sua construção. O problema com intervalos padronizados é que eles são baseados em uma aproximação assintótica que pode ser imprecisa na prática. Os intervalos dados por (9) podem diferir consideravelmente dos intervalos exatos, apresentando distorções como as vistas na Figura 3. A seguir outras técnicas de construção de intervalos de confiança são detalhadas.

#### 3.1.1. Intervalos Percentílicos

Intervalos de confiança percentílicos podem ser vistos como uma forma bastante ingênua de aproveitar o relativo baixo custo para realização de replicações de simulações. Os limites inferiores e superiores dos IC's são determinados via cálculo dos percentis das diversas estimativas das medidas de desempenho. Estudados em detalhe [11], pôde-se observar que os intervalos percentílicos contornaram o problema de limites impossíveis. De fato, como pode ser observado na Figura 4, o problema das probabilidades negativas nos intervalos de confiança normais é resolvido. Adicionalmente, taxas de atendimento superiores às taxas de chegada também não mais ocorrem.

---

<sup>1</sup><ftp://ftp.est.ufmg.br/pub/fcruz/publics/sim.pdf>

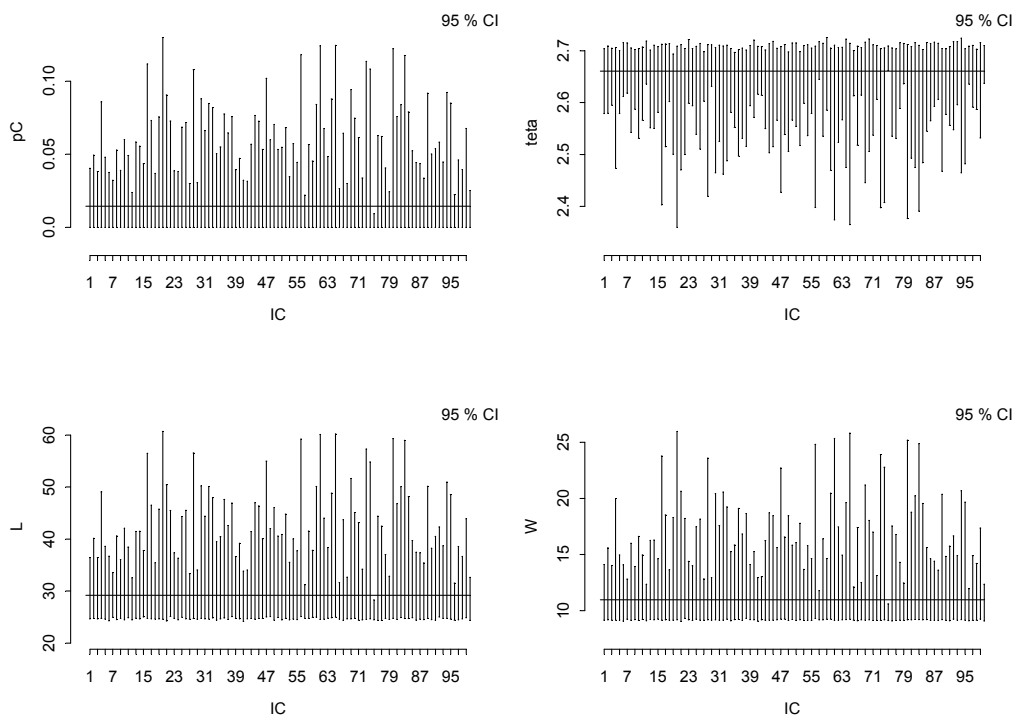


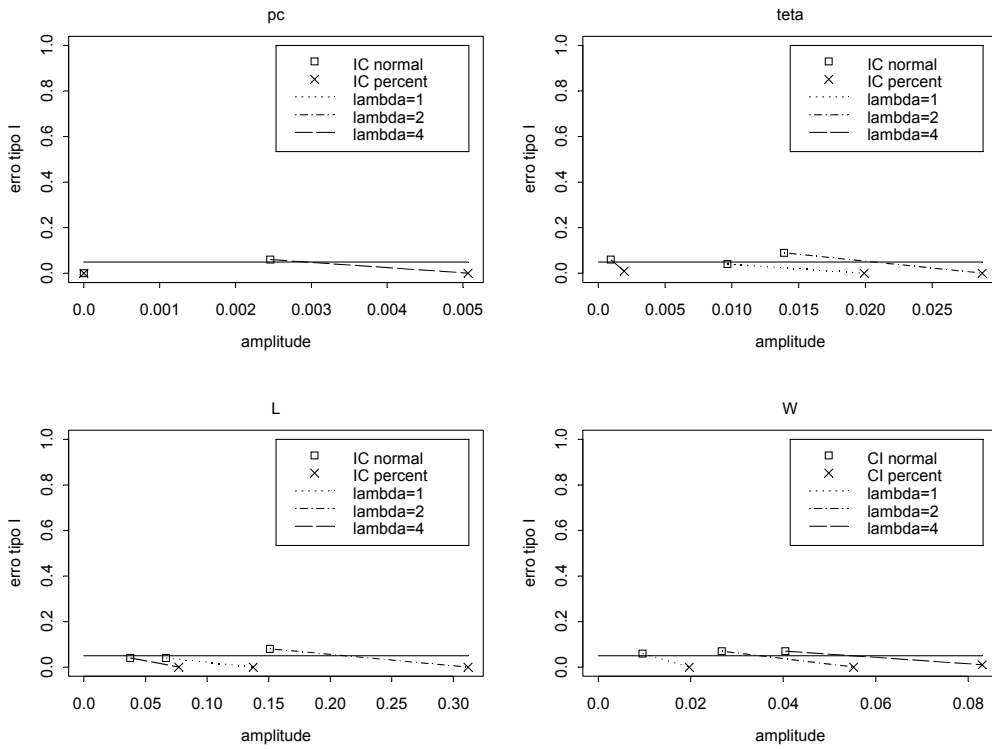
Figura 4: Valores analíticos e intervalos de confiança percentílicos para diversas medidas desempenho em corredores com dimensões  $8 \times 2,5 \text{ m}^2$ ,  $\lambda=2,7 \text{ ped/s}$  e tamanho de amostra  $n=10$ .

Pode-se observar na Figura 5 uma comparação do desempenho dos intervalos de confiança normal e percentílico, para tamanhos de amostra  $n=10$  e  $n=100$ . Nas ordenadas, temos os valores estimados para o erro tipo I e no eixo das abscissas, a amplitude média, ambos em 100 replicações. Os pontos representados por um quadrado indicam os intervalos normais e aqueles representados por um x, os percentílicos. Os símbolos ligados por uma linha são pares de intervalos, para uma mesma taxa de chegada. A linha horizontal no gráfico indica o nível de significância nominal  $\alpha$  (5%). O erro tipo I é dado pelo percentual de intervalos que não cobrem os valores analíticos, que nesse caso são conhecidos.

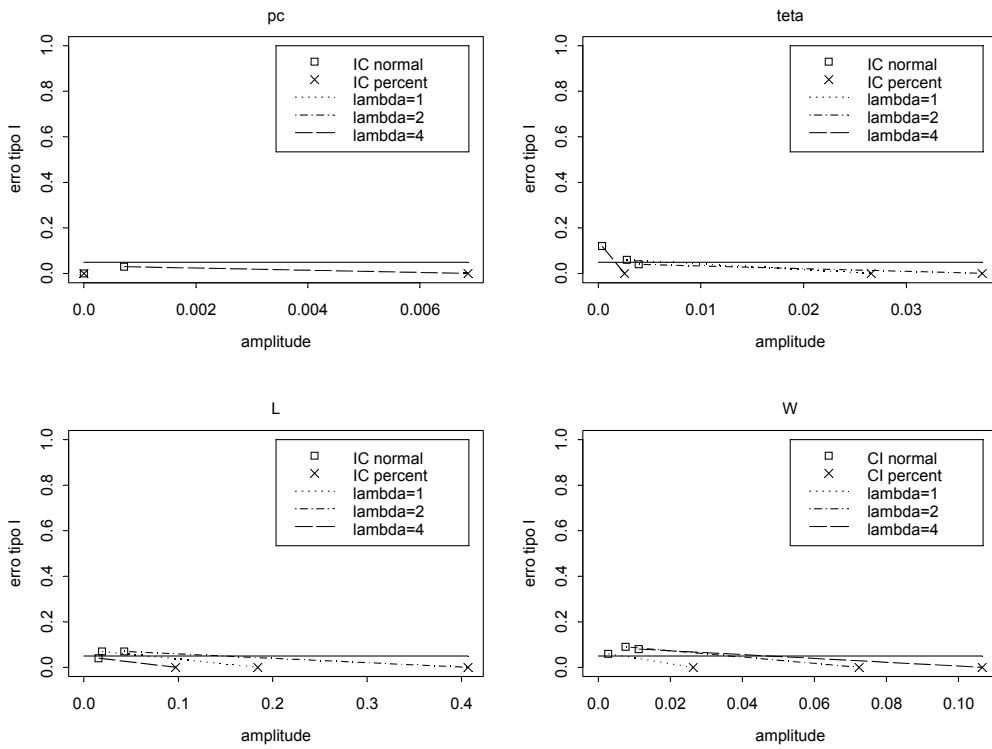
Pode-se também observar que o IC normal parece apresentar um erro tipo I mais próximo do nominal e amplitude menor. O aumento do tamanho da amostra para cálculo dos IC's melhora o desempenho dos normais, como esperado, mas parece piorar o do percentílico. Portanto, de acordo com os resultados obtidos nos experimentos computacionais, a vantagem dos IC's percentílicos parece restringir-se à obediência às restrições de fronteira da medida de desempenho de interesse. Além disso, pode-se dizer que apesar da suposição de normalidade não ser satisfeita na maioria dos casos [10], a técnica de intervalos de confiança normais ainda é um recurso eficiente para se analisar medidas de desempenho em filas finitas.

### 3.1.2. Intervalos *Bootstrap* [3]

Com o passar dos anos, os estatísticos desenvolveram subterfúgios para melhorar o cálculo de IC's dados por (9), envolvendo a correção de vícios e transformações paramétricas. Os intervalos de confiança *bootstrap* podem ser vistos como algoritmos para realizar essas melhorias sem intervenção humana, conforme é descrito a seguir.



a)  $n=10$



b)  $n=100$

Figura 5: Desempenho médio dos intervalos de confiança normal e percentílicos, para tamanho de amostra  $n=10$  e  $n=100$ .





### 3.1.2.1. Bootstrap-t

Suponha que os valores de uma variável  $X$  forneçam uma estimativa  $\hat{\theta}(x)$  para o parâmetro de interesse  $\theta$ , e também uma estimativa  $\hat{\sigma}(x)$  para o desvio-padrão de  $\hat{\theta}$ . Por analogia com a estatística *t-Student*, define-se:

$$T = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}, \quad (10)$$

e seja  $T^{(\alpha)}$  o  $100\alpha$ -ésimo percentil de  $T$ . O limite superior de um intervalo de confiança unilateral de nível  $\alpha$  para  $\theta$  é:

$$\hat{\theta} - \hat{\sigma}T^{(1-\alpha)}. \quad (11)$$

Isso assume que se conheça os percentis  $T$ , assim como no caso usual *t-Student* em que  $T^{(\alpha)}$  é o percentil de uma distribuição *t*. Entretanto, os percentis  $T$  são desconhecidos na maioria das situações.

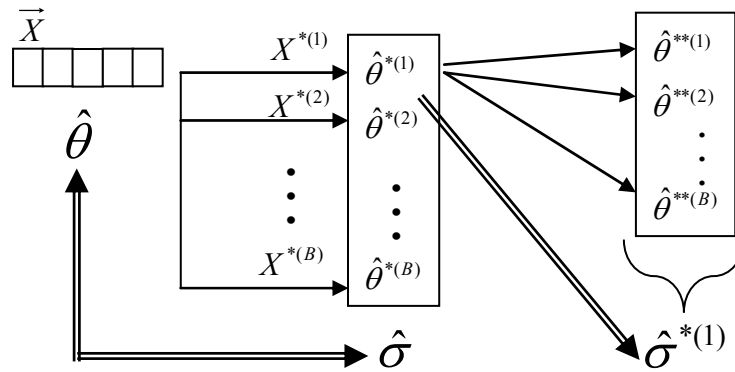


Figura 6: Esquema de aplicação do *bootstrap-t*.

A idéia do *bootstrap-t* é estimar os percentis de  $T$  por reamostragem, conforme esquematizado na Figura 6. Primeiramente, a distribuição de  $X$  é estimada e o conjunto de dados *bootstrap*  $X^*$  é retirado da distribuição estimada. Cada  $X^*$  possui um  $\hat{\theta}^*$  e um  $\hat{\sigma}^*$ , fornecendo

$$T^* = \frac{\hat{\theta}^* - \theta}{\hat{\sigma}^*}, \quad (12)$$

ou seja, uma replicação *bootstrap* de (10). Um número grande  $B$  de replicações independentes fornece os percentis estimados:

$$\hat{T}^{(\alpha)} = \alpha\text{-ésimo percentil de } \{T^*(b), b = 1, 2, \dots, B\}. \quad (13)$$

Assim, o limite superior de um intervalo de confiança unilateral de nível  $\alpha$ ,  $\hat{\theta}_T[\alpha]$ , é definido por:

$$\hat{\theta}_T[\alpha] = \hat{\theta} - \hat{\sigma}\hat{T}^{(1-\alpha)}, \quad (14)$$

de acordo com (11). A principal desvantagem do intervalo *bootstrap-t* é a pesada carga computacional necessária, o que pode tornar-se crucial em situações mais complicadas. Além disso, o algoritmo *bootstrap-t* pode ser numericamente instável, resultando em intervalos de confiança muito grandes. Isso é um problema particularmente sério em situações não-paramétricas.

### 3.1.2.2. Bootstrap Percentílico

Apesar da técnica *bootstrap-t* ser eficiente, ela possui alto custo computacional. Uma quantidade considerada razoável [3] para o número de re-amostragens *bootstrap* para a



estimação dos parâmetros é 200. Como pode-se observar na Figura 6, se a técnica *bootstrap-t* fosse utilizada, ter-se-iam 200 replicações para a estimação de  $\hat{\theta}^{*(1)} \dots \hat{\theta}^{*(200)}$  e, para cada  $\hat{\theta}^{*(B)}$  estimado, ter-se-ia que fazer mais 200 para obter a estimação de cada  $\sigma^{*(i)}$ . Em outras palavras, seriam pelo menos 40.000 iterações e, como se tem quatro medidas de desempenho de interesse, este seria um trabalho demorado e que poderia exigir um equipamento computacional não convencional, por demandar muito tempo.

Na Figura 7, tem-se um esquema de implementação do *bootstrap* percentílico, que pode ser preferível, pela relativa simplicidade. De fato, na Figura 8 pode-se observar uma implementação em S-PLUS [9] do intervalo de confiança *bootstrap* percentílico.

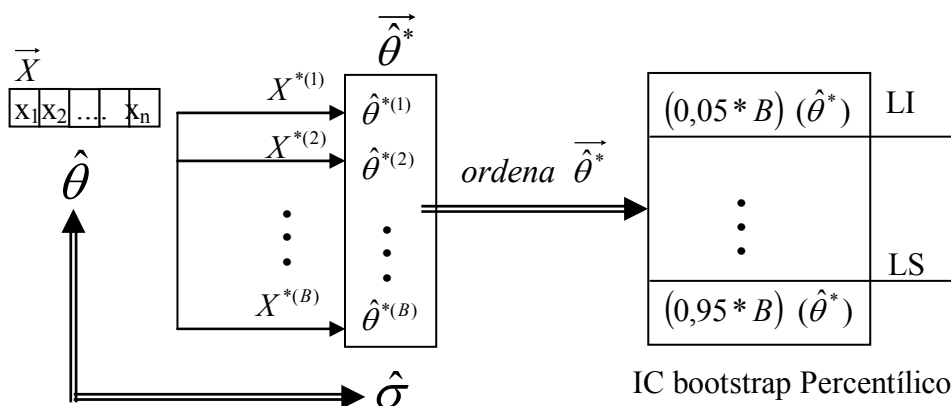


Figura 7: Esquema de aplicação do *bootstrap* percentílico.

```

conf.int.3 <- function(conf.int.vec, conf.int.coef=0.95) {
  rep.boot <- 100 #número de reamostras#
  data.boot <- rep(0,rep.boot) #cria o vetor para armazenar as médias#
  for (i in 1:rep.boot) {
    #Faz a reamostragem de tamanho 100 e armazena a média num vetor#
    resample.boot <- sample(conf.int.vec, size=length(conf.int.vec),
      replace=T)
    data.boot[i] <- mean(resample.boot)
  }
  #Calcula os quantis do vetor de médias bootstrap construído anteriormente#
  conf.int.linf <- quantile(data.boot, probs=((1-conf.int.coef)/2))
  conf.int.lsup <- quantile(data.boot, probs=((1+conf.int.coef)/2))
  c(conf.int.linf, conf.int.lsup)
}

```

Figura 8: Implementação em S-PLUS [9] para o cálculo de intervalos de confiança por *bootstrap* percentílico.

#### 4. EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Para se avaliar a cobertura dos intervalos de confiança (normal e percentílico), foi utilizado um programa de simulação a eventos discretos [2], tendo sido analisadas redes com um nó de medidas  $8,0 \times 2,5 \text{ m}^2$ , alocando-se taxas de chegada variadas a esse nó. Essas taxas foram de  $\lambda=1, 2$  e  $4 \text{ ped/s}$ . Para cada taxa, foram calculados 100 intervalos de confiança através de replicações das medidas de desempenho do sistema (probabilidade de bloqueio, taxa de atendimento, número médio de usuários no sistema e tempo médio no sistema). O



tamanho da amostra foi de 10 e 100 para o cálculo de cada intervalo. Posteriormente, esses intervalos foram comparados com o valor analítico de cada medida de desempenho sob cada taxa de chegada.

Como pode ser observado na Figura 9, quando utilizamos o *bootstrap* percentílico o problema das probabilidades negativas nos intervalos de confiança normais foi resolvido, assim como o problema de taxas de saída superiores às taxas de entrada. Na Figura 10 podemos observar um comparativo do desempenho dos intervalos de confiança normal e *bootstrap* percentílico. Os intervalos de confiança por *bootstrap* percentílico apresentaram menores amplitudes em todos os casos testados, mas infelizmente às custas de um erro tipo I sempre superior. Adicionalmente, os dois intervalos de confiança tendem a aproximar-se, quando se aumenta o tamanho da amostra de 10 para 100, conforme era previsível.

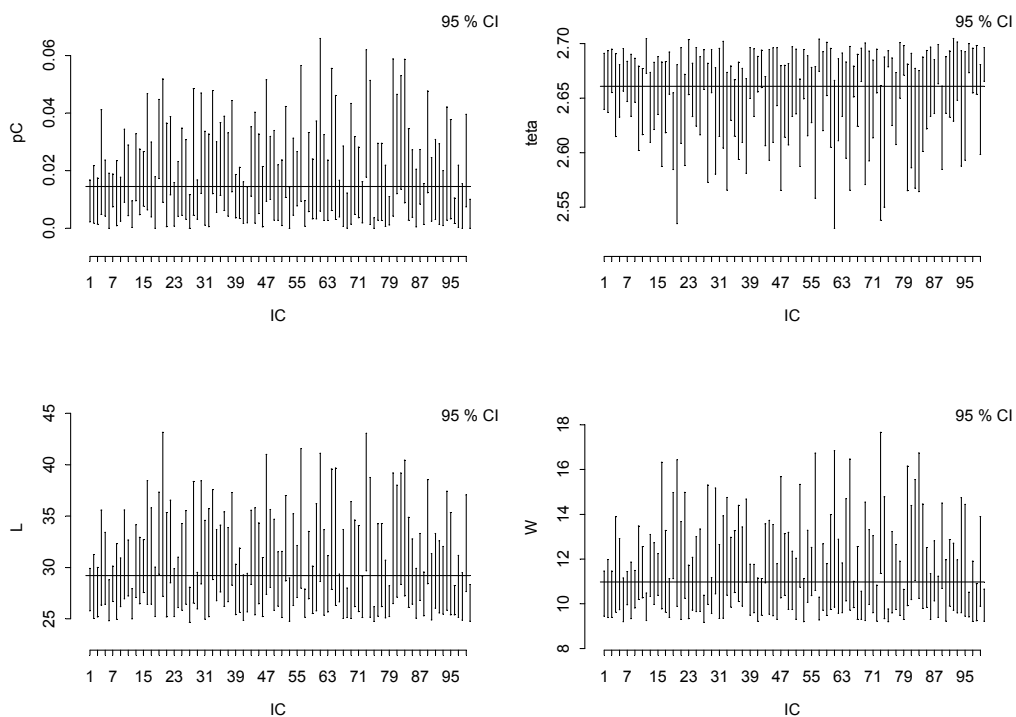
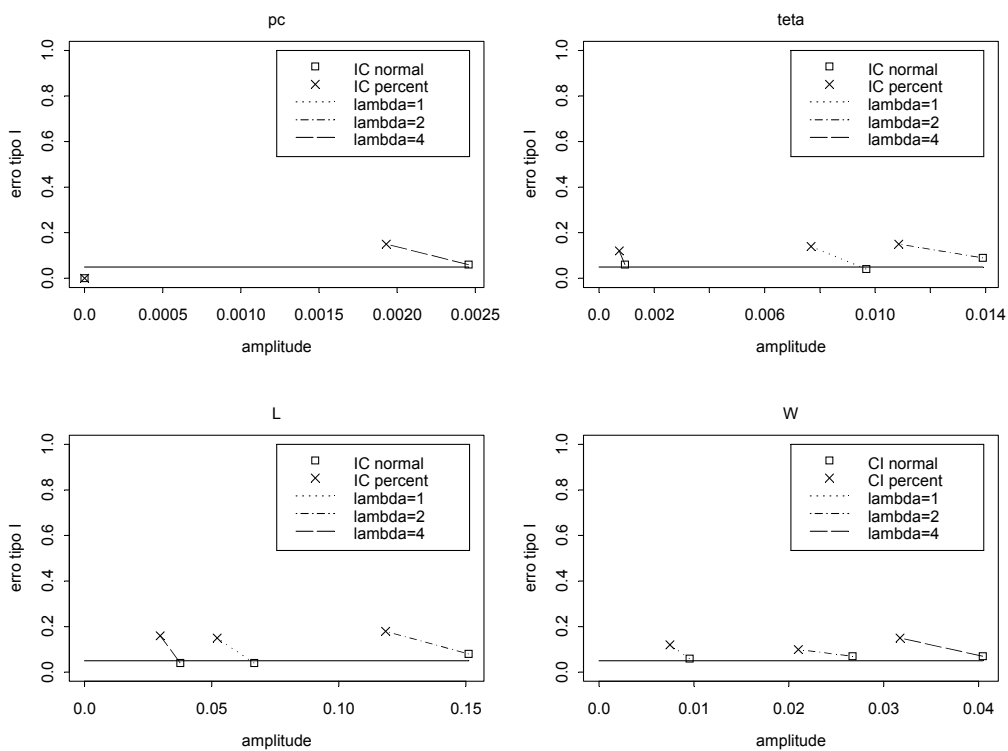


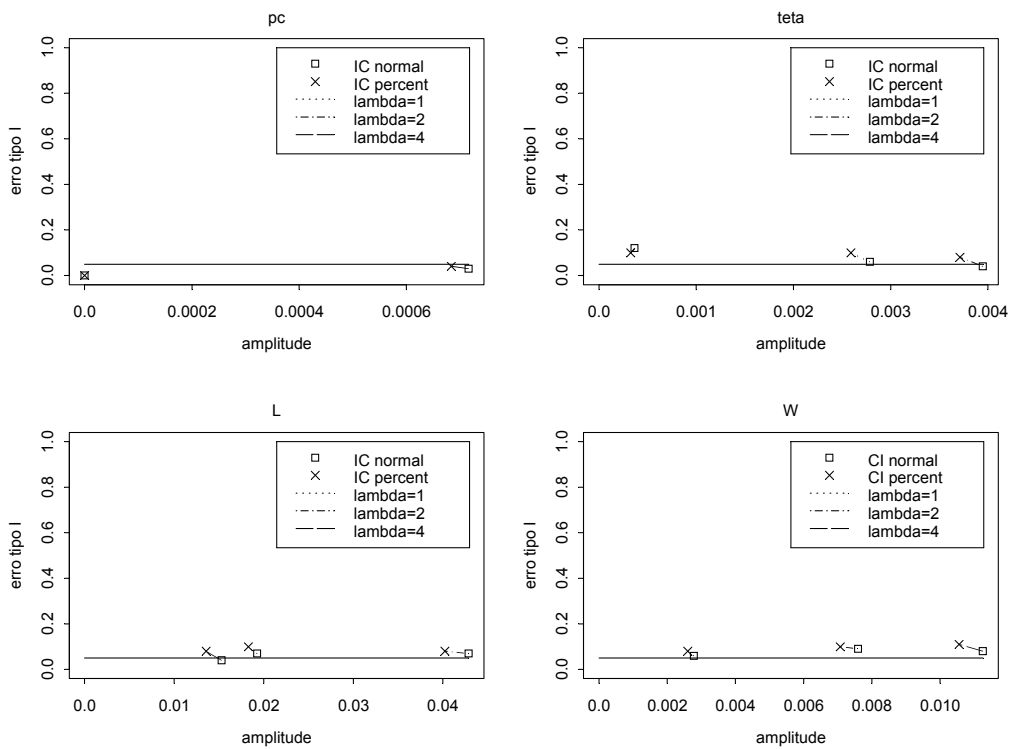
Figura 9: Valores analíticos e intervalos de confiança *bootstrap* percentílicos para diversas medidas desempenho em corredores com dimensões  $8 \times 2,5 \text{ m}^2$ ,  $\lambda=2,7 \text{ ped/s}$  e tamanho de amostra  $n=10$ .

## 5. CONCLUSÕES E OBSERVAÇÕES FINAIS

Resultados computacionais comprovaram a dificuldade em construir-se intervalos de confiança para estimação de medidas de desempenho em filas finitas, via simulação, que é uma das técnicas preferidas quando métodos analíticos não estão disponíveis. Essa dificuldade decorre principalmente da não-normalidade dos dados da simulação e de problemas de fronteira das medidas de desempenho. Técnicas *bootstrap* foram então utilizadas, principalmente pela facilidade de implementação e ausência de hipóteses restritivas. Foi observado, entretanto, que a menos de intervalos de confiança com limites inviáveis, a técnica de intervalos normais produz resultados satisfatórios na maioria dos casos testados.



a)  $n=10$



b)  $n=100$

Figura 10: Desempenho médio dos intervalos de confiança normal e *bootstrap* percentílicos, para tamanho de amostra  $n=10$  e  $n=100$ .



Assim, como na utilização do método *bootstrap* percentílico não precisam ser satisfeitas as hipóteses de normalidade dos parâmetros e não há problemas de fronteira nos IC's construídos, esta técnica pode ser considerada uma ferramenta útil para a estimativa dos parâmetros de um modelo de filas finitas  $M/G/c/c$  dependentes do estado configuradas em redes. Tópicos para trabalhos futuros incluem a incorporação da técnica a modelos de simulação [2] e testes em filas configuradas em redes em topologias realísticas.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio do *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*, CNPq, processos 301809/96-8, 201046/94-6, 300609/2002-7, 307702/2004-9 e 103106/2003-0, da *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais*, FAPEMIG, processos CEX-289/98 e CEX-855/98, e da Pró-Reitoria de Pesquisa da UFMG, PRPq-UFMG, processo 4081-UFMG/ RTR/ FUNDO/ PRPq/99.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Cheah, J. & MacGregor Smith, J. (1994). Generalized M/G/C/C state dependent queueing models and pedestrian traffic flows. *Queueing Systems*, 15:365-386.
- [2] Cruz, F. R. B., MacGregor Smith, J. & Medeiros, R. O. (2005). An M/G/C/C state-dependent network simulation model, 32(4): 919-941.
- [3] DiCiccio, T. J. & Efron, B. (1996). Bootstrap Confidence Intervals. *Statistical Science*, 11(3): 189-228.
- [4] Jain, R. & MacGregor Smith, J. (1997). Modeling Vehicular Traffic Flow Using M/G/c/c State Dependent Queueing Models, *Transportation Science*, 31(4):324-336.
- [5] Kendall, D. G. (1953). Stochastic Processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains, *Annals Mathematical Statistics*, 24:338-354.
- [6] MacGregor Smith, J. & Daskalaki, S. (1988) Buffer space allocation in automated assembly lines. *Operations Research*, 36(2):343-358.
- [7] MacGregor Smith, J. (1994). Application of state-dependent queues to pedestrian/vehicular network design. *Operations Research*, 42:414-427.
- [8] MacGregor Smith, J. (1996). Topological network design of state-dependent queueing networks. *Networks*, 28:55-68.
- [9] S-PLUS (2000). Programmer's Guide, Data Analysis Products Division, MathSoft, Seattle, USA.
- [10] Toledo, M. L. G. (2004a). Construção de intervalos de confiança para análise de desempenho de redes M/G/c/c. Relatório da Disciplina Laboratório em Estatística II. Belo Horizonte, MG.
- [11] Toledo, M. L. G. (2004b). Avaliação de cobertura de intervalos de confiança para medidas de desempenho em redes de filas finitas. Relatório da Disciplina Monografia. Belo Horizonte, MG.
- [12] Tregenza, P. R. (1976). *The Design of Interior Circulation*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, USA.
- [13] Yuhaski, S. J. & MacGregor Smith, J. (1989). Modeling circulation systems in buildings using state dependent models. *Queueing Systems*, 4:319-338.