

# **Limiares críticos e distribuição limite para o modelo Bak-Sneppen**

**Matheus Henrique Sales**

Departamento de Estatística - ICEX - UFMG

Fevereiro de 2019

# Limiares críticos e distribuição limite para o modelo Bak-Sneppen

**Matheus Henrique Sales**

Orientador: Roger William Câmara Silva

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Estatística.

Departamento de Estatística  
Instituto de Ciências Exatas  
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte, MG - Brasil

Fevereiro de 2019

Aos meus pais.

# Agradecimentos

Primeiro, meu agradecimento ao meu orientador, Roger William Câmara Silva, pelo comprometimento ao meu trabalho, pelas valiosas sugestões e pelo papel essencial que teve na minha formação como Mestre em Estatística. A maneira como me orientou nesses últimos dois anos foi excepcional, com constante encorajamento e especialmente muita paciência.

Um agradecimento cordial ao colega da turma de mestrado, Pedro Pereira, pelos ótimos momentos de estudos e trabalho.

Muita gratidão aos meus pais, Heliete e Antônio, pelo suporte e incentivo aos meus mais de vinte anos de estudo. Agradeço às minhas irmãs, Aline e Isabela, pela fraternidade e suporte emocional durante todos esses anos.

Minha sincera gratidão à Mariana Oliveira pelo companheirismo e motivação em todos os momentos.

Finalmente, um agradecimento à CAPES pelo suporte financeiro deste trabalho.

# Resumo

Um dos principais problemas relacionados ao modelo evolutivo de Bak-Sneppen é calcular a distribuição limite das *aptidões* no regime estacionário, quando o tamanho do sistema tende ao infinito. Simulações em [2], [13] e [10] sugerem que a distribuição marginal unidimensional limite é uniforme em  $(p_c, 1)$ , para algum  $p_c \sim 0.667$ .

O artigo *Critical Thresholds and the Limit Distribution in the Bak-Sneppen Model* [23] apresenta uma série de resultados relevantes quanto a esta conjectura. Nosso objetivo será então estudar principalmente este artigo, detalhando suas demonstrações da melhor forma possível.

Definiremos três *limiares* críticos relacionados as características de uma avalanche. Provaremos que se esses *limiares* críticos forem idênticos e iguais a algum  $p_c$  (apenas foi provado que dois deles são idênticos), então a distribuição limite é o produto de distribuições uniformes em  $(p_c, 1)$  e, além disso,  $p_c < 0,75$ . Nossas provas serão baseadas em uma representação gráfica auto-similar das avalanches.

Palavras-chave: Bak-Sneppen, evolução, sistema de partículas em interação, criticalidade auto organizada, acoplamento, distribuição estacionária, transição de fase.

# Abstract

One of the key problems related to the Bak-Sneppen evolution model is to compute the limit distribution of the fitnesses in the stationary regime, as the size of the system tends to infinity. Simulations in [2], [13] and [10] suggest that the one-dimensional limit marginal distribution is uniform on  $(p_c, 1)$ , for some  $p_c \sim 0.667$ .

The article Critical Thresholds and the Limit Distribution in the Bak-Sneppen Model [23] presents a series of relevant results to this conjecture. Our objective will then be study this article, detailing its demonstration in the best possible way.

We will define three critical thresholds related to avalanche characteristics. We prove that if these critical thresholds are the same and equal to some  $p_c$  (it has only been proved that two of them are the same) then the limit distribution is the product of uniform distributions on  $(p_c, 1)$ , and moreover  $p_c < 0.75$ . Our proofs are based on a self-similar graphical representation of the avalanches.

Keywords: Bak-Sneppen, evolution, interacting particle system, self-organised criticality, coupling, stationary distribution, phase transition.

# Lista de Figuras

1.1	Espécies estruturadas em um grafo circular. . . . .	1
1.2	Uma configuração das <i>aptidões</i> do modelo Bak-Sneppen na estacionariedade. . . . .	3
1.3	Configuração Uniforme das <i>aptidões</i> . . . . .	3
1.4	Configuração Exponencial dos <i>aptidões</i> . . . . .	4
2.1	Tempos de recorrência progressivo e retroativo. . . . .	15
2.2	Gráficos de $A(t)$ e $B(t)$ . . . . .	15
2.3	Processo de Renovação Alternado. . . . .	17
3.1	Dinâmica de uma <i>avalanche</i> minimal. . . . .	22
3.2	Dinâmica de uma <i>avalanche</i> com mínimo repetido. . . . .	22
3.3	Dinâmica do crescimento do <i>conjunto-alcance</i> . . . . .	23
3.4	Representação Gráfica de uma <i>s-avalanche</i> . . . . .	30
3.5	Representação Gráfica de uma <i>t-avalanche</i> . . . . .	31
3.6	Representação Gráfica $GR_N$ . . . . .	33
3.7	Qualquer caminho fora do $\xi_N(b)$ deve usar pelo menos uma seta dentro de $\xi_N(b)$ . . . . .	48
3.8	Concatenamos a parte de $GR'_N$ antes do <i>limiar</i> $\tau_y^*$ com a parte de $GR_N$ após o <i>limiar</i> $\tau_y^*$ para construir $GR_N(y, b)$ . . . . .	50
3.9	Dinâmica dos <i>limiaries-barreira</i> . . . . .	56
3.10	Partição do plano. . . . .	59
3.11	Divisão do $j$ -ésimo período. . . . .	62

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1	Análise Real . . . . .	6
2.2	Probabilidade e Processos Estocásticos . . . . .	11
2.2.1	Probabilidade Básica . . . . .	11
2.2.2	Processos de Renovação . . . . .	13
<b>3</b>	<b>O modelo Bak-Sneppen</b>	<b>20</b>
3.1	Avalanches . . . . .	20
3.2	Representação Gráfica Auto Similar . . . . .	29
3.3	Principais Resultados . . . . .	38
	<b>Appendix</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Processos de Renovação</b>	<b>73</b>



# Capítulo 1

## Introdução

O modelo *Bak-Sneppen* foi introduzido em [3], como um simples modelo evolutivo, e tem recebido bastante atenção na literatura. Em 2004, um motor de busca da Internet encontrava cerca de 900 resultados com palavra-chave Bak-Sneppen. Atualmente, o número de resultados encontrados é aproximadamente de 18 mil.

Considere um sistema com  $N$  espécies, as quais são representadas por  $N$  vértices, igualmente espaçados, em um círculo.

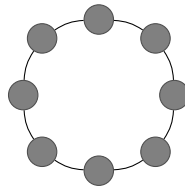


Figura 1.1: Espécies estruturadas em um grafo circular.

Para cada espécie é atribuída uma *aptidão*, um número entre 0 e 1. Podemos pensar que, quanto maior a *aptidão*, maior a chance de sobrevivência da espécie. A dinâmica de evolução é modelada da seguinte maneira:

1. A cada passo discreto de tempo, encontramos o vértice  $m$  com a *aptidão* mínima e o apagamos (a espécie menos apta morre).
2. Esta espécie é então substituída por uma nova, com um nova *aptidão* independente e uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$  (uma nova espécie surge).

3. Repetimos este procedimento infinitas vezes.

Até agora, a falta de interação entre as espécies, nesta dinâmica, não resulta em um processo interessante. De fato, se apenas substituirmos as espécies com a menor *aptidão*, o sistema irá convergir para uma configuração com todas as *aptidões* iguais a 1. Para termos um modelo mais interessante, vamos estabelecer, na dinâmica acima, uma interação entre as espécies. Como antes, considere um sistema com  $N$  espécies, igualmente espaçadas, em um círculo. A nova dinâmica de evolução é modelada da seguinte maneira:

1. A cada passo discreto de tempo, encontramos o vértice  $m$  com a *aptidão* mínima e apagamos ele e seus 2 vizinhos ( $m - 1$  e  $m + 1$ ).
2. Estas espécies são então substituídas por novas, com novas *aptidões* independentes e uniformemente distribuídas em  $[0, 1]$ .
3. Repetimos este procedimento infinitas vezes.

A interação foi introduzida quando, além do vértice com menor *aptidão*, substituímos os seus dois vizinhos por novas espécies. Essa interação representa a co-evolução entre espécies relacionadas. De um ponto de vista matemático, a interação entre os vizinhos torna o modelo atraente e altamente não-trivial. Daqui em diante, os nossos estudos são todos referentes ao modelo com esta última dinâmica apresentada, o modelo Bak-Sneppen.

Como a dinâmica de evolução é bem simples, o modelo é facilmente executado em um computador. Simulações realizadas em [13] e [10], sugerem, para  $N$  suficientemente grande, o comportamento a seguir: quando  $N \rightarrow \infty$  as distribuições marginais unidimensionais das *aptidões* aparentam ser uniformes  $(p_c, 1)$ ; onde  $p_c$  é um (*limiar*) valor numérico próximo a  $\frac{2}{3}$  (veja [10]). Veja a figura abaixo:

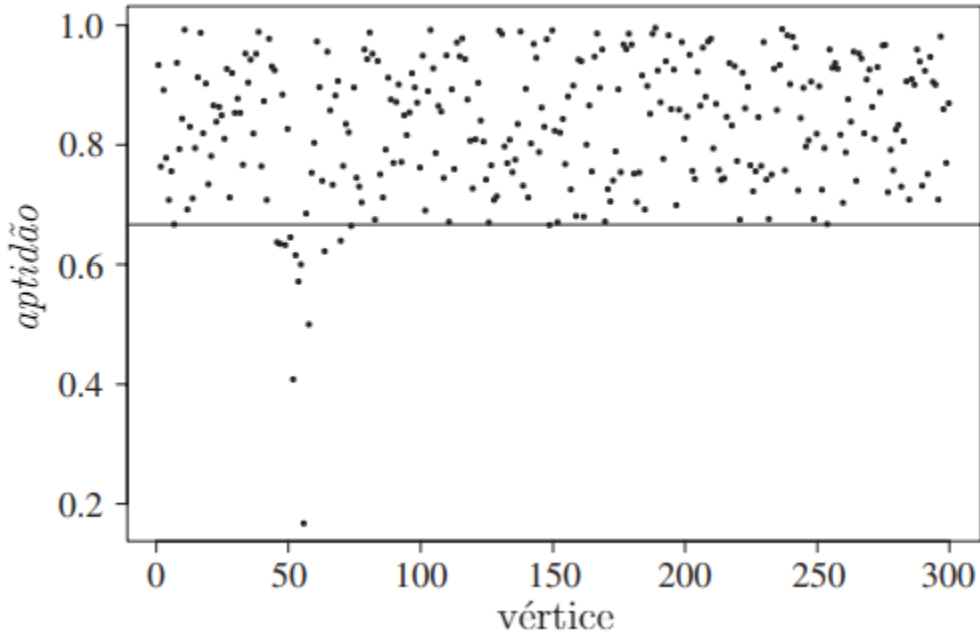


Figura 1.2: Uma configuração das *aptidões* do modelo Bak-Sneppen na estacionariedade.

Como as *aptidões* dos vértices são variáveis aleatórias com valores no intervalo  $[0, 1]$ , podemos projetar nosso modelo no plano  $\Lambda(N) \times [0, 1]$ , onde  $\Lambda(N) := \{0, \dots, N - 1\}$ . Veja a figura abaixo:

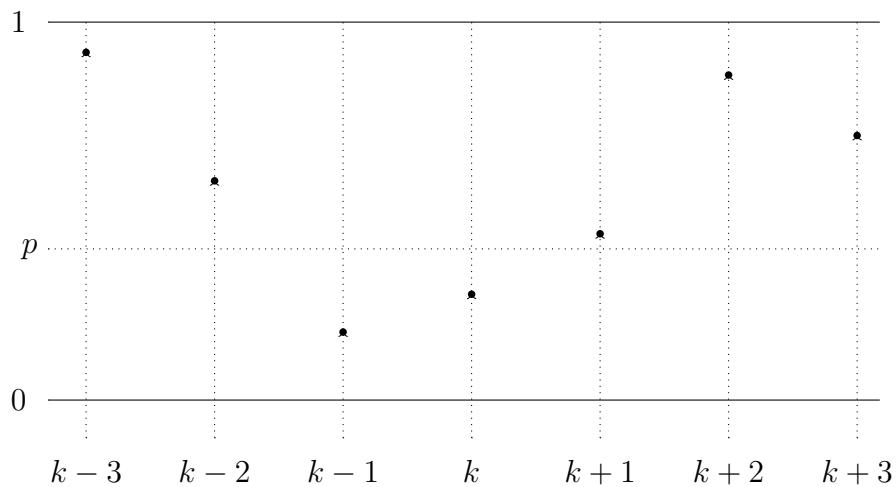


Figura 1.3: Configuração Uniforme das *aptidões*.

Para manter a estrutura circular do modelo basta pensar que, o vértice mais a esquerda é vizinho do vértice mais a direita (e vice-versa), ou seja,  $0$  e  $N - 1$  são vizinhos.

**Observação 1.1.** *No decorrer do texto iremos somar e subtrair os índices de  $\Lambda(N)$  como inteiros, identificando-os em módulo  $N$ . Por exemplo, às vezes denotaremos o vértice  $N - 1$  como o vértice  $-1$ . Para simplificar as expressões, omitiremos  $(\text{mod } N)$  nas operações algébricas em  $\Lambda(N)$  contanto que não cause confusão.*

Entretanto, por razões que se tornarão claras posteriormente, é mais conveniente as *aptidões* assumirem valores no intervalo  $[0, \infty]$  e então atualizá-las de acordo com a distribuição exponencial com parâmetro 1. Podemos então projetar o modelo no plano  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}_+$  de forma análoga a feita anteriormente.

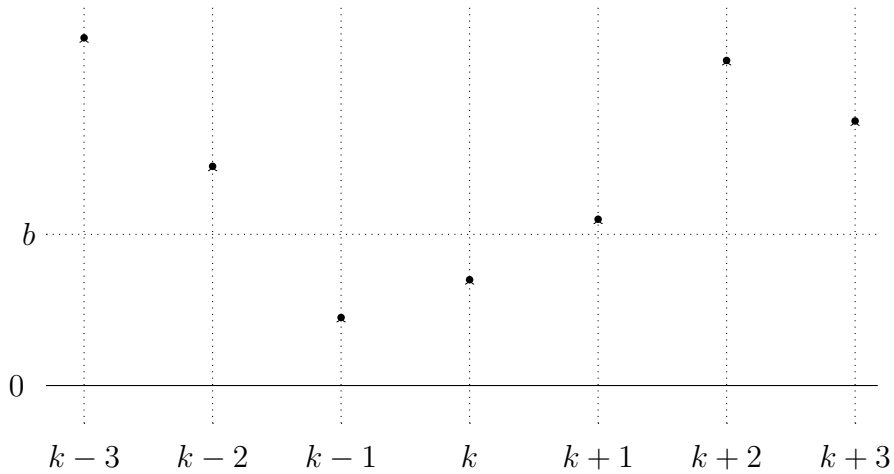


Figura 1.4: Configuração Exponencial dos *aptidões*.

Nessa nova configuração *exponencial*, que denotaremos por **BS-processo** daqui em diante, o *limiar*  $b$  corresponde ao *limiar*  $q(b) = 1 - e^{-b}$  na configuração *uniforme* original. Podemos então reformular a conjectura para esta nova configuração *exponencial* da seguinte maneira.

**Conjectura 1.2.** *Quando  $N \rightarrow \infty$  as distribuições marginais unidimensionais estacionárias das aptidões aparentam ser exponencialmente distribuídas acima de  $b_c$ ; onde  $b_c$  é um (limiar) valor numérico próximo de  $1.0996 \simeq q^{-1}(\frac{2}{3})$ .*

Nessa dissertação, estudaremos o artigo [23] que apresenta uma série de resultados relevantes quanto a esta conjectura. Apesar do foco dos nossos estudos sobre o modelo

ser estritamente teórico, iremos citar como aplicações a modelagem de processos macroeconômicos ([7] e [29]) e a modelagem da evolução das populações de bactérias, que pode ser encontrada em [6], [16], [8]. Para evitar dificuldades matemáticas, algumas versões simplificadas do modelo também foram propostas, por exemplo, a versão de campo médio do modelo ([24], [5], [19]), versões discretas ([4], [22], [14]) e uma versão local é descrita em [28]. Destacamos também que a distribuição estacionária para o modelo Bak-Sneppen original foi calculada para  $N = 4$  e  $N = 5$  em [26], [27] respectivamente, assim como em [1].

# Capítulo 2

## Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos que serão necessários para um entendimento mais profundo do texto. O leitor mais familiarizado com o conteúdo pode omitir a leitura deste capítulo e regressar a ele quando achar necessário. Aqui, iremos apenas enunciar os resultados, uma vez que são bastantes conhecidos na literatura. Então, para aqueles que desejam compreender as demonstrações dos tópicos deste capítulo, recomenda-se a leitura da bibliografia indicada.

### 2.1 Análise Real

Nesta seção iremos apresentar alguns conceitos de análise real que serão importantes para o entendimento do restante do texto. Vamos supor que todas as funções desta seção estão definidas em  $R_+ := [0, \infty)$  e todas as distribuições estão concentradas em  $R_+$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $g$  uma função localmente limitada e  $F$  uma distribuição. Definimos a **convolução** de  $F$  e  $g$  como a função*

$$F * g(t) := \int_0^t g(t-x)F(dx) \quad \text{para } t \geq 0.$$

Agora apresentaremos algumas propriedades da convolução.

**Propriedade 2.2.**  $F * g \geq 0$ .

**Propriedade 2.3.**  $F * g$  é localmente limitada; de fato

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |F * g(s)| \leq \left( \sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| \right) F(t).$$

Para verificar isto basta definirmos  $\sup_{0 \leq s \leq t} |g(s)| := \|g\|$ , que é finito para todo  $t$  pela hipótese de  $g$  ser localmente limitada. Então para qualquer  $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} |F * g(s)| &= \left| \int_0^s g(s-x) F(dx) \right| \leq \int_0^s |g(s-x)| F(dx) \leq \\ &\leq \|g\| \int_0^s F(dx) \leq \|g\| \int_0^t F(dx) = \|g\| F(t) < \infty. \end{aligned}$$

**Propriedade 2.4.** Se  $g$  é limitada e contínua, então  $F * g$  é contínua.

Veja que,  $F * g(t) = \mathbb{E}[g(t - Y_1)]$  onde  $Y_1$  tem distribuição  $F$ . Então se  $t_n \rightarrow t$ , temos que  $g(t_n - Y_1) \rightarrow g(t - Y_1)$  q.c., por continuidade, e como  $g$  é limitada, pelo Teorema da Convergência Dominada  $\mathbb{E}[g(t_n - Y_1)] = F * g(t_n) \rightarrow F * g(t) = \mathbb{E}[g(t - Y_1)]$ , quando  $t_n \rightarrow t$ . Para facilitar a escrita, definiremos:

$$\begin{aligned} F^{0*}(x) &:= \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x), \\ F^{1*}(x) &:= F(x), \\ F^{(n+1)*}(x) &:= F^{n*} * F(x) \quad (\text{para } n \geq 1). \end{aligned}$$

Veja que  $F^{0*}$  atua como uma identidade, isto é,  $F^{0*} * g = g$ .

**Propriedade 2.5.** (Associatividade)  $F * (F * g) = (F * F) * g = F^{2*} * g$ .

**Propriedade 2.6.** (Comutatividade)  $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$ .

Temos

$$\begin{aligned} F_1 * F_2(t) &= \int_0^t F_2(t-x) F_1(dx) = \int_0^t \left( \int_0^{t-x} F_2(dy) \right) F_1(dx) = \\ &= \int \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x+y \leq t\}} F_2(dy) F_1(dx) = \\ &= \int_0^t \left( \int_0^{t-y} F_1(dx) \right) F_2(dy) = \int_0^t F_1(t-y) F_2(dy) = F_2 * F_1(t). \end{aligned}$$

**Propriedade 2.7.** (Distributividade)  $(F_1 * (F_2 + F_3))(\lambda) = ((F_1 * F_2) + (F_1 * F_3))(\lambda)$ .

Temos

$$\begin{aligned} (F_1 * (F_2 + F_3))(t) &= \int_0^t (F_2(t-x) + F_3(t-x))F_1(dx) = \\ &= \int_0^t F_2(t-x)F_1(dx) + \int_0^t F_3(t-x)F_1(dx) = ((F_1 * F_2) + (F_1 * F_3)). \end{aligned}$$

**Propriedade 2.8.** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  independentes, com  $X_i$  tendo distribuição  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ . Então  $X_1 + X_2$  tem distribuição  $F_1 * F_2$ .*

Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq t] &= \mathbb{P}[(X_1, X_2) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y \leq t\}] = \\ &= \int \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x+y \leq t\}} F_2(dy)F_1(dx) = F_1 * F_2(t). \end{aligned}$$

Ou seja, a convolução de duas distribuições corresponde à distribuição da soma de duas variáveis independentes. Por indução, podemos demonstrar que se  $X_1, \dots, X_n$  são i.i.d. com distribuição comum  $F$ , então  $X_1 + \dots + X_n$  tem distribuição  $F^{n*}$ .

Sejam  $F_1$  e  $F_2$  distribuições com densidades  $f_1$  e  $f_2$  respectivamente, então  $F_1 * F_2$  é uma distribuição com densidade

$$f_1 * f_2 := \int_0^t f_1(t-y)f_2(y)dy = \int_0^t f_2(t-y)f_1(y)dy.$$

**Exemplo 2.9.** *Se  $X$  tem densidade exponencial  $f$  com parâmetro  $\alpha$  de tal modo que  $F(dx) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{0,\infty}(x)dx$ . Então  $F^{2*}(dx) = \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx$ , pois*

$$f * f = \int_0^t f(t-x)f(x)dx = \int_0^t \alpha e^{-\alpha(t-x)} \alpha e^{-\alpha x} dx.$$

Por recorrência temos que

$$F^{n*}(dx) = \alpha(\alpha x)^{n-1} \frac{e^{-\alpha x}}{(n-1)!} dx, \quad n \geq 1, x > 0.$$

Apesar de ser muito útil, a convolução é uma operação muitas vezes difícil. Para facilitar essa tarefa apresentaremos a seguir a transformada de Laplace e algumas das suas propriedades.

**Definição 2.10.** *Suponha que  $X$  é uma variável aleatória não negativa com distribuição  $F$ . A **transformada de Laplace** de  $X$  ou  $F$  é a função definida em  $R_+$  por*

$$\hat{F}(\lambda) := \mathbb{E}[e^{-\lambda X}] = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F(dx), \quad \lambda \geq 0.$$



Note que, como  $e^{-\lambda X} \leq 1$ , temos que  $\hat{F}(\lambda) < \infty$ ,  $\forall \lambda > 0$ .

**Exemplo 2.11.** Se  $X$  tem densidade exponencial com parâmetro  $\alpha$  de tal modo que  $F(dx) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{0,\infty}(x) dx$ , então

$$\hat{F}(\lambda) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\alpha)x} dx = \frac{\alpha}{(\alpha + \lambda)}.$$

A seguir algumas propriedades úteis da transformada de Laplace.

**Propriedade 2.12.** *Distribuições distintas tem transformadas de Laplace distintas.*

Isso pode ser demonstrado usando o *Teorema de Lerch* (ver [17]). A propriedade acima diz que uma distribuição é unicamente determinada conhecendo-se sua transformada de Laplace.

**Propriedade 2.13.** *Suponha que  $X_1, X_2$  são independentes e que  $X_i$  tem distribuição  $F_i, i = 1, 2$ . Então*

$$(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = \hat{F}_1(\lambda) \hat{F}_2(\lambda).$$

Temos

$$(\widehat{F_1 * F_2})(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda(X_1+X_2)} = \mathbb{E}[e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2}] \stackrel{\text{independência}}{=} \mathbb{E}e^{-\lambda X_1} \mathbb{E}e^{-\lambda X_2} = \hat{F}_1(\lambda) \hat{F}_2(\lambda).$$

Da mesma forma, para qualquer  $n \geq 0$ , se  $F$  é uma distribuição, então

$$(\widehat{F^{n*}})(\lambda) = (\hat{F}(\lambda))^n.$$

Portanto, a transformada de Laplace converte uma operação bastante complexa de convolução em uma simples operação de multiplicação.

**Propriedade 2.14.** *(Fórmulas Convenientes)*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F(x) dx = \frac{\hat{F}(\lambda)}{\lambda}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} (1 - F(x)) dx = \frac{(1 - \hat{F}(\lambda))}{\lambda}. \quad (2.1)$$

A segunda fórmula segue diretamente da primeira, a qual é obtida simplesmente por uma inversão na ordem de integração

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} F(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left( \int_0^x F(du) \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left( \int_u^\infty e^{-\lambda x} dx \right) F(du) = \int_0^\infty e^{-\lambda u} \lambda^{-1} F(du) = \frac{\hat{F}(\lambda)}{\lambda}.$$

Agora podemos estender esses conceitos para distribuições e medidas  $U$  em  $\mathbb{R}_+$ . Seja  $U(x)$  não decrescente em  $\mathbb{R}_+$ , mas possivelmente  $U(\infty) := \lim_{x \uparrow \infty} U(x) > 1$ . Se existe  $a \geq 0$ , tal que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) < \infty, \quad \text{para } \lambda > a,$$

então a transformada de Laplace de  $U$  será

$$\hat{U}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda x} U(dx) < \infty, \quad \lambda > a.$$

Se tal  $a$  não existe, dizemos que a transformada de Laplace é indefinida. As propriedades anteriores são diretamente estendidas para esse novo contexto. Por exemplo, a transformada de Laplace de  $U$ , se existe, determina  $U$  unicamente.

A razão para determinarmos as transformadas de Laplace dessas funções  $U$  é que, como veremos nas próximas seções, frequentemente utilizamos a função de renovação  $U(t)$ , que será definida posteriormente, e é conveniente sermos capazes de tomar a transformada de Laplace desta função.

Por fim, terminaremos essa seção apresentando a definição de diretamente Riemann integrável. Suponha que a função  $z$  satisfaça  $z(t) \geq 0$ , para  $t \geq 0$ , e  $z(t) = 0$ , para  $t < 0$ . Seja

$$\bigvee_{t \in A} f(t) = \sup_{t \in A} f(t) \quad , \quad \bigwedge_{t \in A} f(t) = \inf_{t \in A} f(t)$$

a notação para o supremo e o ínfimo de uma função real  $f$  definida no domínio  $A$ . Sejam, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \bar{m}_n(h) &= \bigvee_{(n-1)h \leq s < nh} z(s) \quad , \quad \underline{m}_n(h) = \bigwedge_{(n-1)h \leq s < nh} z(s) \\ \bar{\sigma}(h) &= \sum_{k: kh \leq a} h \bar{m}_n(h) \quad , \quad \underline{\sigma}(h) = \sum_{k: kh \leq a} h \underline{m}_n(h). \end{aligned}$$

Note que,  $\underline{\sigma}(h)$  é não-decrescente quando  $h \downarrow 0$ , e  $\bar{\sigma}(h)$  é não-crescente quando  $h \downarrow 0$ . Dizemos que  $z$  é **R-integrável** em  $[0, a]$  se

$$\bar{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

e, nesse caso, definimos

$$\int_0^a z(s)ds := \lim_{h \downarrow 0} \bar{\sigma}(h).$$

Um fato importante é que  $z$  é  $R$ -integrável em  $[0, a]$  se, e somente se,  $z$  é limitada e contínua em quase todo ponto. Então, dizemos que  $z$  é  $R$ -integrável em  $[0, a]$ , para todo  $a > 0$ , se  $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a z(s)ds$  existe. Nesse caso,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a z(s)ds =: \int_0^\infty z(s)ds.$$

Agora, seja  $\underline{m}(h)$  e  $\bar{m}(h)$  como definidas anteriormente. Vamos alterar  $\underline{\sigma}(h)$  e  $\bar{\sigma}(h)$  para

$$\bar{\sigma}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} h\bar{m}_n(h) \quad e \quad \underline{\sigma}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} h\underline{m}_n(h).$$

Então  $z$  é **diretamente Riemann integrável** (dRi) se  $\bar{\sigma}(h) < \infty$  para todo  $h$  e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) = 0.$$

Observe que, se  $\bar{\sigma}(h) = \infty$ , não temos como encontrar  $h' < h$  tal que  $\bar{\sigma}(h') < \infty$ .

**Observação 2.15.** *Se  $z$  tem suporte compacto então  $z$  ser  $R$ -integrável é o mesmo que  $z$  ser dRi.*

## 2.2 Probabilidade e Processos Estocásticos

### 2.2.1 Probabilidade Básica

Nesta seção iremos apresentar alguns conceitos de teoria da probabilidade que serão importantes para o entendimento do restante do texto.

**Definição 2.16.** *Seja  $X$  um variável aleatória com distribuição  $F$ . A **função de distribuição direita** de  $X$  é*

$$\mathbb{P}(X > x) =: F^c = 1 - F.$$

**Definição 2.17.** *Seja  $A \subseteq \Omega$  um evento e  $X$  uma variável aleatória qualquer. Defina*

$$\mathbb{E}[X; A] = \int_A X dP = \int_\Omega X \cdot \mathbb{1}\{X \in A\} dP. \quad (2.2)$$

**Proposição 2.18.** *Sejam os eventos  $A_i$  disjuntos tal que  $\bigcup_i A_i = \Omega$ , então*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \left( \mathbb{E}[X; A_i] \right). \quad (2.3)$$

**Definição 2.19.** *Seja  $A \subseteq \Omega$  um evento e  $X$  uma variável aleatória qualquer, então a **esperança condicional** de  $X$  dado  $A$  é*

$$\mathbb{E}[X | A] = \frac{\mathbb{E}[X; A]}{\mathbb{P}(A)}. \quad (2.4)$$

Um Processo de Ramificação é um modelo simples para modelar o crescimento de uma população ao longo do tempo. Suponha que cada indivíduo gera um número de descendentes independentemente dos outros indivíduos, mas com a mesma distribuição. Denotamos a distribuição de descendentes por

$$p_i := \mathbb{P}[\text{indivíduo gera } i \text{ descendentes}].$$

Seja  $Z_n$  o número de indivíduos na  $n$ -ésima geração (por convenção  $Z_0 = 1$ ). Então  $Z_n$  satisfaz a relação de recorrência

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i},$$

onde  $(X_{n,i})_{n,i \geq 1}$  é um vetor de variáveis aleatórias i.i.d.. Seja  $X$  uma distribuição de modo que  $X_{n,i} \sim X \quad \forall n, i \geq 0$ . Nesse caso,  $X$  é chamada de distribuição de descendentes do Processo de Ramificação.

Denotaremos a probabilidade de extinção do Processo de Ramificação por

$$\eta := \mathbb{P}[\exists n : Z_n = 0].$$

Então o resultado principal na transição de fase para Processos de Ramificação é o seguinte teorema, o qual pode ter sua demonstração encontrada em [12].

**Teorema 2.20.** *Para um Processo de Ramificação com distribuição de descendentes i.i.d.  $X$ . Seja  $\eta$  a probabilidade de extinção. Temos que*

1. *Se  $\mathbb{E}[X] < 1$ , então  $\eta = 1$ .*
2. *Se  $\mathbb{E}[X] > 1$ , então  $\eta < 1$ .*
3. *Se  $\mathbb{E}[X] = 1$  e  $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ , então  $\eta = 1$ .*

## 2.2.2 Processos de Renovação

Seja  $\{Y_n, n \geq 0\}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes que assumem apenas valores não negativos. Além disso, suponha que a sequência  $\{Y_n, n \geq 1\}$  é identicamente distribuída com uma distribuição comum  $F(x)$ . Assumimos sempre que

$$F(0-) = 0, \quad F(0) < 1,$$

ou, equivalentemente, para cada  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}[Y_n < 0] = 0, \quad \mathbb{P}[Y_n = 0] < 1.$$

Para  $n \geq 0$ , defina

$$S_n = Y_0 + \cdots + Y_n.$$

A sequência  $\{S_n, n \geq 0\}$  é chamada de sequência de renovação. As quantidades  $S_n$  são geralmente consideradas como tempos de ocorrência de algum fenômeno e são chamados tempos de renovação ou chegadas. O processo é chamado **atrasado** se  $\mathbb{P}[Y_0 > 0] > 0$ ; caso contrário, é **puro**, e assim  $S_0 = 0 = Y_0$ , de modo que para um processo de renovação puro o tempo zero é considerado um tempo de renovação.  $F$  é chamada de distribuição entre chegadas. Se  $F$  é adequada, isto é,  $F(\infty) = 1$ , então o processo é chamado adequado. Se  $F$  é defeituosa, isto é,  $F(\infty) < 1$ , então  $\{S_n\}$  é transiente, e haverá uma renovação final.

Focaremos nesta seção nas propriedades da variável aleatória  $N(t)$ , onde  $N(t)$  é a função de contagem do número de renovações no intervalo de tempo  $[0, t]$ , ou seja,

$$N(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n).$$

Chamaremos  $\mathbb{E}[N(t)]$  de **função de renovação**, a qual desempenha um papel fundamental na análise assintótica do processo. Note que se  $S_0 = 0$ , então  $t = 0$  é contado como um tempo de renovação, e nesse caso a função de renovação é

$$\mathbb{E}[N(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) =: U(t).$$

Por outro lado, no caso atrasado, se  $S_0 = Y_0$  tem distribuição (de atraso)  $G$ , então a função de renovação é

$$\mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} G * F^{(n-1)*}(t) = G * U(t) =: V(t).$$

As seguintes relações entre  $\{S_n\}$  e  $\{N(t)\}$  serão úteis:

$$[N(t) \leq n] = [S_n > t], \quad n \geq 0, \quad (2.5)$$

$$S_{N(t)-1} \leq t < S_{N(t)}, \quad \text{em } [N(t) \geq 1], \quad (2.6)$$

$$[N(t) = n] = [S_{n-1} \leq t < S_n], \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

Sejam  $Z$  uma função desconhecida,  $z$  uma função conhecida e  $F$  uma distribuição em  $\mathbb{R}_+$  com  $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) < \infty$ . Todas as funções estão definidas em  $\mathbb{R}_+$ , e é conveniente definir  $z(t) = Z(t) = F(t) = 0$  para  $t < 0$ . Então a **equação de renovação** é a equação de convolução da forma

$$Z = z + F * Z, \quad \text{ou} \quad Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-y)F(dy). \quad (2.8)$$

Se  $F(\infty) = 1$  então chamamos a equação de renovação de própria. Vamos analisar agora a solução de uma equação de renovação.

**Teorema 2.21.** *Suponha que  $z(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $z$  localmente limitado e  $F(0) < 1$ . Então*

1. *Uma solução localmente limitada da equação de renovação é*

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-u)U(du).$$

2. *Não existe outra solução localmente limitada em  $(-\infty, 0)$ .*

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada no Apêndice A. A seguir vamos voltar nossa atenção para os tempos de recorrência *progressivo* e *retroativo*.

Considere uma sequência de renovação  $\{S_n, n \geq 0\}$  com  $S_n - S_{n-1} = Y_n$ , para  $n \geq 1$ . Seja  $B(t)$  o **tempo de recorrência progressivo**, que é o tempo que falta até a próxima renovação, e seja  $A(t)$  o **tempo de recorrência retroativo**, que é o tempo que passou desde a última renovação, i.e.,

$$B(t) := S_{N(t)} - t; \quad A(t) := t - S_{N(t)-1}, \quad \text{para } t \geq S_0.$$

Veja a figura abaixo:

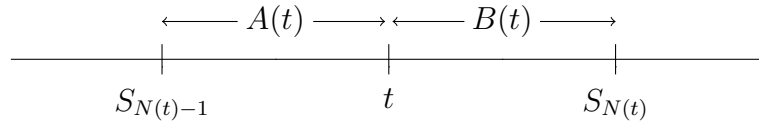


Figura 2.1: Tempos de recorrência progressivo e retroativo.

O gráfico da função  $A(t)$  são segmentos de retas crescentes, entre os saltos, com inclinação de  $45^\circ$ . Para a função  $B(t)$  o gráfico são segmentos de retas decrescentes, entre os saltos, com inclinação de  $-45^\circ$ . Para ficar mais claro veja a figura abaixo:

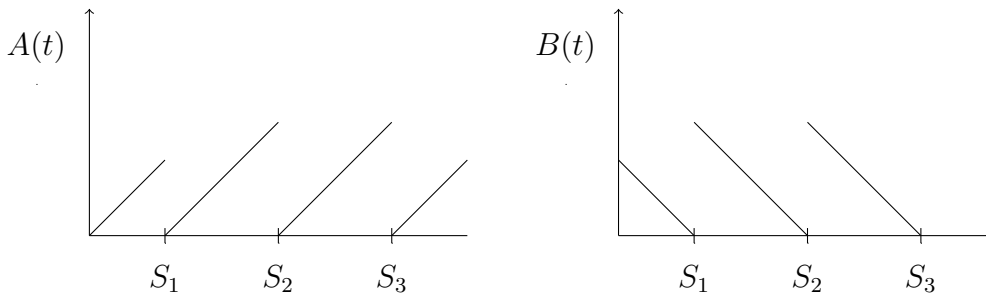


Figura 2.2: Gráficos de  $A(t)$  e  $B(t)$ .

Os dois principais resultados na Teoria dos Processos de Renovação são o *Teorema de Blackwell* e o que é conhecido como o *Teorema Chave da Renovação*, originalmente formulado por Walter Smith.

**Teorema 2.22.** *Suponha que a distribuição entre chegadas  $F$  é adequada e  $F(0) < 1$ . Seja*

$$\mu = \int_0^\infty xF(dx) \leq \infty, \quad F_0(x) = \mu^{-1} \int_0^x (1 - F(y))dy \quad (\text{onde se } \mu = \infty \text{ então } F_0 \equiv 0).$$

*Lembre-se que  $U$  é a função de renovação de um processo de renovação puro e  $V$  é a função de renovação de um processo de renovação atrasado. São equivalentes:*

- (i) **O Teorema da Renovação de Blackwell:** *Se  $G$  é qualquer distribuição de atraso adequada, então para  $b > 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, t + b] = \mu^{-1}b.$$

(ii) **O Teorema Chave da Renovação:** Suponha que  $z(t)$  é dRi. Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U * z(t) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} z(s) ds.$$

(iii) Para qualquer distribuição de atraso adequada  $G$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B(t) \leq x] = F_0(x), \quad \forall x > 0.$$

(iv) Para qualquer distribuição de atraso adequada  $G$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A(t) \leq x] = F_0(x), \quad \forall x > 0.$$

A demonstração do teorema acima também pode ser encontrada no Apêndice A.

Um processo de renovação alternado modela um sistema que, ao longo do tempo, alterna entre dois estados, que denotamos por 1 (ativo) e 0 (inativo). O sistema começa no estado 1. A hipótese base é que os pares de tempos aleatórios gastos sucessivamente nos dois estados formam uma sequência independente e identicamente distribuída.

**Exemplo 2.23.** *Imagine que uma lâmpada fique acessa até que ela queime e depois seja trocada por uma lâmpada idêntica, que por sua vez fica acessa até que queime, e assim por diante. Nesse sistema, os momentos em que as lâmpadas estão acessas correspondem ao estado ativo, enquanto os tempos em que elas estão queimadas correspondem ao estado inativo.*

Seja  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots)$  os períodos de tempo em que o sistema está no estado ativo, e seja  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots)$  os períodos de tempo em que o sistema está no estado inativo. Portanto, o sistema inicia no estado 1 e permanece nesse estado por um período de tempo  $A_1$ , em seguida, vai para o estado 0 e permanece nesse estado por um período de tempo  $I_1$ , depois volta ao estado 1 por um período de tempo  $A_2$  e assim por diante. Essa dinâmica do processo pode ser vista na figura abaixo:



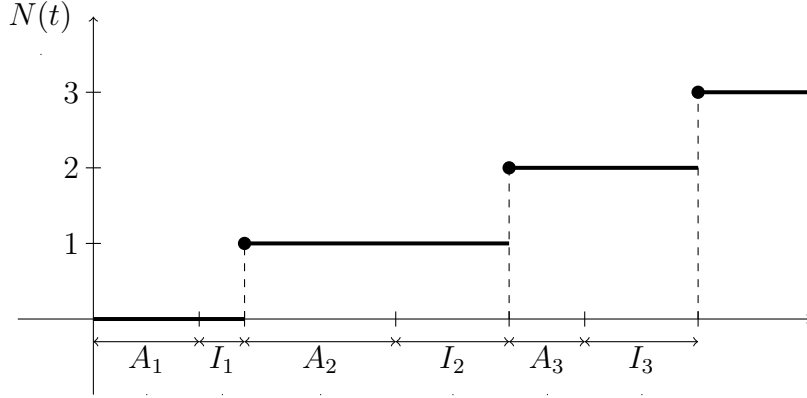


Figura 2.3: Processo de Renovação Alternado.

Como já mencionado anteriormente, nossa hipótese é que  $\mathbf{W} = ((A_1, I_1), (A_2, I_2), \dots)$  é uma sequência i.i.d.. Segue-se que  $\mathbf{A}$  é uma sequência i.i.d. e que  $\mathbf{I}$  também é uma sequência i.i.d.. Seja  $\mu = \mathbb{E}[A_1]$  a média dos períodos de tempo no estado ativo e  $\nu = \mathbb{E}[I_1]$  a média dos períodos de tempo no estado inativo. Seja  $G$  a função de distribuição de um período de tempo  $A$  no estado 1 e seja  $G^c = 1 - G$  a função de distribuição direita de  $A$ .

É intuitivo considerar o retorno ao estado 1 como uma chegada no Processo de Renovação. Então, seja  $M_n = A_n + I_n$  para  $n \in \mathbb{N}$  e considere o Processo de Renovação com tempos entre chegadas  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots)$ . Isso faz sentido, pois  $\mathbf{M}$  é uma sequência i.i.d. de variáveis aleatórias não negativas. Então, a distribuição comum das variáveis  $M_n$  será denotada por  $F$ , o processo de contagem será  $\{N(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ , e a função de renovação é  $U$ . Mas observe que a média dos períodos de tempo no estado ativo-inativo é  $\mathbb{E}[M_1] = \mu + \nu$ .

**Definição 2.24.** *O Processo de Renovação associado com  $\mathbf{W} = ((A_1, I_1), (A_2, I_2), \dots)$  como construído acima é conhecido como um **Processo de Renovação Alternado**.*

Nosso interesse é no estado  $E_t$  do sistema no tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ . Observe que  $\mathbf{E} := \{E_t : t \in \mathbb{R}_+\}$  é um processo estocástico com espaço de estados  $\{0, 1\}$ . Os processos estocásticos  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{E}$  são equivalentes já que conseguimos obter um do outro. Seja  $\rho(t) := \mathbb{P}[E_t = 1]$ , a probabilidade do sistema estar ativo no tempo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Lema 2.25.** *A função  $\rho$  satisfaz a equação de renovação  $\rho = G^c + \rho * F$ . Assim,  $\rho = G^c + G^c * U$ .*

A demonstração desse Lema também pode ser encontrada no Apêndice A.

**Definição 2.26.** Se  $X$  toma valores no conjunto  $\{m\lambda : m \in \mathbb{N}\}$  para algum  $\lambda \in (0, \infty)$ , então  $X$  (ou sua distribuição) é **aritmética**. O maior desses  $\lambda$  é o período de  $X$ .

**Teorema 2.27.** Se o Processo de Renovação é não-aritmético, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 2.25, temos  $\rho = G^c + G^c * U$ . Primeiramente,  $\lim_{t \rightarrow \infty} G^c(t) = 0$  é uma propriedade da função de distribuição direita. Logo, pelo Teorema Chave da Renovação,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (G^c * U)(t) = \frac{1}{\mu + \nu} \int_0^\infty G^c(s) ds.$$

Por outra propriedade da função de distribuição direita  $\int_0^\infty G^c(s) ds = \mu$ . Então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (G^c * U)(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \frac{\mu}{\mu + \nu}.$$

□

Assim, a probabilidade limite em que o sistema está ativo é simplesmente a razão entre a média de um período ativo e a média de um período ativo-inativo. Segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[E_t = 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \rho(t)) = \frac{\nu}{\mu + \nu}.$$

Portanto, em particular, o fato de o sistema começar no estado ativo não faz diferença no limite. Claramente, o modelo de um sistema alternando entre dois estados é básico e importante, mas, além disso, esses processos alternados são frequentemente encontrados em outros processos estocásticos.

Um caso particular, e talvez o mais importante, do Processo de Renovação é o Processo de Poisson. Uma maneira conveniente de definir um Processo de Poisson homogêneo em  $\mathbb{R}_+$  com taxa  $\alpha$  é dizer que é um processo de renovação pura com distribuição entre chegadas

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x > 0,$$

onde não contamos uma renovação no tempo 0. Assim, o Processo de Poisson é a função de contagem  $\{N(0, t], t > 0\}$  onde  $N(0, t] = N(t) - 1 = N(t) - N(0)$  e  $\{N(t), t \geq 0\}$  é o

Processo de Renovação puro correspondente a tempos entre chegadas exponencialmente distribuídos.

Portanto, com a ajuda dos Exemplos 2.9 e 2.11, temos para um processo puro que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N(t) = n + 1] &= \mathbb{P}[S_n \leq t < S_{n+1}] = F^{n*}(t) - F^{(n+1)*}(t) = \\ &= 1 - e^{-\alpha x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha x)^k}{k!} - \left(1 - e^{-\alpha x} \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha x)^k}{k!}\right) = e^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = \mathbb{P}[N(0, t] = n]. \end{aligned}$$

A propriedade da falta de memória da distribuição exponencial é evidenciada no fato que

$$\mathbb{P}[B(t) \leq x] = 1 - e^{-\alpha x},$$

e podemos verificar que

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & , \text{ se } t \geq x \\ 1 & , \text{ se } t < x. \end{cases}$$

Por fim, temos que

$$U(t) = \mathbb{E}[N(t)] = 1 + \mathbb{E}[N(0, t]] = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} = 1 + \alpha t.$$

**Teorema 2.28. (*Superposição*):** *Seja  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  uma coleção enumerável de Processos de Poisson independentes no espaço de estados  $S$ , onde  $\Pi_n$  tem taxa  $\lambda_n$  para cada  $n$ . Então a superposição desses processos*

$$\Pi := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

*é um Processo de Poisson com taxa*

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n.$$

Uma demonstração para esse teorema pode ser encontrada em [15].

# Capítulo 3

## O modelo Bak-Sneppen

Como visto anteriormente, a dinâmica do *BS-processo* é bastante simples. Mas não somos capazes de deduzir muitos resultados somente com ela. Para isso iremos apresentar nesse capítulo alguns conceitos que nos auxiliarão nos estudos sobre o *BS-processo*.

### 3.1 Avalanches

Começaremos definindo o que é uma *b-avalanche* para o caso em que temos o número de vértices finito. Na segunda parte, estenderemos esse conceito para o caso em que temos o número de vértices infinito. Adiante, quando falarmos em caso finito e caso infinito estaremos nos referindo ao número de vértices do sistema.

**Definição 3.1.** Para qualquer vértice  $x \in \Lambda(N)$ , a **vizinhança**  $\mathcal{V}(x)$  de  $x$  é o subconjunto de  $\Lambda(N)$  formado por  $x$  e seus dois vizinhos. Isto é,  $\mathcal{V}(x) = \{x - 1, x, x + 1\}$ .

Em particular,  $\mathcal{V}(0) = \{N - 1, 0, 1\}$ . Mas para facilitar a escrita iremos definir a vizinhança do vértice 0 como  $\mathcal{V}(0) := \{-1, 0, 1\}$  (veja Observação 1.1).

**Definição 3.2.** Para qualquer  $N \geq 3$  considere um *BS-processo* em  $\Lambda(N)$ . Seja  $X_{N,i}(n)$  a aptidão do vértice  $i \in \Lambda(N)$  para qualquer tempo  $n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\mathcal{X}_N(n) = \{X_{N,i}(n)\}_{i \in \Lambda(N)}$$

é a coleção das aptidões no tempo  $n \geq 0$ .

Considere um *BS-processo* com  $N$  vértices, sendo  $N \geq 3$ . No tempo  $n \in \mathbb{N}$  escolha um *limiar*  $b \in [0, \infty)$  tal que nenhuma *aptidão* esteja abaixo de  $b$ . Ou seja,

$$b < \min_{i \in \Lambda(N)} \{X_{N,i}(n)\}, \text{ onde } X_{N,i}(n) \in \chi_N(n).$$

**Definição 3.3.** Uma *b-avalanche* em  $\Lambda(N)$ , com **origem** no vértice  $x \in \Lambda(N)$  e **duração**  $d \geq 1$  ocorre, no intervalo de tempo  $[n, n+d)$ , se

1. No tempo  $n$ , o vértice  $x$  é o com menor aptidão, acima de  $b$ . Portanto, o vértice  $x$  e seus vizinhos  $\{x-1, x+1\}$  serão atualizados.
2. Enquanto houver um vértice com aptidão abaixo de  $b$ , atualizamos o vértice com aptidão mínima e seus vizinhos. O tempo  $n+d$  é o primeiro depois de  $n$  com todas as aptidões acima de  $b$  novamente.

As *b-avalanches* em  $\Lambda(N)$  tem duas características principais, o **conjunto-alcance** que é a coleção de vértices atualizados durante a *b-avalanche* e a **duração** que é o tempo entre o início e o fim da *b-avalanche*. Vamos também dar atenção para o **alcance** que é a cardinalidade do *conjunto-alcance* da *b-avalanche*. Devido à importância desses elementos, vamos adotar as seguintes notações: para qualquer  $b > 0$ , dada uma *b-avalanche* em  $\Lambda(N)$ , com origem em  $x$ ,  $\xi_N(x, b)$  é o seu *conjunto-alcance*,  $r_N(x, b) = |\xi_N(x, b)|$  é o seu *alcance* e  $\eta_N(x, b)$  é a sua *duração*. Para simplificar, daqui em diante, será omitido o vértice de origem das notações anteriores se este for o vértice 0. Ou seja,  $\xi_N(b) = \xi_N(0, b)$ ,  $r_N(b) = r_N(0, b)$  e  $\eta_N(b) = \eta_N(0, b)$ . Para consolidar melhor esses conceitos, vamos apresentar alguns exemplos simples a seguir.

**Exemplo 3.4.** Se entre o tempo  $n$  e  $n+1$  todos os vértices estão acima de  $b$ , então uma *b-avalanche* com *alcance* 3 e *duração* 1 ocorreu.

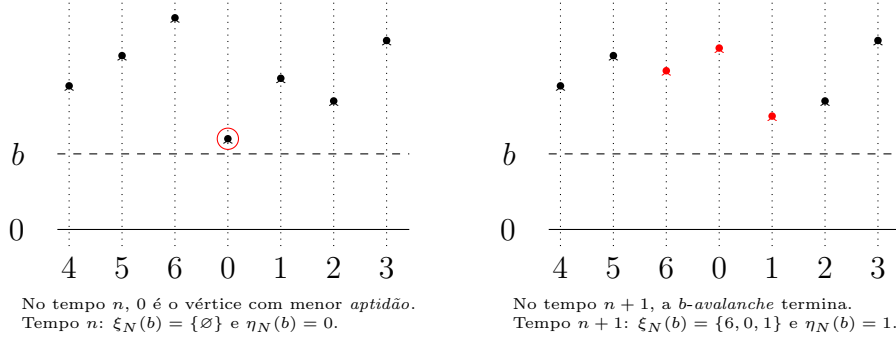


Figura 3.1: Dinâmica de uma *avalanche* minimal.

**Exemplo 3.5.** *É possível que um vértice seja o com aptidão mínima mais de uma vez durante uma  $b$ -avalanche.*

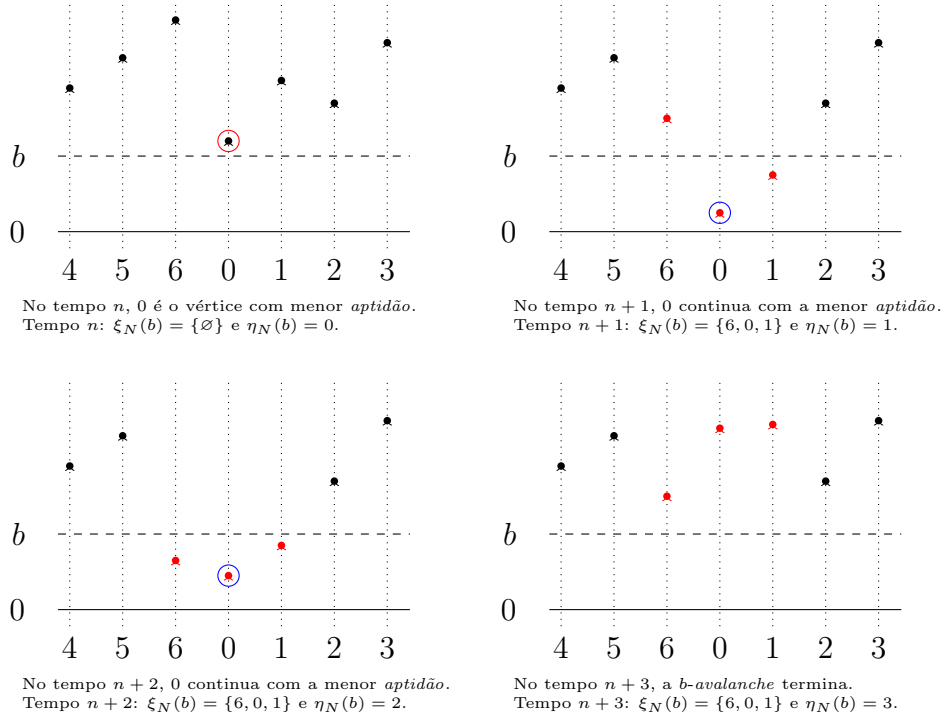


Figura 3.2: Dinâmica de uma *avalanche* com mínimo repetido.

Note que, sempre que o mínimo recair em algum vértice que já foi mínimo num tempo anterior, o *conjunto-alcance* não aumenta. Observe também que, os únicos vértices que estão no *conjunto-alcance* e ainda não foram mínimos anteriormente são os dois vértices que estão nas extremidades do *conjunto-alcance*. Então, podemos concluir que o *conjunto-*

*alcance* só cresce quando o mínimo é um vértice das suas extremidades.

**Exemplo 3.6.** Para ficar claro como é a dinâmica de crescimento do conjunto-alcance, considere a  $b$ -avalanche abaixo.

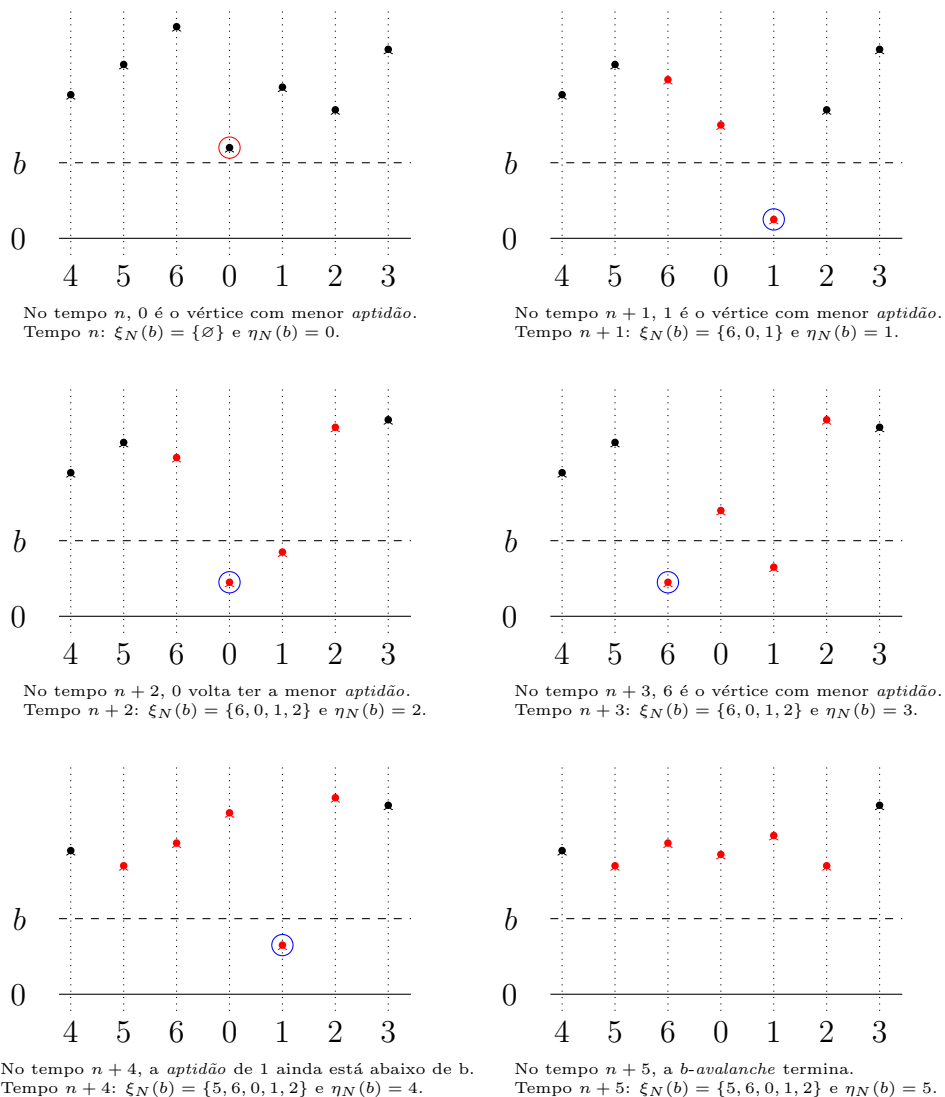


Figura 3.3: Dinâmica do crescimento do conjunto-alcance.

O leitor pode pensar se é possível que uma  $b$ -avalanche nunca termine. Isto é, uma  $b$ -avalanche com duração infinita. Mostraremos abaixo que, para um sistema com um número finito de vértices isso não ocorre.

**Proposição 3.7.** Se  $3 \leq N < \infty$ , então  $\eta_N(b) < \infty$  para qualquer  $b > 0$ .

*Demonstração.* Considere os eventos disjuntos:

$$A_{k,N}^b = \{N \text{ atualizações consecutivas no intervalo de tempo } [(k-1)N, kN] \text{ acima de } b\},$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

Como a cada passo atualizamos com três novas variáveis independentes e exponencialmente distribuídas com parâmetro 1 temos que  $\mathbb{P}(A_{k,N}^b) = e^{-3bN}$ . Note então que, se  $A_{k,N}^b$  ocorre, então não há nenhum vértice com *aptidão* abaixo de  $b$  no tempo  $kN$ . Ou seja, a  $b$ -*avalanche* termina. Logo,  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$\{\eta_N(b) = \infty\} \subset \left\{ \bigcap_{k=1}^n (A_{k,N}^b)^c \right\}, \forall n \in \mathbb{N},$$

pois, para que a  $b$ -*avalanche* não termine é necessário que em cada intervalo de tempo  $[(k-1)N, kN]$  pelo menos um vértice tenha *aptidão* abaixo de  $b$ . Como por construção, os eventos  $A_{k,N}^b$  são independentes, os seus complementares também são, e portanto  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(\eta_N(b) = \infty) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (A_{k,N}^b)^c\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left((A_{k,N}^b)^c\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\mathbb{P}(\eta_N(b) = \infty) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - e^{-3bN}]^n = 0.$$

Então, como  $\mathbb{P}(\eta_N(b) = \infty) = 0$  temos que  $\mathbb{P}(\eta_N(b) < \infty) = 1$ . Ou seja, para um sistema com um número finito de vértices uma  $b$ -*avalanche* termina quase certamente.  $\square$

Perceba que, a configuração inicial das *aptidões* nos 3 exemplos acima é a mesma. Apesar disso, diferentes  $b$ -*avalanches* ocorreram. Isto acontece pois, o *conjunto-alcance* da  $b$ -*avalanche*, que ocorre no intervalo de tempo  $[n, n+d]$ , depende somente da posição (em  $\Lambda(N)$ ) do vértice de origem  $x$ , mas não da configuração inicial no tempo  $n$ . Então, se deslocarmos todo o *conjunto-alcance* em  $-x$  vértices, obtemos um conjunto cuja distribuição é independente do vértice de origem  $x$  e da configuração das *aptidões* no tempo  $n$ . Além disso, a *duração* da  $b$ -*avalanche* também é independente da configuração inicial das *aptidões* e do vértice de origem. Logo, podemos considerar as  $b$ -*avalanches* com origem no vértice 0, já que as  $b$ -*avalanches* são igualmente distribuídas.



Durante uma  $b$ -*avalanche* a sua dinâmica é completamente determinada pela posição (em  $\Lambda(N)$ ) da origem e os vértices que ficam com *aptidão* abaixo de  $b$ . Portanto, fixado um  $b$ , podemos olhar o *BS-processo* como uma sequência de  $b$ -*avalanches* com *duração* i.i.d. e *conjunto-alcance* (deslocados) i.i.d.. Estes fatos sugerem que, devemos estudar uma única  $b$ -*avalanche* com certo detalhe.

**Observação 3.8.** *Uma  $b$ -avalanche é caracterizada por seu conjunto-alcance e sua duração. Então podemos escrever a  $b$ -avalanche como o par  $(\xi_N(x, b), \eta_N(x, b))$ .*

**Observação 3.9.** *O Exemplo 3.4 deve deixar claro que, uma  $b$ -avalanche tem duração no mínimo 1 e alcance pelo menos 3 (o vértice origem e seus dois vizinhos). Ou seja,  $r_N(b) \geq 3$  e  $\eta_N(b) \geq 1$ ,  $\forall b \geq 0$  e  $\forall N \geq 3$ . Uma  $b$ -avalanche é dita **minimal** se, tem duração 1 e alcance igual a 3. Note que, uma 0-avalanche é sempre minimal.*

Além das  $b$ -*avalanches* minimais temos outra classe de *avalanches* bastante interessante; as  $b$ -*avalanches* que alcançam todos os vértices do sistema.

**Definição 3.10.** *Uma  $b$ -avalanche é dita **abrangente** se alcança todos os vértices do sistema, isto é,  $r_N(b) = N$ .*

Essa definição é importante pois, a função indicadora do evento  $\{r_N(x, b) = N\}$ , será muito útil em nossos estudos. O seu valor esperado e os valores esperados da *duração* e do *alcance* serão um dos principais focos de nossas análises. Adotaremos, então, as seguintes notações: para uma  $b$ -*avalanche* qualquer em  $\Lambda(N)$ , então  $R_N(b) = \mathbb{E}[r_N(x, b)]$  é o valor esperado do *alcance*,  $P_N(b) = \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(x, b) = N\}] = \mathbb{P}(r_N(x, b) = N)$  é o valor esperado da função indicadora da  $b$ -*avalanche* ser abrangente e  $D_N(b) = \mathbb{E}[\eta_N(x, b)]$  é o valor esperado da *duração*. Todos esses valores esperados são independentes do vértice de origem  $x$ .

Para finalizar essa parte iremos apresentar alguns resultados bastantes simples, mas que serão usados mais adiante no texto.

**Lema 3.11.** *Seja  $N \geq 3$  e  $b \geq 0$  temos que  $\eta_N(b) \geq r_N(b) - 2$ .*

*Demonstração.* Considere uma  $b$ -*avalanche* que começa no tempo  $n$ . No tempo  $n+1$  essa  $b$ -*avalanche* terá  $r_N(b) = 3$  e  $\eta_N(b) = 1$ . O que satisfaz a igualdade:  $\eta_N(b) = r_N(b) - 2$ .

Note agora que, nos tempos posteriores a  $n + 1$  essa  $b$ -*avalanche*, se ainda não terminou, pode ou não alcançar um novo vértice, e se alcança, alcança 1 novo vértice apenas (ou seja, o *alcance*  $r_N(b)$  pode ou não aumentar, e se aumenta, aumenta em 1 unidade); enquanto a *duração*  $\eta_N(b)$  da  $b$ -*avalanche* sempre aumenta 1 unidade a cada passo. Portanto, a *duração*  $\eta_N(b)$  é de fato maior ou igual ao *alcance*  $r_N(b)$  menos 2 unidades (diferença inicial).  $\square$

**Corolário 3.12.** *Seja  $N \geq 3$  e  $b \geq 0$  temos que  $D_N(b) \geq R_N(b) - 2$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.11,  $\eta_N(b) \geq r_N(b) - 2$ . Segue que

$$\mathbb{E}[\eta_N(b)] \geq \mathbb{E}[r_N(b)] - 2, \text{ ou seja, } D_N(b) \geq R_N(b) - 2.$$

$\square$

Como dito no início dessa seção, nosso interesse é estudar o que acontece com o modelo no limite, isto é, quando o número de vértices e o tempo tendem ao infinito ( $N \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$ ). A maior parte do que foi feito para o caso finito será análoga para o caso infinito. Então, para não sermos excessivamente repetitivos, iremos explicitar somente os conceitos e resultados mais importantes para o entendimento do restante do texto.

Como  $\Lambda(N)$  é subconjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$ , é intuitivo considerar que podemos estender a noção de uma  $b$ -*avalanche* em  $\Lambda(N)$  para uma  $b$ -*avalanche* em  $\mathbb{Z}$ . Faremos isso então da seguinte maneira:

1. Cada vértice  $x \in \mathbb{Z}$  acomoda uma *aptidão*, uma variável aleatória exponencialmente distribuída em  $[0, \infty)$ .
2. Escolha um *limiar* arbitrário  $b > 0$ .
3. Se o número de vértices com *aptidões* abaixo de  $b$  for finito e positivo, as regras de atualização do *BS-processo* ainda estão bem definidas.
4. Suponhamos, portanto, que no tempo 0 temos uma configuração com todas as *aptidões* maiores que  $b$ , e que escolhemos um vértice  $x \in \mathbb{Z}$  arbitrário, independentemente dos valores das *aptidões*, como a origem da  $b$ -*avalanche* .

5. Começamos atualizando o vértice  $x$  e seus dois vizinhos ( $x - 1$  e  $x + 1$ ).
6. Se, depois disso, no conjunto de vértices atualizados ( $\{x - 1, x, x + 1\}$ ) existir vértices com *aptidões* menores que  $b$ , escolhemos o vértice com *aptidão* mínima e atualizamos ele e seus dois vizinhos, e assim por diante.
7. Assim que tivermos uma configuração com todas as *aptidões* maiores que  $b$  novamente, paramos o procedimento.

As *b-avalanches* em  $\mathbb{Z}$  tem as mesmas características das em  $\Lambda(N)$ : a *duração*, o *conjunto-alcance* e o *alcance*. E, devido a importância desses elementos, vamos adotar as seguintes notações: para qualquer  $b > 0$ , dada uma *b-avalanche* em  $\mathbb{Z}$ , com origem em  $x$ ,  $\xi(x, b)$  é o seu *conjunto-alcance*,  $r(x, b) = |\xi(x, b)|$  é o seu *alcance* e  $\eta(x, b)$  é a sua *duração*. Para simplificar, daqui em diante, omitiremos o vértice de origem das notações anteriores se ele for o vértice 0. Ou seja,  $\xi(b) = \xi(0, b)$ ,  $r(b) = r(0, b)$  e  $\eta(b) = \eta(0, b)$ .

Um importante ponto a se destacar é que não há nada que impeça que uma *b-avalanche* em  $\mathbb{Z}$  alcance infinitos vértices do sistema, isto é, tenha *alcance* infinito. Na verdade, a análise desse fato é de extrema importância para nossos estudos. Para tal, começaremos definindo o que são *b-avalanches infinitas*.

**Definição 3.13.** *Uma b-avalanche em  $\mathbb{Z}$  é dita **infinita** se, durante a sua ocorrência, infinitos vértices do sistema são atualizados, isto é,  $r(b) = \infty$ .*

Note que, para infinitos vértices do sistema serem atualizados é necessário que a *b-avalanche* nunca pare, ou seja, sempre deve existir pelo menos um vértice com *aptidão* menor que  $b$ . Então,  $r(b) = \infty$  implica  $\eta(b) = \infty$ . No caso de uma *b-avalanche infinita*, definimos o *conjunto-alcance*  $\xi(x, b)$  como a união dos vértices atualizados durante o intervalo de tempo  $[0, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Como falado acima, será útil analisar a ocorrência de *b-avalanches infinitas*. Faremos isso por meio da função indicadora  $\mathbb{1}\{r(b) = \infty\}$ .

Repare que temos um resultado análogo ao Lema 3.11 para o caso infinito, ou seja,  $\eta(b) \geq r(b) - 2$ . Essa desigualdade porém não nos permite concluir que *alcance* finito implica em *duração* finita; este resultado, que não é trivial, será visto mais adiante.

Considere uma  $b$ -*avalanche* qualquer em  $\mathbb{Z}$ , então  $R_\infty(b) = \mathbb{E}[r(x, b)]$  é o valor esperado do *alcance*,  $P_\infty(b) = \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r(x, b) = \infty\}] = \mathbb{P}(r(x, b) = \infty)$  é o valor esperado da função indicadora da  $b$ -*avalanche* ser infinita e  $D_\infty(b) = \mathbb{E}[\eta(x, b)]$  é o valor esperado da *duração*. Todos esses valores esperados são independentes do vértice de origem  $x$ . Equipados com esses valores esperados, podemos definir os seguintes *limiares críticos*. Seja

$$b_c^p := \inf\{b > 0 : P_\infty(b) > 0\}. \quad (3.1)$$

De acordo com o Lema 3.1 em [21],  $P_\infty(68) > 0$ . Em particular,  $b_c^p < \infty$ . Como para qualquer  $b > 0$  tal que  $P_\infty(b) > 0$  temos que  $R_\infty(b) = \infty$ , existe um *limiar crítico*

$$b_c^r := \inf\{b > 0 : R_\infty(b) = \infty\}, \quad (3.2)$$

que também é finito. Como  $D_\infty(b) \geq R_\infty(b) - 2$ , temos que,  $R_\infty(b) = \infty$  implica em  $D_\infty(b) = \infty$ , portanto o *limiar crítico*

$$b_c^d := \inf\{b > 0 : D_\infty(b) = \infty\} \quad (3.3)$$

é finito. A inclusão desses eventos deve deixar claro que podemos ordenar esses três *limiares críticos* da seguinte maneira

$$b_c^d \leq b_c^r \leq b_c^p. \quad (3.4)$$

Mostraremos agora que  $b_c^d > 0$ . Para isso, considere um *BS-processo*. Observe que, a probabilidade de um vértice  $i \in \Lambda(N)$  ser atualizado para uma *aptidão* abaixo do *limiar*  $b$  é  $\mathbb{P}(X_{N,i} \leq b) = 1 - e^{-b} \forall i \in \mathbb{Z}$ . O *BS-processo* é dominado estocasticamente por um *Processo de Ramificação* (veja a Proposição 1.1 em [9]) com distribuição de descendentes  $R \sim \text{Bin}\left(3, (1 - e^{-b})\right)$ .

Agora, seja  $0 < b' < -\log \frac{2}{3}$  um *limiar*. Portanto, a distribuição de descendentes do *Processo de Ramificação* é  $R \sim \text{Bin}\left(3, (1 - e^{-b'})\right)$ . Logo,

$$\mathbb{E}[R] = 3(1 - e^{-b'}) < 3(1 - e^{\log \frac{2}{3}}) < 3 \frac{1}{3} = 1.$$

Então, pelo Teorema 2.20, o *Processo de Ramificação* é extinto e conseqüentemente a  $b$ -*avalanche* do *BS-processo* termina, isto é,  $\eta(b) < \infty$ . Portanto,  $b_c^d \geq -\log \frac{2}{3}$ . Então, todos os *limiares críticos* são não-triviais. A análise desses *limiares críticos* será de extrema importância para os resultados alcançados em [23].

## 3.2 Representação Gráfica Auto Similar

A proposta dessa seção é fragmentar uma  $b$ -*avalanche* em *subavalanches*, deduzindo assim importantes propriedades sobre o modelo. Faremos isso tanto para o caso finito quanto para o caso infinito. A ideia de *avalanches* formarem uma estrutura hierárquica de *subavalanches* também é mencionada em [20], mas em um contexto levemente diferente.

Seja  $N \geq 3$  e considere uma  $b$ -*avalanche* em  $\Lambda(N)$ , começando no tempo 0 no vértice 0. Assim, no tempo 0, o vértice 0 e seus dois vizinhos são atualizados. Como isso corresponde a uma *avalanche minimal* do *limiar* 0, podemos escrever isto em termos do *conjunto-alcance* e da *duração* como

$$\left( \xi_N(0) = \{-1, 0, 1\}, \eta_N(0) = 1 \right) \equiv \left( \xi_N(0), \eta_N(0) \right).$$

Podemos agora ilustrar graficamente a continuação desta  $b$ -*avalanche* em  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}_+$  (vértices  $\times$  *aptidões*) da seguinte forma,

1. Seja  $x$  o vértice com *aptidão* mínima e suponha que, sua *aptidão* seja igual a  $s < b$ . Note que  $x \in \xi_N(0)$ .
2. As *aptidões* dos outros dois vértices em  $\xi_N(0)$  são independentes e exponencialmente distribuídas em  $[s, \infty)$ , devido à propriedade de falta de memória da distribuição exponencial.
3. Continue atualizando de acordo com as regras apropriadas, até que todas as *aptidões* estejam acima do *limiar*  $s$ .

Este procedimento em si constitui uma  $s$ -*avalanche*, com origem em  $x$ . Denotamos por  $x + \hat{\xi}_N(s)$  o *conjunto-alcance* dessa  $s$ -*avalanche*. Na representação gráfica, traçamos uma seta do ponto  $(x, s)$  ao ponto  $(y, s)$ , para todo  $y \in x + \hat{\xi}_N(s)$ . Em termos do *conjunto-alcance*, escrevemos isso como  $\xi_N(s) = \xi_N(0) \cup \{x + \hat{\xi}_N(s)\}$ , onde  $\xi_N(s)$  é o conjunto de vértices atualizados até a  $s$ -*avalanche* terminar.

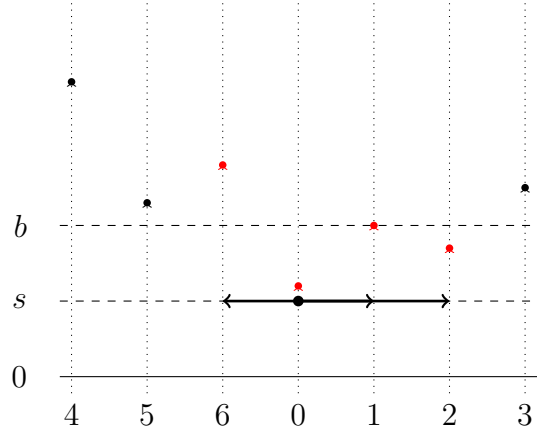


Figura 3.4: Representação Gráfica de uma  $s$ -avalanche.

Depois que a  $s$ -avalanche termina, as *aptidões* de todos os vértices em  $\xi_N(s)$  são independentes e exponencialmente distribuídos em  $[s, \infty)$ , devido à propriedade de falta de memória da distribuição exponencial. Agora, procuramos o vértice  $y$  com *aptidão* mínima em  $\xi_N(s)$ . Se a *aptidão* de  $y$  é maior que  $b$ , a  $b$ -avalanche termina. Senão a *aptidão* de  $y$  é igual a  $t$ , onde  $s < t < b$ , e começamos então uma  $t$ -avalanche com origem em  $y$ . Continuamos atualizando até que todas as *aptidões* sejam maiores que  $t$ . Denotamos por  $y + \hat{\xi}_N(t)$  o *conjunto-alcance* dessa  $t$ -avalanche. Na representação gráfica, traçamos uma seta do ponto  $(y, t)$  ao ponto  $(z, t)$ , para todo  $z \in y + \hat{\xi}_N(t)$ . Em termos do *conjunto-alcance*, escrevemos isso como  $\xi_N(t) = \xi_N(s) \cup \{y + \hat{\xi}_N(t)\}$ , onde  $\xi_N(t)$  é o conjunto de vértices atualizados até a  $t$ -avalanche terminar. Continuamos da maneira óbvia e esse processo vai parar quase certamente assim que todas as *aptidões* sejam maiores que  $b$ .

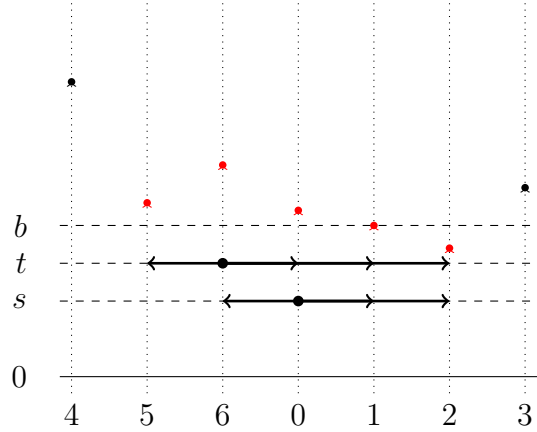


Figura 3.5: Representação Gráfica de uma  $t$ -avalanche.

Portanto o *conjunto-alcance* da  $b$ -avalanche será

$$\xi_N(b) = \xi_N(0) \cup \{x^1 + \hat{\xi}_N(s^1)\} \cup \{x^2 + \hat{\xi}_N(s^2)\} \cup \dots \cup \{x^k + \hat{\xi}_N(s^k)\}.$$

Então, acabamos de definir um grafo aleatório em  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}_+$ . Este grafo aleatório é um subgrafo da representação gráfica  $GR_N$  que será definida formalmente a seguir.

Reiteramos aqui que a vizinhança do vértice 0 pode ser escrita como  $\{-1, 0, 1\}$  ao invés de  $\{N-1, 0, 1\}$  (veja Observação 1.1). Do mesmo modo a vizinhança do vértice  $N-1$  pode ser escrita como  $\{-2, -1, 0\}$  ao invés de  $\{N-2, N-1, 0\}$  e assim sucessivamente.

Para cada vértice  $v \in \Lambda(N)$  será associado um Processo de Poisson homogêneo  $\Pi_v$  de taxa 1. Seja um vértice  $v \in \Lambda(N)$  e  $\tau_i \in \Pi_v$ , onde  $\Pi_v$  é um Processo de Poisson homogêneo. Quando escrevermos  $(v, \tau_i) \in \Lambda(N) \times \Pi_v$  estamos nos referindo à  $i$ -ésima chegada (que ocorreu no tempo  $\tau_i$ ) do vértice  $v$ .

Seja  $\Pi(N) = \{\Pi_k\}_{k \in \Lambda(N)}$  uma coleção de Processos de Poisson homogêneos independentes. Para cada processo  $\Pi_k$  o seguinte procedimento é executado:

1. Na  $j$ -ésima chegada  $\tau_{k,j}$  de  $\Pi_k$  o par  $(\hat{\xi}_N(\tau_{k,j}), \hat{\eta}_N(\tau_{k,j}))$  é registrado independentemente, onde  $\hat{\xi}_N(\tau_{k,j})$  é distribuído como o *conjunto-alcance* e  $\hat{\eta}_N(\tau_{k,j})$  é distribuída como a *duração* de uma típica  $\tau_{k,j}$ -avalanche, com origem no vértice 0. Então o par  $(k + \hat{\xi}_N(\tau_{k,j}), \hat{\eta}_N(\tau_{k,j}))$  é distribuído como o (*conjunto-alcance*, *duração*) de uma típica  $\tau_{k,j}$ -avalanche, com origem no vértice  $k$ .

2. No plano  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}^+$ ,  $\forall y \in k + \hat{\xi}_N(\tau_{k,j})$  são traçadas setas (horizontais) de  $(k, \tau_{k,j})$  para  $(y, \tau_{k,j})$ . Dizemos então que,  $(k, \tau_{k,j})$  está *conectado* a  $(y, \tau_{k,j})$ . Note que, o inverso não é verdade, ou seja, não podemos dizer que  $(y, \tau_{k,j})$  está *conectado* a  $(k, \tau_{k,j})$ . Isto é, a direção da seta é relevante.

**Definição 3.14.** Para quaisquer tempos  $\tau_1, \tau_2 \in \Pi_x$  tal que  $\tau_1 < \tau_2$  dizemos que  $(x, \tau_1)$  está **conectado** a  $(x, \tau_2)$  por um **segmento de tempo**.

Como antes, a direção é importante. Então não podemos dizer que  $(x, \tau_2)$  está *conectado* a  $(x, \tau_1)$  por um *segmento de tempo*. Podemos pensar em um *segmento de tempo* como uma seta vertical apontando para cima. Vamos omitir essas setas ao desenhar a representação gráfica para simplificar o desenho. Observe que um vértice  $k$  no tempo  $\tau$  está sempre conectado a ele mesmo por *segmentos de tempos* para todo tempo após (maior)  $\tau$ .

**Definição 3.15.** Um **caminho** em  $GR_N$  é uma sequência  $(x_0, s_0), \dots, (x_n, s_n)$  de pontos em  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}_+$ , tal que todo par  $(x_j, s_j), (x_{j+1}, s_{j+1})$  é conectado por um segmento de tempo (nesse caso,  $x_j = x_{j+1}$  e  $s_j < s_{j+1}$ ) ou uma seta (nesse caso,  $s_j = s_{j+1}$ ).

Podemos assim estender o conceito de “estar conectado” para um conjunto de vértices.

**Definição 3.16.** Para quaisquer  $A, B \subseteq \Lambda(N)$ , e  $\tau_1 \leq \tau_2 \in \mathbb{R}$ , em  $GR_N$ , diremos que  $(A, \tau_1)$  **está conectado a**  $(B, \tau_2)$  se existe ao menos um caminho em  $GR_N$  de  $(x, \tau_1)$  para  $(y, \tau_2)$ , para qualquer  $x \in A$  e  $y \in B$ . Usaremos como notação,  $(A, \tau_1) \rightsquigarrow (B, \tau_2)$ .

**Definição 3.17.** Para qualquer  $b \geq 0$  e  $(k, j) \in \Lambda(N) \times \mathbb{N}$ , o par  $(\hat{\xi}_N(\tau_{k,j}), \hat{\eta}_N(\tau_{k,j}))$  é uma subavalanche em  $GR_N$ , se  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (k, \tau_{k,j})$  em  $GR_N$ , e uma  $b$ -subavalanche em  $GR_N$ , se, além disso,  $\tau_{k,j} \leq b$ .

Veja a figura abaixo:



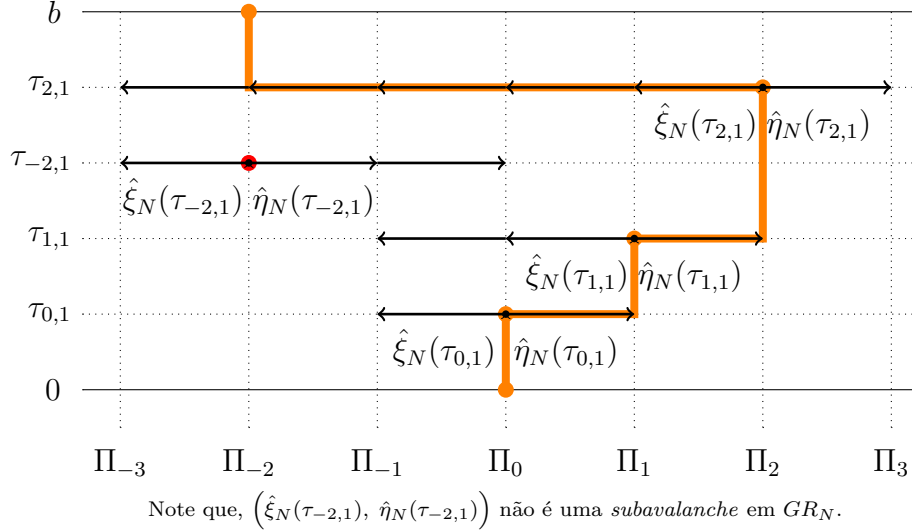


Figura 3.6: Representação Gráfica  $GR_N$ .

Então, para qualquer  $b > 0$ , o *conjunto-alcance*  $\xi_N(b)$  de uma  $b$ -*avalanche* com origem no vértice 0 é a coleção de todos os vértices  $x \in \Lambda(N)$  tal que  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (x, b)$  em  $GR_N$ . E, para qualquer  $b > 0$ , a *duração*  $\eta_N(b)$  de uma  $b$ -*avalanche* com origem no vértice 0 é um mais a duração total de todas as  $b$ -*subavalanches* em  $GR_N$ .

A representação gráfica  $GR_N$  nos fornece as seguintes propriedades de monotonicidade. Denotaremos por  $\xi_N^{(A,b)}(s)$  a coleção de todos os vértices  $x \in \Lambda(N)$  tal que  $(A, b) \rightsquigarrow (x, b + s)$  em  $GR_N$ , e por  $\eta_N^{(A,b)}(s)$  a soma de todas as  $\hat{\eta}_N(\tau_{k,j})$  para todo  $b < \tau_{k,j} \leq b + s$ , tal que  $(A, b) \rightsquigarrow (k, \tau_{k,j})$  em  $GR_N$ . Então para qualquer  $A \subseteq B \subseteq \Lambda(N)$ ,  $0 \leq s_1 \leq s_2$  e  $b \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \xi_N^{(A,b)}(s_1) &\subseteq \xi_N^{(B,b)}(s_2), \\ \eta_N^{(A,b)}(s_1) &\leq \eta_N^{(B,b)}(s_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Seja  $\xi_N(x, b) = \xi_N^{(\mathcal{V}(x), 0)}(b)$  o *conjunto-alcance* e  $\eta_N(x, b) = \eta_N^{(\mathcal{V}(x), 0)}(b)$  a *duração* de uma  $b$ -*avalanche* com origem no vértice  $x$ . Considere os *limiares*  $b_1, b_2$  tal que  $b_1 \leq b_2$ . Então, pela Expressão (3.5), temos que

$$\begin{aligned} \xi_N(x, b_1) &\subseteq \xi_N(x, b_2), \\ \eta_N(x, b_1) &\leq \eta_N(x, b_2). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Com essas propriedades de monotonicidade podemos demonstrar o seguinte Lema.

**Lema 3.18.** *Os valores esperados  $R_N(b)$ ,  $D_N(b)$  e  $P_N(b)$  são não-decrescentes em  $b$ .*

*Demonstração.* Segue da Expressão (3.6) que para quaisquer  $b_1 \leq b_2$ ,  $\xi_N(x, b_1) \subseteq \xi_N(x, b_2)$ .

Então para quaisquer  $b_1 \leq b_2$

$$|\xi_N(x, b_1)| \leq |\xi_N(x, b_2)| \Rightarrow \mathbb{1}\{|\xi_N(x, b_1)| = N\} \leq \mathbb{1}\{|\xi_N(x, b_2)| = N\}.$$

Com isso e a Expressão (3.6) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\xi_N(x, b_1)|] &\leq \mathbb{E}[|\xi_N(x, b_2)|] &\Rightarrow R_N(b_1) &\leq R_N(b_2), \\ \mathbb{E}[\eta_N(x, b_1)] &\leq \mathbb{E}[\eta_N(x, b_2)] &\Rightarrow D_N(b_1) &\leq D_N(b_2), \\ \mathbb{E}[\mathbb{1}\{|\xi_N(x, b_1)| = N\}] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}\{|\xi_N(x, b_2)| = N\}] &\Rightarrow P_N(b_1) &\leq P_N(b_2). \end{aligned}$$

□

Agora vamos definir  $GR$ , uma representação gráfica para o  $BS$ -processo em  $\mathbb{Z}$ , praticamente da mesma maneira que em  $GR_N$ , somente tomando cuidado com as *avalanches infinitas*. Faremos isso restringindo  $GR$  às *aptidões* menores do que  $b_c^p$ , i.e.,  $GR$  é um grafo aleatório no plano  $\mathbb{Z} \times [0, b_c^p)$ . A definição formal de  $GR$  e de suas características será feita como antes, apenas omitindo o subscrito  $N$  da notação.

Seja  $\Pi(\mathbb{Z}) = \{\Pi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  uma coleção de Processos de Poisson homogêneos independentes restritos ao intervalo  $[0, b_c^p)$ . Para qualquer chegada  $\tau_{k,j}$  de  $\Pi_k$  o par  $(\hat{\xi}(\tau_{k,j}), \hat{\eta}(\tau_{k,j}))$  é registrado independentemente, onde  $\hat{\xi}(\tau_{k,j})$  é distribuído como o *conjunto-alcance* e  $\hat{\eta}(\tau_{k,j})$  é distribuída como a *duração* de uma típica  $\tau_{k,j}$ -*avalanche*, com origem no vértice 0. As definições de  $(A, \tau_1) \rightsquigarrow (B, \tau_2)$ , *subavalanche* e *b-subavalanche* em  $GR$  são feitas da mesma forma de antes. Novamente, para qualquer  $b < b_c^p$ , o *conjunto-alcance*  $\xi(b)$  da *b-subavalanche* com origem em 0 é a coleção de todos  $x \in \mathbb{Z}$  tal que  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (k, \tau_{k,j})$  em  $GR$  e a *duração*  $\eta(b)$  da *b-subavalanche* com origem em 0 é 1 mais a *duração* total de todas as *b-subavalanches* em  $GR$ .

A representação gráfica  $GR$  nos proporciona as mesmas propriedades de monotonicidade como na Expressão (3.5) para  $GR_N$ . Então os valores esperados  $R_\infty(b)$ ,  $D_\infty(b)$  e  $P_\infty(b)$  também são monótonos em  $b$ .

A razão principal para definirmos  $GR_N$  e  $GR$  é que será necessário associar as *b-avalanches* em  $\mathbb{Z}$  com as *b-avalanches* em  $\Lambda(N)$ . Para isso, a ideia é simplesmente usar a mesma sequência de atualizações em ambos os casos.

**Proposição 3.19.** *É verdade que*

$$\begin{aligned} r(b) = \infty & \text{ implica } r_N(b) = N, & \forall N \geq 3. \\ r(b) < \infty & \text{ implica } r_N(b) = r(b), & \forall N \text{ grande suficiente.} \end{aligned} \tag{3.7}$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{G} = (G_j^{(1)}, G_j^{(2)}, G_j^{(3)})_{j \in \mathbb{N}}$  uma sequência de triplas, onde  $\{G_j^{(i)}\}$  são independentes e exponencialmente distribuídos com parâmetro 1. Podemos então usar a sequência  $\mathcal{G}$  como a sequência de atualizações que definem uma *b-avalanche* em  $\mathbb{Z}$ . De fato, considere que no momento inicial temos uma configuração arbitrária de *aptidões* maiores que  $b$ , e troque as *aptidões* de  $\{-1, 0, 1\}$  por  $(G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, G_1^{(3)})$ . Se em  $\{-1, 0, 1\}$  existem vértices com *aptidões* menores que  $b$ , escolhamos o com menor *aptidão*  $y$  e trocamos as *aptidões* de  $\{y-1, y, y+1\}$  por  $(G_2^{(1)}, G_2^{(2)}, G_2^{(3)})$ , e assim por diante. Podemos ao mesmo tempo usar a sequência  $\mathcal{G}$  para definir uma *b-avalanche* em  $\Lambda(N)$ .  $\square$

A associação descrita acima será importante para a demonstração de vários resultados obtidos em [23]. Infelizmente, ela não é adequada quando  $P_\infty(b) = 0$ . Pois, nesse caso, se  $r(b) \geq N$  pode acontecer de  $\eta_N(b) > \eta(b)$ . Precisamos então de uma nova associação para essa situação. Para tal, será necessário uma representação gráfica ligeiramente diferente da anterior.

A seguir iremos definir uma representação gráfica  $\widehat{GR}_N$  para *b-avalanches* em  $\Lambda(N)$ . O motivo é que queremos associar *b-avalanches* em  $\Lambda(N)$  com *b-avalanches* em  $\mathbb{Z}$ , e a representação gráfica  $GR_N$  anterior não é apropriada para este propósito. É claro que também precisaremos de uma representação gráfica  $\widehat{GR}$  para as *b-avalanches* em  $\mathbb{Z}$ .

A diferença principal entre  $GR_N$  e  $\widehat{GR}_N$  esta na determinação dos Processos de Poisson  $\Pi(N)$ . Em  $\widehat{GR}_N$  eles são especificados durante o processo de construção das *s-avalanches*, selecionando a quantidade necessária de Processos de Poisson de uma sequência infinita de Processos de Poisson  $\widehat{\Pi}(\infty)$ . Uma *avalanche* de *alcance*  $k$  utiliza os primeiros  $k$  processos de  $\widehat{\Pi}(\infty)$ . Usamos a mesma sequência  $\widehat{\Pi}(\infty)$  para construir as *avalanches* em  $\Lambda(N)$ , para qualquer  $N \geq 3$ , e as *b-avalanches* em  $\mathbb{Z}$ . Isto nos fornece uma associação intuitiva das *avalanches* em  $\Lambda(N)$  e  $\mathbb{Z}$ .

Iremos definir a nova representação gráfica  $\widehat{GR}_N$  do seguinte modo. Seja  $\widehat{\Pi}(\infty) =$

$\Pi^1, \Pi^2, \dots$  uma sequência de Processos de Poisson homogêneos independentes. Usaremos os primeiros  $N$  processos de  $\widehat{\Pi}(\infty)$  para a nova representação das  $b$ -*avalanches* em  $\Lambda(N)$ , com origem no vértice 0.

Definimos  $\xi_N(0) = \{-1, 0, 1\}$ ,  $\eta_N(0) = 1$  e associamos com  $\xi_N(0)$  os primeiros 3 Processos de Poisson. Escrevemos então que  $\Pi_{N,-1} = \Pi^1$ ,  $\Pi_{N,0} = \Pi^2$  e  $\Pi_{N,1} = \Pi^3$ , onde  $\Pi_{N,k}$  denota o processo associado com o vértice  $k \in \Lambda(N)$ . Seja  $\tau_1^N$  a primeira chegada na superposição de  $\Pi_{N,k}$ ,  $k \in \{-1, 0, 1\}$  e seja  $\kappa_1^N$  a posição do processo correspondente, ou seja,  $\tau_1^N \in \Pi_{\kappa_1^N}$ .

Então temos  $\xi_N(b) = \{-1, 0, 1\}$ ,  $\eta_N(b) = 1$ , para  $0 < b < \tau_1^N$ . Como  $b = \tau_1^N$ , registramos o par  $(\hat{\xi}_N(\tau_1^N), \hat{\eta}_N(\tau_1^N))$ , que é distribuído como o (*conjunto-alcance, duração*) de uma típica  $\tau_1^N$ -*avalanche* com origem no vértice 0. Então o par  $(\kappa_1^N + \hat{\xi}_N(\tau_1^N), \hat{\eta}_N(\tau_1^N))$  é distribuído como o (*conjunto-alcance, duração*) de uma típica  $\tau_1^N$ -*avalanche* com origem no vértice  $\kappa_1^N$ . Como em  $GR_N$ , desenhamos setas em  $\Lambda(N) \times \mathbb{R}^+$  de  $(\kappa_1^N, \tau_1^N)$  para  $(y, \tau_1^N)$ , para todo  $y \in \kappa_1^N + \hat{\xi}_N(\tau_1^N)$ . Definimos  $\xi_N(\tau_1^N) = \{-1, 0, 1\} \cup (\kappa_1^N + \hat{\xi}_N(\tau_1^N))$  e  $\eta_N(\tau_1^N) = 1 + \hat{\eta}_N(\tau_1^N)$ . Se  $\xi_N(\tau_1^N)$  é maior do que  $\{-1, 0, 1\}$  associamos com  $\xi_N(\tau_1^N) \setminus \{-1, 0, 1\}$  os próximos  $r_N(\tau_1^N) - r_N(0)$  Processos de Poisson de  $\widehat{\Pi}(\infty)$ , e associamos eles aos  $(\Pi_{N,k})_{k \in \xi_N(\tau_1^N) \setminus \{-1, 0, 1\}}$ . Neste caso, adicionamos a quantidade requerida de processos da esquerda para a direita de  $\{-1, 0, 1\}$ .

Definimos  $\tau_2^N$  como a primeira chegada depois de  $\tau_1^N$  na superposição de  $\Pi_{N,k} \in \xi_N(\tau_1^N)$ , e continuamos de maneira óbvia, a cada tempo adicionando uma certa quantidade (aleatória) de vértices e os correspondentes Processos de Poisson na nossa coleção, até que nossa coleção tenha tamanho pelo menos  $N$ . Os primeiros  $N$  vértices adicionados formam  $\Lambda(N)$  e os correspondentes Processos de Poisson definem  $\Pi(N)$ . É claro que isto acontece (quase certamente) depois de um número finito de passos e isto significa que definimos  $(\xi_N(b), \eta_N(b))$  para todo  $b \geq 0$ . Denotamos a coleção de chegadas abaixo do *limiar*  $b$  no recém formado  $\Lambda(N)$  como  $\mathcal{T}(N)$ .

Agora definimos a representação gráfica  $\widehat{GR}$  para  $b$ -*avalanches* em  $\mathbb{Z}$ . Procedemos como  $\widehat{GR}_N$ , tomando cuidado somente com as  $b$ -*avalanches infinitas*. Fazemos isso restringindo  $\widehat{GR}$  para *aptidões* menores que  $b_c^p$ , i.e.  $\widehat{GR}$  é um grafo aleatório no plano  $\mathbb{Z} \times [0, b_c^p)$ . Novamente usamos a sequência  $\widehat{\Pi}(\infty)$  para especificar a quantidade requerida

de Processos de Poisson. Denotamos por  $\mathcal{T}$  a coleção de chegadas de todos os processos de Poisson especificados em  $\widehat{GR}$ .

Com essa nova representação gráfica somos capazes de descrever uma nova associação entre as  $b$ -avalanches de  $\Lambda(N)$  e as  $b$ -avalanches de  $\mathbb{Z}$ . Vamos assumir que  $P_\infty(b) = 0$  (caso em que a Proposição 3.19 é inadequada).

**Proposição 3.20.** *Seja  $(\xi(s), \eta(s))$ ,  $s \leq b$ , construída com a representação gráfica  $\widehat{GR}$  restrita aos limiares  $[0, b_c^p]$ . Então associamos esta  $\widehat{GR}$  com uma sequência de  $\widehat{GR}_N$ ,  $N \geq 3$ , restritas aos limiares  $[0, b_c^p]$ , de tal forma que  $(\xi_N(s), \eta_N(s))$ , correspondente a  $\widehat{GR}_N$ , satisfaça para qualquer  $s \leq b$*

$$\begin{aligned} \xi_N(s) &= \xi(s)(\text{mod}N), & \eta_N(s) &= \eta(s), & \text{em } |\xi(s)| < N, \\ r_N(s) &= N, & \eta_N(s) &\leq \eta(s), & \text{em } |\xi(s)| \geq N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

*Demonstração.* Uma construção de  $\widehat{GR}_N$  requer a especificação das  $b$ -subavalanches e da sequência  $\widehat{\Pi}(\infty)$ . Usaremos essa mesma sequência  $\widehat{\Pi}(\infty)$  para  $\widehat{GR}$  e depois associaremos as  $b$ -subavalanches em  $\Lambda(N)$  com as  $b$ -subavalanches em  $\mathbb{Z}$  de maneira apropriada.

Suponha primeiramente que  $\eta(b) = 1$ . Isto significa que em  $\widehat{GR}$  os Processos de Poisson  $\Pi_{-1}$ ,  $\Pi_0$  e  $\Pi_1$  não tem chegadas no intervalo de tempo  $[0, b]$ , e então  $\xi(b) = \{-1, 0, 1\}$ . Como usamos a mesma sequência  $\widehat{\Pi}(\infty)$  para a construção de  $\widehat{GR}_N$  também temos que em  $\widehat{GR}_N$  os Processos de Poisson  $\Pi_{N,-1}$ ,  $\Pi_{N,0}$  e  $\Pi_{N,1}$  não terão chegadas no intervalo de tempo  $[0, b]$ , então  $\xi_N(b) = \{-1, 0, 1\}$  e  $\eta_N(b) = 1$ . Portanto construímos uma associação satisfazendo a Proposição 3.20 no evento  $\eta(b) = 1$ .

Suponha agora de maneira indutiva que para qualquer  $n \geq 1$  podemos construir uma associação satisfazendo a Proposição 3.20, para todo  $N \geq 3$ , em  $\eta(b) \leq n$ . Agora vamos construir  $\widehat{GR}_N$ , para todo  $N \geq 3$ , em  $\eta(b) \leq n + 1$ .

Se uma  $b$ -avalanche em  $\widehat{GR}$  tem duração no máximo  $n+1$  então todas as  $b$ -subavalanches em  $\widehat{GR}$  tem duração no máximo  $n$ , então podemos acoplar elas de maneira indutiva, i.e. para qualquer  $\tau_i \in \mathcal{T}$  e qualquer  $N \geq 3$  definimos  $(\hat{\xi}_N(\tau_i), \hat{\eta}_N(\tau_i))$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_N(\tau_i) &= \hat{\xi}(\tau_i)(\text{mod}N), & \hat{\eta}_N(\tau_i) &= \hat{\eta}(\tau_i), & \text{em } |\hat{\xi}(\tau_i)| < N, \\ |\hat{\xi}_N(\tau_i)| &= N, & \hat{\eta}_N(\tau_i) &\leq \hat{\eta}(\tau_i), & \text{em } |\hat{\xi}(\tau_i)| \geq N. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se  $|\xi(b)| < N$ , então  $|\hat{\xi}(b)| < N$ , para cada  $\tau_i \in \mathcal{T}$  e devido a primeira linha da Expressão (3.9) as  $b$ -avalanches em  $\widehat{GR}_N$  e  $\widehat{GR}$  são idênticas e temos a primeira linha da Proposição 3.20.

Se  $|\xi(b)| \geq N$ , definimos  $\tau(N, b)$  como a primeira chegada em  $\mathcal{T}$  tal que  $|\xi(\tau(N, b))| \geq N$  em  $\widehat{GR}$ . Para qualquer  $s \in [0, \tau(N, b))$ , temos  $|\xi(s)| < N$ , em  $\widehat{GR}$  e, pelo mesmo raciocínio de antes, a primeira linha da Proposição 3.20. Uma vez que  $\tau(N, b) \in \mathcal{T}(N)$  temos, pela segunda linha da Expressão (3.9), que  $|\xi_N(\tau(N, b))| = N$ . Então, para qualquer  $t \in (s, b]$ ,  $\widehat{GR}_N$  usa os primeiros  $N$  Processos de Poisson de  $\widehat{\Pi}(\infty)$ , enquanto  $\widehat{GR}$  usa ao menos estes primeiros processos. Então qualquer chegada em  $\mathcal{T}(N)$  é uma chegada em  $\mathcal{T}$ , e portanto temos a segunda linha da Proposição 3.20.  $\square$

Então, com as associações descritas nas Proposições 3.19 e 3.20 contemplamos todos os casos possíveis do  $BS$ -processo. E com isso, somos capazes de demonstrar os resultados da próxima seção.

### 3.3 Principais Resultados

Com toda teoria que desenvolvemos até agora, somos capazes de demonstrar os principais resultados de [23].

O teorema que iremos apresentar a seguir corrobora a ideia de estender  $b$ -avalanches em  $\Lambda(N)$  para  $b$ -avalanches em  $\mathbb{Z}$ . Pois, ele mostra que os valores esperados no caso finito tendem para os valores esperados no caso infinito quando o número de vértices do sistema tende para infinito ( $N \rightarrow \infty$ ).

**Teorema 3.21.** *Para qualquer  $b > 0$ , e qualquer  $N \geq 3$ ,*

$$\begin{aligned} (i) \quad R_N(b) &\leq R_\infty(b), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(b) = R_\infty(b). \\ (ii) \quad P_N(b) &\geq P_\infty(b), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(b) = P_\infty(b). \\ (iii) \quad D_N(b) &\leq D_\infty(b), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(b) = D_\infty(b). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ainda não sabemos se esses limites existem. Portanto, a estratégia para as três partes é a mesma: primeiro encontramos cotas para os limites superior e inferior, e por fim usamos o Teorema do Confronto para concluir a existência e igualdade do limite.

Vamos separar a prova em dois casos disjuntos.

Caso 1: Suponha que  $P_\infty(b) = \mathbb{P}(r(b) = \infty) > 0$ .

(i) Temos que

$$R_\infty(b) = \sum_{i=3}^{\infty} \left[ i\mathbb{P}(r(b) = i) \right] + \underbrace{\infty \mathbb{P}(r(b) = \infty)}_{>0} = \infty.$$

Primeiramente vamos analisar o limite superior de  $R_N(b)$ . Pela Proposição 3.19 temos

$$r_N(b) \leq r(b) \Rightarrow \mathbb{E}[r_N(b)] \leq \mathbb{E}[r(b)] \Rightarrow R_N(b) \leq R_\infty(b) = \infty, \quad \forall N \geq 3.$$

Logo,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq R_\infty(b) = \infty. \quad (3.10)$$

Agora vamos analisar o limite inferior de  $R_N(b)$ , ou seja,  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_N(b)]$ .

Começamos separando a esperança em dois eventos complementares. Veja que

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_N(b)] &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(r_N(b); r(b) < \infty) + \mathbb{E}(r_N(b); r(b) = \infty) \right] = \\ &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.19 temos que  $r(b) < \infty$  implica  $r_N(b) = r(b)$  e  $r(b) = \infty$  implica  $r_N(b) = N$ . Então a equação anterior é igual a

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} N \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] &\stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\geq} \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ r(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} \right] dP + \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ N \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \right] dP = \\ &= \int_{\Omega} r(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \underbrace{\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} [N]}_{\infty} dP. \end{aligned}$$

Como a segunda parcela da equação anterior diverge temos que

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \geq \infty = R_\infty(b) \quad (3.11)$$

Pelas Equações (3.10) e (3.11) podemos concluir a existência do limite, pois

$$R_\infty(b) = \infty \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq \infty = R_\infty(b) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(b) = R_\infty(b) = \infty.$$

(ii) Primeiramente vamos analisar o limite inferior de  $P_N(b)$ . Pela Proposição 3.19,  $r(b) = \infty$  implica que  $r_N(b) = N$ , ou seja,  $\mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \leq \mathbb{1}\{r_N(b) = N\}$ . Portanto

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}) \geq \mathbb{P}(\mathbb{1}\{r(b) = \infty\}) \Rightarrow P_N(b) \geq P_\infty(b), \quad \forall N \geq 3.$$

Logo,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \geq \liminf_{N \rightarrow \infty} P_\infty(b) = P_\infty(b). \quad (3.12)$$

Agora vamos analisar o limite superior de  $P_N(b)$ , ou seja,  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}]$ . Separando a esperança em dois eventos complementares temos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}] &= \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}; r(b) < \infty) + \mathbb{E}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}; r(b) = \infty) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.19 temos que  $\mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} = \mathbb{1}\{r(b) = \infty\}$ . Realizando essa substituição na equação anterior temos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}] &\leq \\ &\leq \underbrace{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right]}_{(*)} + \underbrace{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}\{r(b) = \infty\}) = P_\infty(b)}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que a parcela  $(*)$  é nula

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] \stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\leq} \\ &\leq \int_{\Omega} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} \right] dP = \sum_{k=3}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = k\} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \right] dP. \end{aligned}$$

Note que, pela Proposição 3.19, se  $r(b) = k_0 < \infty$  então  $r_N(b) = k_0$  para todo  $N$  grande suficiente. Logo  $\mathbb{1}\{r_N(b) = N\} = 0$ ,  $\forall N > k_0$  e portanto  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \right] = 0$ . Então, tanto a equação anterior quanto a parcela  $(*)$  são iguais a zero. Por isso e pela Equação (3.13) podemos concluir que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq P_\infty(b). \quad (3.14)$$



Pelas Equações (3.14) e (3.12) podemos concluir a existência do limite, pois

$$P_\infty(b) \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq P_\infty(b) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(b) = P_\infty(b).$$

(iii) Por (i) sabemos que  $R_\infty(b) = \infty$ , logo  $D_\infty(b) = \infty$  (pois  $D_\infty(b) \geq R_\infty(b) - 2$ ). Primeiramente vamos analisar o limite superior de  $D_N(b)$ . Temos que

$$D_N(b) \leq \infty = D_\infty(b) \Rightarrow \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_\infty(b) = \infty. \quad (3.15)$$

Agora vamos analisar o limite inferior de  $D_N(b)$ , ou seja,  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(b) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\eta_N(b)]$ . Separando a esperança em dois eventos complementares temos

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\eta_N(b)] &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(\eta_N(b); r(b) < \infty) + \mathbb{E}(\eta_N(b); r(b) = \infty) \right] = \\ &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.19 e por  $(\eta_N(b) \geq r_N(b) - 2)$ , temos que  $r(b) < \infty$  implica em  $\eta_N(b) \geq r(b) - 2$  e que  $r(b) = \infty$  implica em  $\eta_N(b) \geq N - 2$ . Então

$$\begin{aligned} &\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \geq \\ &\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} (r(b) - 2) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} (N - 2) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\geq} \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ (r(b) - 2) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} \right] dP + \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ (N - 2) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \right] dP = \\ &= \int_{\Omega} (r(b) - 2) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \underbrace{\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} [N - 2]}_{\infty} dP. \end{aligned}$$

Como a segunda parcela da equação anterior diverge temos que

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(b) \geq \infty = D_\infty(b). \quad (3.16)$$

Pelas Equações (3.15) e (3.16) podemos concluir a existência do limite, pois

$$D_\infty(b) = \infty \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(b) \leq \infty = D_\infty(b) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(b) = D_\infty(b) = \infty.$$

Caso 2: Suponha que  $P_\infty(b) = \mathbb{P}(r(b) = \infty) = 0$ . A Proposição 3.19 ainda é adequada para demonstrar as partes **(i)** **(ii)** para este caso. Na parte **(iii)** usaremos a Proposição 3.20, pois esta é apropriada nessa situação.

**(i)** Primeiramente vamos analisar o limite superior de  $R_N(b)$ . Pela Proposição 3.19

$$\begin{aligned} r_N(b) \leq r(b) &\Rightarrow \mathbb{E}[r_N(b)] \leq \mathbb{E}[r(b)] \Rightarrow R_N(b) \leq R_\infty(b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_\infty(b) = R_\infty(b). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora vamos analisar o limite inferior de  $R_N(b)$ , ou seja,  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r_N(b)]$ . Separando a esperança em dois eventos complementares temos

$$\begin{aligned} &\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(r_N(b); r(b) < \infty) + \mathbb{E}(r_N(b); r(b) = \infty) \right] = \\ &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r_N(b) \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]. \end{aligned}$$

Como  $P_\infty(b) = 0$  temos que  $\mathbb{1}\{r(b) = \infty\} = 0$  e portanto  $\mathbb{1}\{r(b) < \infty\} = 1$ . Além disso, pela Proposição 3.19,  $r(b) < \infty$  implica que  $r_N(b) = r(b)$ . Então a equação anterior é igual a

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} r(b) dP \right] = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[r(b)] = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_\infty(b) = R_\infty(b).$$

Temos então

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \geq R_\infty(b). \quad (3.18)$$

Pelas Equações (3.17) e (3.18) podemos concluir a existência do limite, pois

$$R_\infty(b) \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} R_N(b) \leq R_\infty(b) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} R_N(b) = R_\infty(b).$$

**(ii)** Primeiramente vamos analisar o limite inferior de  $P_N(b)$ . Pela Proposição 3.19 temos que  $r(b) = \infty$  implica em  $r_N(b) = N$ , ou seja,  $\mathbb{1}\{r(b) = \infty\} \leq \mathbb{1}\{r_N(b) = N\}$ . Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}) &\geq \mathbb{P}(\mathbb{1}\{r(b) = \infty\}) \Rightarrow P_N(b) \geq P_\infty(b) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_\infty(b) = P_\infty(b) = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agora vamos analisar o limite superior de  $P_N(b)$ , ou seja,  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}]$ . Separando a esperança em dois eventos complementares temos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}] &= \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}; r(b) < \infty) + \mathbb{E}(\mathbb{1}\{r_N(b) = N\}; r(b) = \infty) \right] = \\ &= \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP + \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] + \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.19 temos que  $\mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} = \mathbb{1}\{r(b) = \infty\}$ . Realizando essa substituição na equação anterior temos

$$\underbrace{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right]}_{(\star)} + \underbrace{\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = \infty\} dP \right]}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}\{r(b)=\infty\}) = P_{\infty}(b) = 0}. \quad (3.20)$$

Agora vamos mostrar que a parcela  $(\star)$  é nula

$$\begin{aligned} &\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} dP \right] \stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\leq} \\ &\leq \int_{\Omega} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \mathbb{1}\{r(b) < \infty\} \right] dP = \sum_{k=3}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}\{r(b) = k\} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \right] dP. \end{aligned}$$

Note que, pela Proposição 3.19, se  $r(b) = k_0 < \infty$  então  $r_N(b) = k_0$  para todo  $N$  grande suficiente. Logo  $\mathbb{1}\{r_N(b) = N\} = 0$ ,  $\forall N > k_0$  e portanto  $\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{1}\{r_N(b) = N\} \right] = 0$ . Então, tanto a equação anterior quanto a parcela  $(\star)$  são iguais a zero. Por isso e pela Equação (3.13) podemos concluir que

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq 0 = P_{\infty}(b). \quad (3.21)$$

Pelas Equações (3.21) e (3.19) podemos concluir a existência do limite, uma vez que

$$P_{\infty}(b) = 0 \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} P_N(b) \leq 0 = P_{\infty}(b) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(b) = P_{\infty}(b) = 0.$$

**(iii)** Primeiramente vamos analisar o limite superior de  $D_N(s)$ . Pela Proposição 3.20 temos que

$$\begin{aligned} \eta_N(s) \leq \eta(s) &\Rightarrow \mathbb{E}[\eta_N(s)] \leq \mathbb{E}[\eta(s)] \Rightarrow D_N(s) \leq D_{\infty}(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_{\infty}(s) = D_{\infty}(s). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Agora vamos analisar o limite inferior de  $D_N(s)$ , ou seja,  $\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(s) = \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\eta_N(s)]$ . Separando a esperança em dois eventos complementares temos

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\eta_N(s)] &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \mathbb{E}(\eta_N(s); |\xi(s)| < N) + \mathbb{E}(\eta_N(s); |\xi(s)| \geq N) \right] = \\ &= \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP + \int_{\Omega} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| \geq N\} dP \right] \geq \\ &\geq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP \right] + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{\Omega} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| \geq N\} dP \right]. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.20, no evento  $\{|\xi(s)| < N\}$  temos que  $\eta_N(s) = \eta(s)$ . Podemos substituir  $\eta_N(s)$  por  $\eta(s)$  na primeira parcela da equação anterior, isto é,

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \eta(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP + \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| \geq N\} dP &\stackrel{\text{Lema de Fatou}}{\geq} \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \eta(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \eta_N(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| \geq N\} dP}_{\geq 0} \geq \\ &\geq \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \eta(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP. \end{aligned}$$

Note que, para todo  $N$  grande o suficiente o evento  $\{|\xi(s)| < N\}$  sempre ocorre, ou seja,  $\mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} = 1$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \eta(s) \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\} dP &= \int_{\Omega} \eta(s) \underbrace{\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \mathbb{1}\{|\xi(s)| < N\}}_1 dP = \\ &= \int_{\Omega} \eta(s) dP = \mathbb{E}[\eta(s)] = D_{\infty}(s). \end{aligned}$$

Temos que

$$\underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \geq D_{\infty}(s). \quad (3.23)$$

Pelas Equações (3.22) e (3.23) podemos concluir a existência do limite, pois

$$D_{\infty}(s) \leq \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \leq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \leq D_{\infty}(s) \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) = D_{\infty}(s).$$

□

Começaremos agora a analisar os *limiaries* críticos definidos anteriormente. O Teorema 3.28 vai garantir a igualdade entre os *limiaries*  $b_c^d$  e  $b_c^r$ . Para tal, será necessário usarmos a equação diferencial que demonstraremos no Teorema 3.27. Este por sua vez, é consequência dos Lemas 3.25 e 3.26. Primeiramente, vamos definir alguns conceitos que nos auxiliarão nas demonstrações destes dois lemas.

Seja  $\Pi_x$  o Processo de Poisson associado ao vértice  $x \in \Lambda(N)$ . Então  $\tau \in \Pi_x \cap (p, q]$  é equivalente a dizer que  $\tau$  é uma chegada do processo  $\Pi_x$  tal que  $p < \tau \leq q$ .

**Definição 3.22.** *Seja  $\delta \in \mathbb{R}_+$  e  $\Pi_x$  o Processo de Poisson associado ao vértice  $x \in \Lambda(N)$ . Dizemos que o vértice  $x$  é  $\delta$ -**alcançável em**  $(\alpha, \beta]$  se,  $(\xi_N(\delta), \delta) \rightsquigarrow (x, \tau)$  em  $GR_N$ , para  $\tau \in \Pi_x \cap (\alpha, \beta]$ .*

Como  $\xi_N(0) = \{-1, 0, 1\}$ , o vértice  $x$  é  $0$ -*alcançável em*  $(\alpha, \beta]$  se,  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (x, \tau)$  em  $GR_N$ , para  $\tau \in \Pi_x \cap (\alpha, \beta]$ . Seja  $\delta > 0$ . Então, se o vértice  $x$  é  $\delta$ -*alcançável em*  $(\alpha, \beta]$ , o vértice  $x$  é  $0$ -*alcançável em*  $(\alpha, \beta]$  e vice-versa. Pois, como  $\xi_N(\delta)$  é *conjunto-alcance*, temos que  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (y, \delta)$  em  $GR_N$ ,  $\forall y \in \xi_N(\delta)$ . Logo,  $(\{-1, 0, 1\}, 0) \rightsquigarrow (\xi_N(\delta), \delta) \rightsquigarrow (x, \tau)$  em  $GR_N$ . Defina

$$\mathbb{A}_\delta^{(\alpha, \beta]} := \{\text{Todos os vértices } \delta\text{-alcançáveis entre } (\alpha, \beta]\}.$$

**Definição 3.23.** *Seja  $\Pi_x$  o Processo de Poisson associado ao vértice  $x \in \Lambda(N)$ . Então,  $\top(\mathbb{A}_\delta^{(\alpha, \beta]})$  é o conjunto de todos os  $\tau \in \Pi_y \cap (\alpha, \beta]$  tal que o vértice  $y \in \mathbb{A}_\delta^{(\alpha, \beta]}$ .*

**Observação 3.24.** *Seja  $\varepsilon > 0$ , note que:*

- (a)  $\mathbb{A}_0^{(\alpha, \beta]} = \mathbb{A}_b^{(\alpha, \beta]}$ .
- (b)  $\mathbb{A}_0^{(0, b]} \subseteq \mathbb{A}_0^{(0, b+\varepsilon]}$ .
- (c)  $\mathbb{A}_0^{(0, b+\varepsilon]} \setminus \mathbb{A}_0^{(0, b]} = \mathbb{A}_0^{(b, b+\varepsilon]}$ .

Com essas novas definições, e com as observações em mente, podemos reescrever o *conjunto-alcance* e a *duração* de uma  $b$ -*avalanche* como

$$\xi_N(b) = \mathbb{A}_0^{(0, b]} \quad e \quad \eta_N(b) = 1 + \sum_{\tau \in \top(\mathbb{A}_0^{(0, b]})} \hat{\eta}_N(\tau).$$

Então

$$D_N(b) = \mathbb{E}[\eta_N(b)] = 1 + \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \top(\mathbb{A}_0^{(0, b]})} \hat{\eta}_N(\tau)\right].$$

**Lema 3.25.** Para qualquer  $b > 0$

$$\frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon} \geq D_N(b)R_N(b)\left(1 + o(1)\right), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

*Demonstração.* Começaremos realizando a subtração

$$\begin{aligned} D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) &= \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_0^{(0, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_0^{(0, b)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_0^{(0, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau) - \sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_0^{(0, b)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_0^{(0, b+\varepsilon)} \setminus \mathbb{A}_0^{(0, b)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para cada vértice  $y \in \Lambda(N)$ , definimos  $\tau_y^*$  como a primeira chegada em  $\Pi_y$  depois do tempo  $b$ , ou seja,  $\tau_y^* = \inf\{\tau > b : \tau \in \Pi_y\}$ . Para qualquer  $y \in \xi_N(b)$ , sempre teremos  $(\xi_N(b), b) \rightsquigarrow (y, \tau_y^*)$  em  $GR_N$ . Como para cada  $y \in \xi_N(b)$  pode existir mais de uma chegada entre  $b$  e  $b + \varepsilon$ , isto é,  $\tau \in \Pi_y$  tal que  $b < \tau_y^* < \tau < b + \varepsilon$ , temos pela Expressão (3.25) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau)\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{y \in \xi_N(b)} \sum_{t.q. \tau_y^* < b+\varepsilon} \hat{\eta}_N(\tau_y^*)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{y \in \xi_N(b)} s_N(y, b)\right], \quad (3.26)$$

onde  $s_N(y, b) = \hat{\eta}_N(\tau_y^*) \mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}$ .

Agora acoplaremos  $\hat{\eta}_N(\tau_y^*)$  com uma variável aleatória menor, independente de  $\tau_y^*$ . Considere uma representação gráfica  $GR_N$ . No tempo  $\tau_y^*$ , temos em  $GR_N$  uma  $\tau_y^*$ -subavalanche independente. Seja  $GR'_N$  a representação gráfica para esta avalanche. Então  $\hat{\eta}_N(\tau_y^*)$  é um mais a duração total de todas as  $\tau_y^*$ -subavalanches em  $GR'_N$ . Definimos  $\hat{\eta}'_N(y, b)$  como sendo um mais a duração total de todas as  $b$ -subavalanches em  $GR'_N$ . Como  $\tau_y^* > b$ , todas as  $b$ -subavalanches são  $\tau_y^*$ -subavalanches em  $GR'_N$ . Temos que

$$\hat{\eta}'_N(y, b) \mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\} \leq \hat{\eta}_N(\tau_y^*) \mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\} = s_N(y, b).$$

Note que  $\hat{\eta}'_N(y, b)$  é independente de  $\tau_y^*$  e que  $\hat{\eta}'_N(y, b)$  é distribuído como a duração de uma  $b$ -avalanche em  $GR'_N$ , ou seja,  $\mathbb{E}[\hat{\eta}'_N(y, b)] = D_N(b)$ . Temos então

$$\mathbb{E}[s_N(y, b)] \geq \mathbb{E}[\hat{\eta}'_N(y, b) \mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}] =$$

$$= \mathbb{E}[\hat{\eta}'_N(y, b)]\mathbb{E}[\mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}] = D_N(b)\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon). \quad (3.27)$$

Como por definição  $\tau_y^* > b$ , temos que

$$\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon) = \mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon \mid \tau_y^* > b) = \mathbb{P}(\tau_y^* < \varepsilon) = 1 - e^{-\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Portanto  $\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon) = (\varepsilon + o(\varepsilon))$  e a Expressão (3.27) é equivalente a

$$\mathbb{E}[s_N(y, b)] \geq D_N(b)(\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Por isso e levando em conta que  $(s_N(y, b))_{y \in \Lambda(N)}$ , e portanto  $(\hat{\eta}'_N(y, b))_{y \in \Lambda(N)}$ , são independentes de  $\xi_N(b)$ , temos que a Expressão (3.26) é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{y \in \xi_N(b)} s_N(y, b)\right] &\geq \mathbb{E}\left[\sum_{y \in \xi_N(b)} \hat{\eta}'_N(y, b)\mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}\right] = \\ &= \sum_{y \in \xi_N(b)} \mathbb{E}\left[\hat{\eta}'_N(y, b)\mathbb{1}\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}\right] = \mathbb{E}[r_N(b)]\mathbb{E}[\hat{\eta}'_N(0, b)] = R_N(b)D_N(b)(\varepsilon + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) &\geq R_N(b)D_N(b)(\varepsilon + o(\varepsilon)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon} &\geq R_N(b)D_N(b)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

□

**Lema 3.26.** *Para qualquer  $b > 0$*

$$\frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon} \leq D_N(b)\frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)}(1 + o(1)), \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.28)$$

*Demonstração.* Começaremos demonstrando que, para qualquer  $b, \varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon < (R_N(b))^{-1}$ , a desigualdade acima é equivalente a

$$D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) \leq R_N(b)D_N(b + \varepsilon)(\varepsilon + o(\varepsilon)). \quad (3.29)$$

Multiplicando ambos os lados da Expressão (3.28) por  $\varepsilon$  a desigualdade não se altera, isto é,

$$D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) \leq D_N(b)\frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)}(\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Como  $0 < \varepsilon < \left(R_N(b)\right)^{-1}$ , então  $1 - \varepsilon R_N(b) > 0$ . Logo, podemos multiplicar ambos os lados da desigualdade anterior por  $1 - \varepsilon R_N(b)$  sem modificá-la, ou seja,

$$\begin{aligned} D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) \left(1 - \varepsilon R_N(b)\right) &\leq D_N(b) R_N(b) \left(\varepsilon + o(\varepsilon)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) &\leq \varepsilon R_N(b) D_N(b + \varepsilon) + D_N(b) R_N(b) o(\varepsilon). \end{aligned}$$

No lado direito da equação anterior, vamos colocar em evidência  $R_N(b) D_N(b + \varepsilon)$ ,

$$D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) \leq R_N(b) D_N(b + \varepsilon) \left(\varepsilon + \underbrace{\frac{D_N(b)}{D_N(b + \varepsilon)}}_{o(\varepsilon)} o(\varepsilon)\right).$$

Logo, a Expressão (3.29) é equivalente a Expressão (3.28) como queríamos mostrar. Portanto, basta provar a Expressão (3.29). Agora que reescrevemos a desigualdade de uma maneira mais conveniente, podemos usar a Decomposição (3.25) para provar a Expressão (3.29). Temos então

$$D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) = \mathbb{E} \left[ \sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon)})} \hat{\eta}_N(\tau) \right].$$

Para cada vértice  $y \in \Lambda(N)$ , definimos  $\tau_y^*$  como a primeira chegada em  $\Pi_y$  depois do tempo  $b$ , ou seja,  $\tau_y^* = \inf\{\tau > b : \tau \in \Pi_y\}$ . Note que, se o vértice  $x$  é  $b$ -alcançável entre  $(b, b + \varepsilon]$ , então existe pelo menos um vértice  $y \in \xi_N(b)$  (pode ser o próprio  $x$  inclusive) tal que  $\tau_y^* < b + \varepsilon$  e  $(\xi_N(b), b) \rightsquigarrow (y, \tau_y^*) \rightsquigarrow (x, \tau_x)$  em  $GR_N$ , onde  $\tau_x \in \Pi_x \cap [b, b + \varepsilon]$ . Veja a figura abaixo:

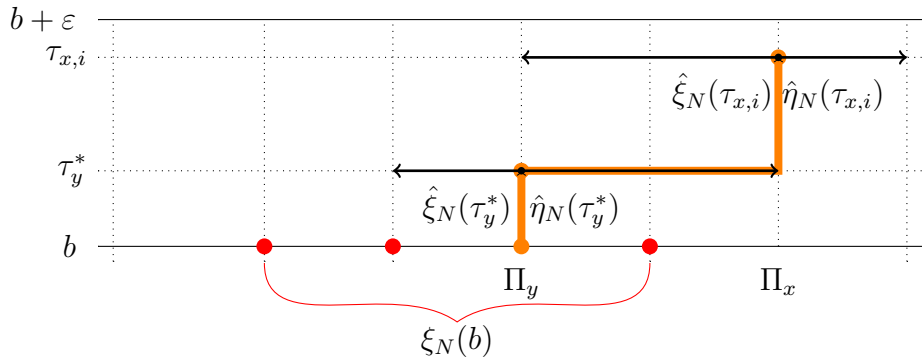


Figura 3.7: Qualquer caminho fora do  $\xi_N(b)$  deve usar pelo menos uma seta dentro de  $\xi_N(b)$ .



Ou seja, o vértice  $x$  é  $b$ -alcançável entre  $(\tau_y^*, b + \varepsilon]$ . Logo,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon]})} \hat{\eta}_N(\tau) \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{y \in \xi_N(b), \tau_y^* < b + \varepsilon} \left( \hat{\eta}_N(\tau_y^*) + \underbrace{\sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(\tau_y^*, b+\varepsilon]})} \hat{\eta}_N(\tau)}_{(*)} \right) \right], \quad (3.30)$$

pois, se existir mais de um  $y \in \xi_N(b)$  tal que  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ , e  $(\xi_N(b), b) \rightsquigarrow (y, \tau_y^*) \rightsquigarrow (x, \tau_x)$  em  $GR_N$ , onde  $\tau_x \in \Pi_x \cap (\tau_y^*, b + \varepsilon]$ , então  $\hat{\eta}_N(\tau_x)$  será contabilizada em  $(*)$  mais de uma vez (em diferentes iterações do primeiro somatório). A Expressão (3.30) é equivalente a

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(b, b+\varepsilon]})} \hat{\eta}_N(\tau) \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{y \in \xi_N(b)} S_N(y, b) \right], \quad (3.31)$$

onde

$$S_N(y, b) = \left( \hat{\eta}_N(\tau_y^*) + \sum_{\tau \in \mathbb{T}(\mathbb{A}_b^{(\tau_y^*, b+\varepsilon]})} \hat{\eta}_N(\tau) \right) \mathbb{1}_{\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}}.$$

Agora, vamos provar que a esperança condicional de  $S_N(y, b)$ , dado  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ , é a mesma que a esperança não-condicional de  $\eta_N(b + \varepsilon)$ . Ou seja, queremos provar que

$$\mathbb{E} \left[ S_N(y, b) \mid \tau_y^* < b + \varepsilon \right] = D_N(b + \varepsilon). \quad (3.32)$$

Na chegada  $\tau_y^*$  em  $GR_N$  temos uma  $\tau_y^*$ -subavalanche independente. Esta *subavalanche* é construída via uma representação gráfica independente  $GR'_N$ . Se  $\tau_y^* \geq b + \varepsilon$ , nada é feito. Se  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ , concatenamos a parte de  $GR'_N$  antes do *limiar*  $\tau_y^*$ , com a parte de  $GR_N$  depois do *limiar*  $\tau_y^*$ , deslocada por  $-y$  vértices. Denotaremos o resultado por  $GR_N(y, b)$ . Veja a figura abaixo:

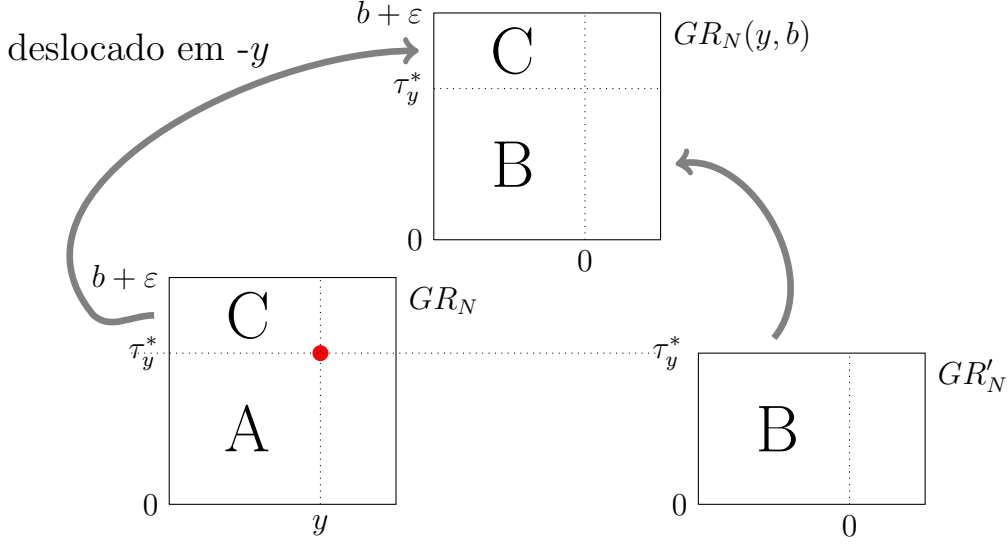


Figura 3.8: Concatenamos a parte de  $GR'_N$  antes do *limiar*  $\tau_y^*$  com a parte de  $GR_N$  após o *limiar*  $\tau_y^*$  para construir  $GR_N(y, b)$ .

Como  $GR_N$  e  $GR'_N$  são independentes e  $\tau_y^*$  é um *tempo de parada* com respeito a  $\Pi(N)$ ,  $GR_N(y, b)$  é também uma representação gráfica. Repare que, temos uma  $GR_N(y, b)$  para cada  $y \in \xi_N(b)$  tal que  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ .

Note que,  $S_N(y, b)$ , dado  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ , é a *duração total* de todas as  $(b + \varepsilon)$ -*subavalanches* em  $GR_N(y, b)$ . Então a esperança condicional de  $S_N(y, b)$ , dado  $\tau_y^* < b + \varepsilon$ , é a mesma que a esperança de  $\eta_N(y, b + \varepsilon)$ , i.e. a esperança de  $\eta_N(b + \varepsilon)$ . Portanto, a Expressão (3.32) é verdade. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_N(y, b); \tau_y^* < b + \varepsilon] &= \int_{\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}} S_N(y, b) dP = \\ &= \int_{\Omega} S_N(y, b) \mathbb{1}_{\{\tau_y^* < b + \varepsilon\}} dP = \int_{\Omega} S_N(y, b) dP = \mathbb{E}[S_N(y, b)]. \end{aligned}$$

Então temos

$$\mathbb{E}[S_N(y, b) \mid \tau_y^* < b + \varepsilon] = \frac{\mathbb{E}[S_N(y, b); \tau_y^* < b + \varepsilon]}{\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon)} = \frac{\mathbb{E}[S_N(y, b)]}{\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon)}.$$

Com isso e pela Expressão (3.32) temos que

$$\mathbb{E}[S_N(y, b)] = D_N(b + \varepsilon) \mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon) = D_N(b + \varepsilon) (\varepsilon + o(\varepsilon)),$$

pois,  $\mathbb{P}(\tau_y^* < b + \varepsilon) = (\varepsilon + o(\varepsilon))$  pelo mesmo argumento usado na Demonstração do Lema 3.25. Então, levando em conta que para qualquer  $y \in \Lambda(N)$ ,  $S_N(y, b)$  e  $\xi_N(b)$  são independentes temos pela Expressão (3.30) que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{y \in \xi_N(b)} S_N(y, b)\right] = \sum_{y \in \xi_N(b)} \mathbb{E}[S_N(y, b)] = R_N(b)D_N(b + \varepsilon)(\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Logo,

$$D_N(b + \varepsilon) - D_N(b) \leq R_N(b)D_N(b + \varepsilon)(\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Portanto demonstramos a Expressão (3.29).  $\square$

Agora, com estes dois lemas estamos capacitados para demonstrar o seguinte Teorema.

**Teorema 3.27.** *Para qualquer  $N \geq 3$ ,  $D_N(b)$  é diferenciável com respeito a  $b$  e*

$$D'_N(b) = \frac{d}{db}D_N(b) = D_N(b)R_N(b). \quad (3.33)$$

*Demonstração.* A prova deste Teorema segue direto dos dois Lemas anteriores. Pois combinando as Expressões (3.24) e (3.28) podemos escrever, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\underbrace{D_N(b)R_N(b)(1 + o(1))}_{(*)} \leq \underbrace{\frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon}}_{(**)} \leq \underbrace{D_N(b)\frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)}(1 + o(1))}_{(***)}. \quad (3.34)$$

Podemos então tomar o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  de todos os termos da desigualdade:

Para (\*):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( D_N(b)R_N(b)(1 + o(1)) \right) &= D_N(b)R_N(b)\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + o(1)) = \\ &= D_N(b)R_N(b)(1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1)) = D_N(b)R_N(b). \end{aligned}$$

Para (\*\*):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon} \right) = \frac{d}{db}D_N(b).$$

Para (\*\*\*):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( D_N(b)\frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)}(1 + o(1)) \right) = D_N(b)\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)}(1 + o(1)) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= D_N(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + o(1)) = \\
&= D_N(b) R_N(b) (1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1)) = D_N(b) R_N(b).
\end{aligned}$$

Temos então que no limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a Expressão (3.34) é equivalente a

$$D_N(b) R_N(b) \leq \frac{d}{db} D_N(b) \leq D_N(b) R_N(b).$$

Pelo Teorema do Confronto segue que

$$\frac{d}{db} D_N(b) = D_N(b) R_N(b).$$

□

Finalmente, podemos provar a igualdade entre os *limiaries*  $b_c^d$  e  $b_c^r$  e um Corolário desse fato.

**Teorema 3.28.** *Os limiaries críticos  $b_c^d$ ,  $b_c^r$  são iguais, i.e.  $b_c^d = b_c^r$ .*

*Demonstração.* Pela Desigualdade 3.4, já sabemos que  $b_c^d \leq b_c^r$ . Então para demonstrar a igualdade basta mostrar que  $b_c^d \geq b_c^r$ . Podemos supor então que  $R_\infty(b) < \infty$ . Vamos começar resolvendo a equação diferencial do Teorema 3.27,

$$D'_N(b) = D_N(b) R_N(b).$$

Integrando ambos os lados da equação anterior temos

$$\int_0^b \frac{D'_N(x)}{D_N(x)} dx = \int_0^b R_N(x) dx + C \Rightarrow \ln(D_N(b)) = \int_0^b R_N(x) dx + C,$$

isto é,

$$\exp\left(\ln(D_N(b))\right) = \exp\left(\int_0^b R_N(x) dx + C\right).$$

Aplicando as propriedades da função exponencial

$$D_N(b) = \exp(C) \exp\left(\int_0^b R_N(x) dx\right) \Rightarrow D_N(b) = K \exp\left(\int_0^b R_N(x) dx\right).$$

Como  $D_N(0) = 1$ ,  $\forall N \geq 3$  podemos resolver o *Problema de Valor Inicial* da nossa equação diferencial

$$D_N(0) = K \exp\left(\int_0^0 R_N(x) dx\right) \Rightarrow 1 = K \exp(0) \Rightarrow K = 1.$$

Logo,

$$D_N(b) = \exp\left(\int_0^b R_N(x)dx\right).$$

Note que para  $0 \leq x \leq b$  temos  $R_N(x) \leq R_N(b)$ ,  $\forall N \geq 3$  (Lema 3.18). Logo,

$$\exp\left(\int_0^b R_N(x)dx\right) \leq \exp\left(\int_0^b R_N(b)dx\right) = \exp\left(R_N(b) \int_0^b dx\right) = \exp\left(bR_N(b)\right).$$

Ou seja,

$$D_N(b) \leq \exp\left(bR_N(b)\right).$$

Pelo Teorema 3.21 (i) temos  $R_N(b) \leq R_\infty(b)$ ,  $\forall N \geq 3$ . Logo,

$$\exp\left(bR_N(b)\right) \leq \exp\left(bR_\infty(b)\right) \Rightarrow D_N(b) \leq \exp\left(bR_\infty(b)\right).$$

Como vale para todo  $N \geq 3$  vale para  $N \rightarrow \infty$ . Logo, pelo Teorema 3.21 (iii),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(b) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \exp\left(bR_\infty(b)\right) \Rightarrow D_\infty(b) \leq \exp\left(bR_\infty(b)\right).$$

Como, por hipótese,  $R_\infty(b) < \infty$  temos

$$R_\infty(b) < \infty \Rightarrow \exp\left(bR_\infty(b)\right) < \infty.$$

Então,

$$R_\infty(b) < \infty \Rightarrow D_\infty(b) < \infty.$$

Portanto  $b_c^d \geq b_c^r$ . Concluimos assim a igualdade  $b_c^d = b_c^r$ . □

**Corolário 3.29.** *Se  $R_\infty(b) < \infty$  então  $D_\infty$  é diferenciável e*

$$\frac{d}{db} D_\infty(b) = D_\infty(b) R_\infty(b). \quad (3.35)$$

*Demonstração.* Começaremos escrevendo a desigualdade como na demonstração do Teorema 3.27. Quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  temos

$$\underbrace{D_N(b)R_N(b)(1+o(1))}_{(\spadesuit)} \leq \underbrace{\frac{D_N(b+\varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon}}_{(\heartsuit)} \leq \underbrace{D_N(b) \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)} (1+o(1))}_{(\clubsuit)}$$

Mas, antes de tomarmos o limite de quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , vamos tomar primeiro o limite quando  $N \rightarrow \infty$  em cada termo da desigualdade:

Para  $(\spadesuit)$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( D_N(b)R_N(b)(1+o(1)) \right) = (1+o(1)) \lim_{N \rightarrow \infty} \left( D_N(b)R_N(b) \right) =$$

$$= (1 + o(1)) \lim_{N \rightarrow \infty} (D_N(b)) \lim_{N \rightarrow \infty} (R_N(b)) = D_\infty(b) R_\infty(b) (1 + o(1)).$$

Para (▼▼):

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{D_N(b + \varepsilon) - D_N(b)}{\varepsilon} \right) &= \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} (D_N(b + \varepsilon) - D_N(b))}{\varepsilon} = \\ &= \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} (D_N(b + \varepsilon)) - \lim_{N \rightarrow \infty} (D_N(b))}{\varepsilon} = \frac{D_\infty(b + \varepsilon) - D_\infty(b)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Para (▼▼▼):

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( D_N(b) \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)} (1 + o(1)) \right) &= (1 + o(1)) \lim_{N \rightarrow \infty} \left( D_N(b) \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)} \right) = \\ &= (1 + o(1)) \lim_{N \rightarrow \infty} (D_N(b)) \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{R_N(b)}{1 - \varepsilon R_N(b)} \right) = \\ &= D_\infty(b) (1 + o(1)) \frac{\lim_{N \rightarrow \infty} (R_N(b))}{1 - \varepsilon \lim_{N \rightarrow \infty} (R_N(b))} = D_\infty(b) \frac{R_\infty(b)}{1 - \varepsilon R_\infty(b)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Podemos concluir então que quando  $N \rightarrow \infty$  obtemos a seguinte desigualdade, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\underbrace{D_\infty(b) R_\infty(b) (1 + o(1))}_{(*)} \leq \underbrace{\frac{D_\infty(b + \varepsilon) - D_\infty(b)}{\varepsilon}}_{(**)} \leq \underbrace{D_\infty(b) \frac{R_\infty(b)}{1 - \varepsilon R_\infty(b)} (1 + o(1))}_{(***)}. \quad (3.36)$$

Note que, por hipótese  $R_\infty(b) < \infty$  e portanto, pelo Teorema 3.28,  $D_\infty(b) < \infty$ . Agora então, podemos tomar o limite de todos os termos desta desigualdade quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

Para (\*):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( D_\infty(b) R_\infty(b) (1 + o(1)) \right) &= D_\infty(b) R_\infty(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + o(1)) = \\ &= D_\infty(b) R_\infty(b) (1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1)) = D_\infty(b) R_\infty(b). \end{aligned}$$

Para (\*\*):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{D_\infty(b + \varepsilon) - D_\infty(b)}{\varepsilon} \right) = \frac{d}{db} D_\infty(b).$$

Para (\*\*\*):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( D_\infty(b) \frac{R_\infty(b)}{1 - \varepsilon R_\infty(b)} (1 + o(1)) \right) = D_\infty(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{R_\infty(b)}{1 - \varepsilon R_\infty(b)} (1 + o(1)) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= D_\infty(b) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{R_\infty(b)}{1 - \varepsilon R_\infty(b)} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + o(1)) = \\
&= D_\infty(b) R_\infty(b) (1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o(1)) = D_\infty(b) R_\infty(b).
\end{aligned}$$

Temos então que no limite quando  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , a Expressão (3.36) é

$$D_\infty(b) R_\infty(b) \leq \frac{d}{db} D_\infty(b) \leq D_\infty(b) R_\infty(b).$$

Pelo Teorema do Confronto

$$\frac{d}{db} D_\infty(b) = D_\infty(b) R_\infty(b).$$

□

Para sermos capazes de demonstrar o restante dos resultados, precisaremos estudar o conceito de *limiaries-barreira*. Este conceito é útil pois, dado os *limiaries-barreira*, as *aptidões*  $\mathcal{X}_N(n)$  são independentes e exponencialmente distribuídas acima de seus respectivos *limiaries-barreira*.

Para qualquer  $N \geq 3$  considere o *BS-processo* em  $\Lambda(N)$  e seja  $\mathcal{X}_N(n)$  a coleção das *aptidões* no tempo  $n \geq 0$ . Lembre-se que a hipótese é que no tempo inicial  $n = 0$  todas as *aptidões* são i.i.d. e exponencialmente distribuídas, ou seja, a coleção  $\mathcal{X}_N(0)$  é independente e exponencialmente distribuída.

**Definição 3.30.** Para qualquer  $x_1 < \dots < x_k \in \Lambda(N)$ , seja  $F_{N,x_1,\dots,x_k}(n, \cdot)$  a função de distribuição conjunta de  $X_{N,x_1}(n), \dots, X_{N,x_k}(n)$  no tempo  $n \geq 0$ , i.e. para qualquer  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}_+$ , definimos

$$F_{N,x_1,\dots,x_k}(n, b_1, \dots, b_k) := P(X_{N,x_1}(n) \leq b_1, \dots, X_{N,x_k}(n) \leq b_k).$$

No tempo  $n$ , para cada vértice  $x$  será associado um *limiar-barreira*  $Y_{N,x}(n)$ . Então, seja  $\mathcal{Y}_N(n) = \{Y_{N,x}(n)\}_{x \in \Lambda(N)}$  a coleção dos *limiaries-barreira* no tempo  $n \geq 0$ . A dinâmica de associação dos *limiaries-barreira* é dada a seguir

1. No tempo 0 fixamos  $Y_{N,x}(0) = 0$ , para todo vértice  $x \in \Lambda(N)$ .
2. No tempo  $n$  seja  $x^*$  o vértice com a menor *aptidão* no tempo  $n - 1$ , então

$$Y_{N,x}(n) = \begin{cases} \max\{Y_{N,x}(n-1), X_{N,x^*}(n-1)\} & , x \in \Lambda(N) \setminus \mathcal{V}(x^*) \\ 0 & , x \in \mathcal{V}(x^*). \end{cases}$$

Ou seja, no tempo  $n$  os vértices que pertencem a vizinhança do vértice  $x^*$  tem seus *limiares-barreira* zerados; enquanto os vértices que não pertencem a vizinhança de  $x^*$  têm seus *limiares-barreira* inalterados ( $Y_{N,x}(n-1)$ ) ou atualizados para um valor maior ( $X_{N,x^*}(n-1)$ ). O exemplo a seguir deve deixar claro esta dinâmica.

**Exemplo 3.31.** *Para ficar claro como é a dinâmica dos limiares-barreira, considere a  $b$ -avalanche abaixo.*

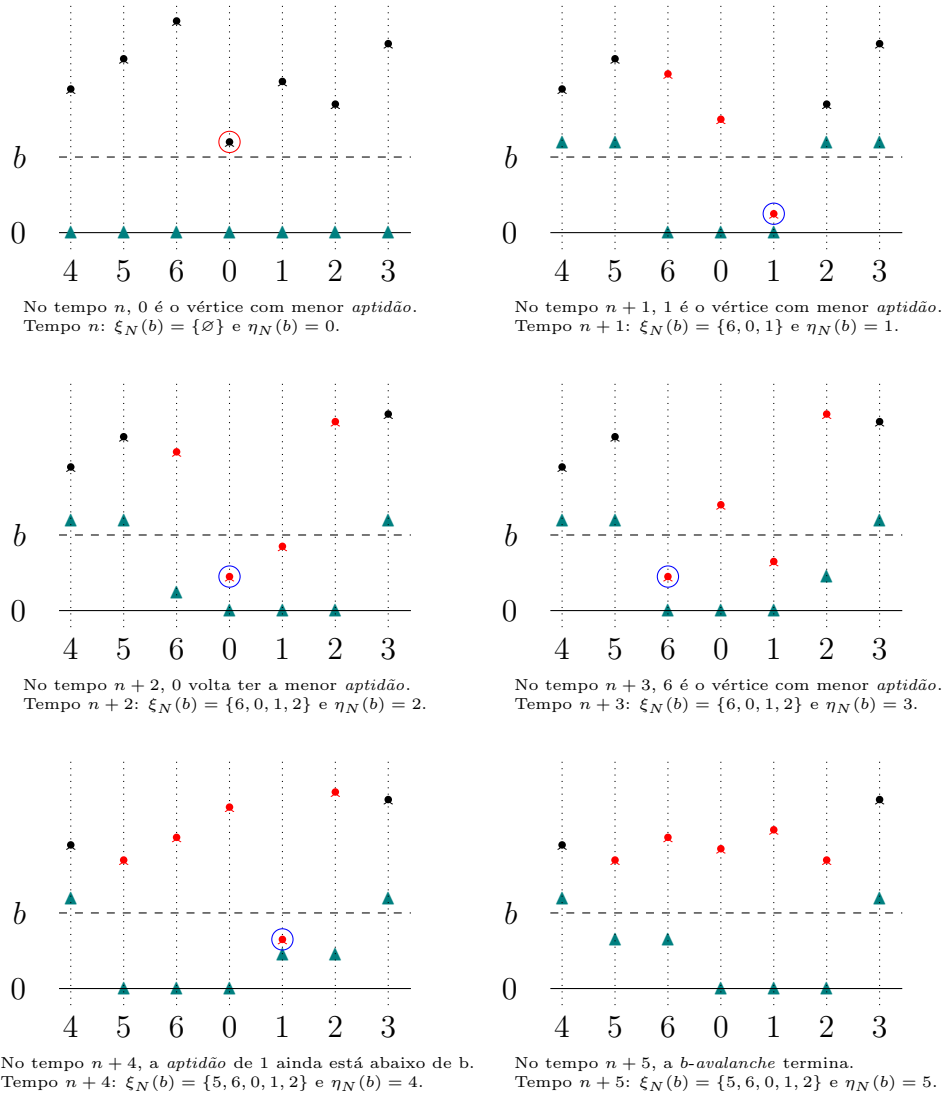


Figura 3.9: Dinâmica dos *limiares-barreira*.

**Observação 3.32.** *Ao final de uma  $b$ -avalanche, os limiares-barreira de todos os vértices que foram alcançados pela avalanche (aqueles que pertencem ao conjunto-alcance) são*



menores que o limiar  $b$ . Pois, um vértice ao entrar no conjunto-alcance tem seu limiar-barreira zerado (ele tem que pertencer a vizinhança do mínimo) e durante uma  $b$ -avalanche todas aptidões dos mínimos são menores que  $b$  (caso não fossem, a  $b$ -avalanche já teria terminado); e são com essas aptidões que os limiares-barreira são atualizados. É claro que se uma  $b$ -avalanche é abrangente então todos os limiares-barreira são menores que  $b$  ao final de uma  $b$ -avalanche.

Agora, vamos demonstrar, por indução, que dado os *limiares-barreira*  $\mathcal{Y}_N(n)$  as *aptidões*  $\mathcal{X}_N(n)$  são independentes e exponencialmente distribuídas acima de seus respectivos *limiares-barreira*. Vamos fixar  $Y_{N,x}(0) = 0$ , para todo  $x \in \Lambda(N)$ . Como, por hipótese, a coleção  $\mathcal{X}_N(0)$  é i.i.d. temos o passo base da indução. Então, para o passo indutivo, vamos supor que, para algum  $n \geq 0$ , os *limiares-barreira*  $\mathcal{Y}_N(n)$  estão definidos, e que  $\mathcal{X}_N(n)$ , dado  $\mathcal{Y}_N(n)$ , é uma coleção independente e exponencialmente distribuída acima de seus *limiares-barreira*. Seja  $x_n^*$  o vértice com a menor *aptidão* no tempo  $n$ . Então, dado  $\mathcal{Y}_N(n)$ , e dado  $X_{N,x_n^*}(n)$ , as *aptidões*  $(X_{N,y}(n))_{y \in \Lambda(n) \setminus \{x_n^*\}}$  são independentes e exponencialmente distribuídas acima dos *limiares*  $(\max\{Y_{N,y}(n), X_{N,x_n^*}(n)\})_{y \in \Lambda(n) \setminus \{x_n^*\}}$ . De acordo com as regras de atualização, a vizinhança  $\mathcal{V}(x_n^*)$  de  $x_n^*$  é atualizada e suas *aptidões* são trocadas por três novas variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas. Então, definimos

$$Y_{N,y}(n+1) = \begin{cases} \max\{Y_{N,y}(n), X_{N,x_n^*}(n)\} & , \text{ para } y \in \Lambda(N) \setminus \mathcal{V}(x_n^*) \\ 0 & , \text{ para } y \in \mathcal{V}(x_n^*). \end{cases}$$

Observe que  $\mathcal{X}_N(n+1)$ , dado  $\mathcal{Y}_N(n+1)$ , é uma coleção independente e exponencialmente distribuída acima de  $\mathcal{Y}_N(n+1)$ , i.e. temos o passo da indução. Mais precisamente, mostramos que para qualquer  $x_1 < \dots < x_k \in \Lambda(N)$ , e  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}_+$  temos a representação

$$F_{N,x_1,\dots,x_k}(n, b_1, \dots, b_k) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left( \prod_{i=1}^k \Theta_{s_i}(b_i) \right) \mathbb{G}_{N,x_1,\dots,x_k}(n, ds_1, \dots, ds_k), \quad (3.37)$$

onde  $\Theta_s(\cdot)$  é a função de distribuição exponencial acima de  $s$ , i.e.

$$\Theta_s(b) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } b < s \\ 1 - \exp(-b + s) & , \text{ se } b \geq s \end{cases}$$

e  $\mathbb{G}_{N,x_1,\dots,x_k}(n, \cdot)$  é a função de distribuição conjunta de  $Y_{N,x_1}(n), \dots, Y_{N,x_k}(n)$ .

Os *limiares-barreira* são úteis para estudar o comportamento limite do *BS-processo*, como podemos ver a seguir. Para qualquer  $x_1 < \dots < x_k \in \mathbb{Z}$ ,  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}_+$ ,  $n \geq 1$  e  $N$  suficientemente grande, temos  $x_1 < \dots < x_k \in \Lambda(N)(\text{mod } N)$ , e portanto  $F_{N,x_1,\dots,x_k}(n, b_1, \dots, b_k)$  está bem definida. Para qualquer  $N \geq 3$  e  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $G_N(n, \cdot)$  a função de distribuição do *limiar-barreira*  $Y_{N,0}(n)$ ,  $G_N^1(n, \cdot)$  a função de distribuição marginal do *limiar-barreira*  $Y_{N,x_1}(n)$  e  $G_N^2(n, \cdot)$  a função de distribuição marginal do *limiar-barreira*  $Y_{N,x_2}(n)$ . Observe que os *limiares-barreira* são identicamente distribuídos, isto é,  $G_N(n, \cdot) = G_N^1(n, \cdot) = G_N^2(n, \cdot)$ .

**Lema 3.33.** *Suponha que exista  $0 < b_c < \infty$ , tal que para qualquer  $b < b_c$*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b) = 0$$

e para qualquer  $b' > b_c$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b') = 1.$$

Então a distribuição limite no *BS-processo* existe e é igual ao produto de  $\Theta_{b_c}(\cdot)$ , i.e. para qualquer  $x_1 < \dots < x_k \in \mathbb{Z}$  e  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{N,x_1,\dots,x_k}(n, b_1, \dots, b_k) = \prod_{i=1}^k \Theta_{b_c}(b_i).$$

*Demonstração.* A demonstração é uma simples consequência da Representação (3.37), e para simplificar realizaremos somente para as marginais bidimensionais  $F_{N,x_1,x_2}(n, \cdot, \cdot)$ . Seja  $b_1, b_2 \geq 0$ , e observe que para qualquer  $y_1, y_2 \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| &\leq |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2)| + |\Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| \leq \\ &\leq |\Theta_{y_1}(b_1)||\Theta_{y_2}(b_2)| + |\Theta_{b_c}(b_1)||\Theta_{b_c}(b_2)| \leq 2 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como  $\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2)$  é uma função continua em  $(y_1, y_2)$ , para qualquer  $0 < \varepsilon < b_c$  existe  $0 < \delta < \varepsilon$  tal que

$$|\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| \leq \varepsilon, \text{ para qualquer } (y_1, y_2) \in [b_c - \delta, b_c + \delta]^2$$

Usando o fato de que a “integral total” é igual a soma das “integrais parciais”, vamos dividir o “plano” como na figura abaixo:

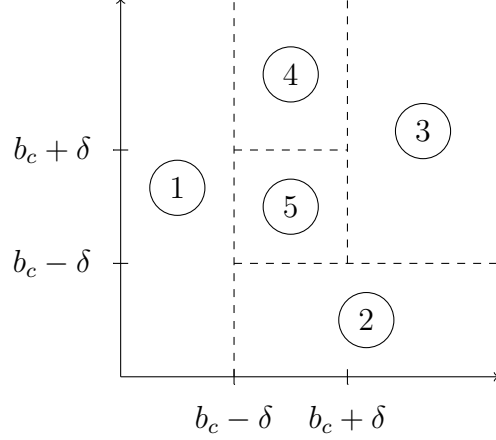


Figura 3.10: Partição do plano.

Temos que

$$\begin{aligned}
& |F_{N,x_1,x_2}(n, b_1, b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| \leq \\
& \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{|\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)|}_{\Delta} d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
& \leq \int \int_{(1)} \Delta d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) + \int \int_{(2)} \Delta d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) + \int \int_{(3)} \Delta d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) + \\
& \quad + \int \int_{(4)} \Delta d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) + \int \int_{(5)} \Delta d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a parcela da Região (1) temos que

$$\begin{aligned}
& \int \int_{(1)} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
& \leq 2 \int_0^\infty \int_0^{b_c - \delta} d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) = 2 \int_0^\infty \left[ d\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, y_2) - d\mathbb{G}_N(n, 0, y_2) \right] = \\
& = 2 \left[ \underbrace{\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, \infty)}_{=0} - \underbrace{\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, 0)}_{=0} \right] - \left[ \underbrace{\mathbb{G}_N(n, 0, \infty)}_{=0} - \underbrace{\mathbb{G}_N(n, 0, 0)}_{=0} \right] = \\
& = 2G_N(n, b_c - \delta). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a parcela da Região (2) temos que

$$\begin{aligned}
& \int \int_{(2)} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
& \leq 2 \int_0^{b_c - \delta} \int_{b_c - \delta}^\infty d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) = 2 \int_0^{b_c - \delta} \left[ d\mathbb{G}_N(n, \infty, y_2) - d\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, y_2) \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[ [\mathbb{G}_N(n, \infty, b_c - \delta) - \underbrace{\mathbb{G}_N(n, \infty, 0)}_{=0}] - [\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c - \delta) - \underbrace{\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, 0)}_{=0}] \right] = \\
&= 2 \left[ G_N^2(n, b_c - \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c - \delta) \right] \leq 2G_N(n, b_c - \delta). \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a parcela da Região (3) temos que

$$\begin{aligned}
&\int \int_{(3)} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
&\leq 2 \int_{b_c-\delta}^{\infty} \int_{b_c+\delta}^{\infty} d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) = 2 \int_{b_c-\delta}^{\infty} \left[ d\mathbb{G}_N(n, \infty, y_2) - d\mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, y_2) \right] = \\
&= 2 \left[ [\mathbb{G}_N(n, \infty, \infty) - \mathbb{G}_N(n, \infty, b_c - \delta)] - [\mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, \infty) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c - \delta)] \right] = \\
&= 2 \left[ [1 - G_N^2(n, b_c - \delta)] - [G_N^1(n, b_c + \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c - \delta)] \right] = \\
&= 2 \left[ [1 - G_N^1(n, b_c + \delta)] - [G_N^2(n, b_c - \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c - \delta)] \right] \leq \\
&\leq 2[1 - G_N(n, b_c + \delta)]. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a parcela da Região (4) temos que

$$\begin{aligned}
&\int \int_{(4)} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
&\leq 2 \int_{b_c+\delta}^{\infty} \int_{b_c-\delta}^{b_c+\delta} d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) = 2 \int_{b_c+\delta}^{\infty} \left[ d\mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, y_2) - d\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, y_2) \right] = \\
&= 2 \left[ [\mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, \infty) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c + \delta)] - [\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, \infty) - \mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c + \delta)] \right] = \\
&= 2 \left[ [G_N^1(n, b_c + \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c + \delta)] - [G_N^1(n, b_c - \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c + \delta)] \right] \leq \\
&\leq 2 \left[ G_N^1(n, b_c + \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c + \delta) \right] = \\
&= 2 \left[ \mathbb{P}[X_{N,x_1}(n) \leq b_c + \delta] - \mathbb{P}[X_{N,x_1}(n) \leq b_c + \delta, X_{N,x_2}(n) \leq b_c + \delta] \right] = \\
&= 2 \left[ \mathbb{P}[X_{N,x_1}(n) \leq b_c + \delta, X_{N,x_2}(n) > b_c + \delta] \right] \leq 2 \left[ \mathbb{P}[X_{N,x_2}(n) > b_c + \delta] \right] = \\
&= 2 \left[ 1 - \mathbb{P}[X_{N,x_2}(n) \leq b_c + \delta] \right] = 2[1 - G_N(n, b_c + \delta)]. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos para a parcela da Região (5) temos que

$$\begin{aligned}
&\int \int_{(5)} |\Theta_{y_1}(b_1)\Theta_{y_2}(b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) \leq \\
&\leq \varepsilon \int_{b_c-\delta}^{b_c+\delta} \int_{b_c-\delta}^{b_c+\delta} d\mathbb{G}_N(n, y_1, y_2) = \varepsilon \int_{b_c-\delta}^{b_c+\delta} \left[ d\mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, y_2) - d\mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, y_2) \right] =
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \left[ \left[ \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c + \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c + \delta) \right] - \left[ \mathbb{G}_N(n, b_c + \delta, b_c - \delta) - \mathbb{G}_N(n, b_c - \delta, b_c - \delta) \right] \right] \leq \varepsilon.$$

Combinando essa última desigualdade com as Expressões (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42) temos que

$$|F_{N,x_1,x_2}(n, b_1, b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| \leq 4G_N(n, b_c - \delta) + 4[1 - G_N(n, b_c + \delta)] + \varepsilon.$$

Observe que, pelas hipóteses do Lema, temos

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} 4G_N(n, b_c - \delta) = 0 \quad \text{e} \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} 4[1 - G_N(n, b_c + \delta)] = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |F_{N,x_1,x_2}(n, b_1, b_2) - \Theta_{b_c}(b_1)\Theta_{b_c}(b_2)| < \varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, o Lema está provado.  $\square$

Agora, definimos uma sequência  $(\tau_{j,A}, \tau_{j,R})_{j \in \mathbb{N}}$  de tempos de parada, com respeito a filtração natural, como a seguir,

1.  $\tau_{0,A} = \tau_{0,R}$  e eles são iguais ao primeiro momento que todos os *limiares-barreira* estão acima de  $b$ .
2. Para qualquer  $j \in \mathbb{N}$ ,
  - (a)  $\tau_{j+1,A}$  é o final da primeira *b-avalanche* de *alcance*  $N$  depois de  $\tau_{j,R}$ .
  - (b)  $\tau_{j+1,R}$  é o primeiro momento depois do tempo  $\tau_{j+1,A}$  tal que todas as *aptidões* estão acima do *limiar*  $b''$ .

Para qualquer  $j \in \mathbb{N}$ , o intervalo de tempo  $I_j^N(b, b'') = [\tau_{j,R}, \tau_{j+1,R})$  é o  $j$ -ésimo período.

Podemos dividi-lo em,

1. *parte de avalanche* :  $I_{j,A}^N(b) = [\tau_{j,R}, \tau_{j+1,A})$ .
2. *parte de recuperação*:  $I_{j,R}^N(b, b'') = [\tau_{j+1,A}, \tau_{j+1,R})$ .

Veja a figura abaixo:

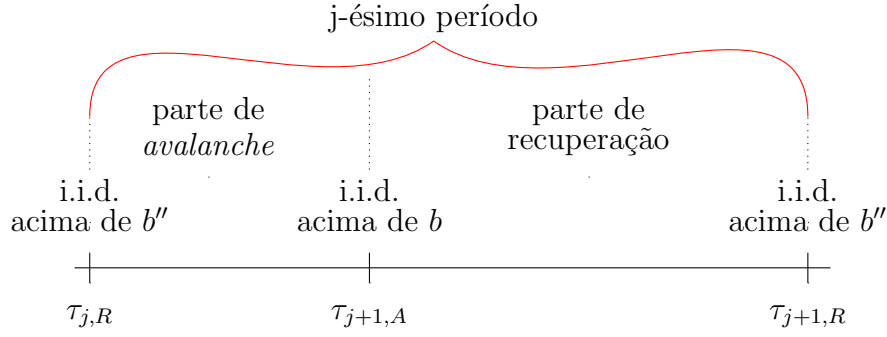


Figura 3.11: Divisão do  $j$ -ésimo período.

Observe que a *parte de recuperação* pode ser vazia, se no tempo  $\tau_{j+1,A}$  a *aptidão* minimal é maior do que  $b''$ . Deve estar claro então que,  $\{I_j^N(b, b'')\}_{j \in \mathbb{N}}$  é um Processo de Renovação Alternado, onde os estados são *parte de avalanche* (ativo) e *parte de recuperação* (inativo). Com isso podemos usar toda a teoria desenvolvida previamente para esses processos. Nosso interesse é no valor esperado do comprimento dessas duas partes.

A *duração* da *parte de avalanche*  $I_{0,A}^N(b)$  pode ser decomposta em duas partes: a *duração* da  $b$ -*avalanche* de *alcance*  $N$  e o tempo de espera até esta  $b$ -*avalanche*. Então, seja  $W_N$  o tempo de espera típico antes da  $b$ -*avalanche* de *alcance*  $N$  e seja  $A_N$  a *duração* desta  $b$ -*avalanche*. Deve ficar claro que  $W_N$  é a soma das *durações* das  $b$ -*avalanches* que antecedem a  $b$ -*avalanche* de *alcance*  $N$ .

Para sermos mais formais, seja  $Y_N$  o número de  $b$ -*avalanches* que precedem a  $b$ -*avalanche* de *alcance*  $N$  e seja  $(Z_i^N)_{i \in \mathbb{N}}$  uma sequência i.i.d. de variáveis aleatórias distribuídas como a *duração* de uma típica  $b$ -*avalanche*, condicionado em seu *alcance* ser menor do que  $N$ . Então podemos usar  $Y_N$  destas *avalanches* para obter  $W_N$ , isso é,

$$W_N := Z_1^N + \cdots + Z_{Y_N}^N.$$

Cada *avalanche* tem *alcance*  $N$  com probabilidade  $P_N(b)$ , independentemente de todas as outras *avalanches*. Logo, a probabilidade de uma *avalanche* ter *alcance* menor que  $N$  é  $1 - P_N(b) =: P_N^c(b)$  (pois não tem como o *alcance* ser maior que  $N$ ). Sabemos que, a primeira *avalanche* depois das  $Y_N$  *avalanches* tem *alcance*  $N$ . Então  $Y_N + 1$  tem uma

distribuição geométrica com parâmetro  $P_N(b)$  e temos

$$\mathbb{E}[Y_N + 1] = \frac{1}{P_N(b)} \Rightarrow \mathbb{E}[Y_N] + \mathbb{E}[1] = \frac{1}{P_N(b)} \Rightarrow \mathbb{E}[Y_N] = \frac{1}{P_N(b)} - 1.$$

Em palavras, no início de uma nova *avalanche*, primeiro decidimos se a *avalanche* tem *alcance*  $N$  ou não. Se não, escolhemos uma, condicionada em seu *alcance* ser menor que  $N$  e a *duração* resultante é a próxima  $Z_i^N$ . Como, devido à construção,  $Y_N$  é independente da sequência  $(Z_i^N)_{i \in \mathbb{N}}$ , temos que

$$\mathbb{E}(W_N) = \mathbb{E}(Z_1^N + \dots + Z_{Y_N}^N) = \mathbb{E}(Y_N)\mathbb{E}(Z_1^N) = \left(\frac{1}{P_N(b)} - 1\right)\mathbb{E}(Z_1^N),$$

ou seja,

$$\mathbb{E}(W_N) = \left(\frac{1}{P_N(b)} - 1\right)\mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) < N\right) = \frac{P_N^c(b)}{P_N(b)}\mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) < N\right).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|I_{0,A}^N(b)|\right) &= \mathbb{E}(W_N) + \mathbb{E}(A_N) = \frac{P_N^c(b)}{P_N(b)}\mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) < N\right) + \mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) = N\right) \\ &= \frac{P_N^c(b)\mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) < N\right) + P_N(b)\mathbb{E}\left(\eta_N(b) \mid \xi_N(b) = N\right)}{P_N(b)} = \frac{D_N(b)}{P_N(b)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Agora, para calcular o valor esperado da *parte de recuperação*, a nossa estratégia será parecida com a utilizada na demonstração do Lema 3.25. Então com o auxílio da representação gráfica  $GR_N$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|I_{0,R}^N(b, b'')|\right) &= \mathbb{E}\left(\eta_N^{(\Lambda(N), b)}(b'' - b')\right) \geq \mathbb{E}\left(\eta_N^{(\Lambda(N), b')}(b'' - b')\right) \\ &\geq (b'' - b' + o(b'' - b'))\mathbb{E}\left(\xi_N^{(\Lambda(N), b')}(b'' - b')\right)D(b') = (b'' - b' + o(b'' - b'))ND(b'). \end{aligned} \quad (3.44)$$

**Lema 3.34.** *Suponha que para qualquer  $0 < b < b' < \infty$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{D_N(b')P_N(b)}{D_N(b)} = \infty. \quad (3.45)$$

*Então para qualquer  $b'' > b'$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b'') = 1.$$

*Demonstração.* Seja  $0 < b < b' < \infty$  fixo e satisfazendo a Condição (3.45). Fixe um  $b'' > b'$  arbitrário. Para qualquer  $N \geq 3$  considere um *BS-processo* em  $\Lambda(N)$ , tal que no tempo inicial todas as *aptidões* são i.i.d. e exponencialmente distribuídas.

Para qualquer tempo  $n$ , seja  $j(n)$  o número do período contendo  $n$ , i.e. por definição  $n \in I_{j(n)}^N(b, b'')$ . Suponha que o tempo  $n$  esta na *parte de recuperação* deste período, i.e.  $n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')$ . Observe que, durante a *b-avalanche* de *alcance*  $N$  ao final de  $I_{j(n),A}^N(b)$  todo *limiar-barreira* terá sido atualizado para um novo valor abaixo de  $b$  (ver Observação 3.32). Então, no tempo  $\tau_{j(n)+1,A} - 1$ , o fim desta *b-avalanche*, todos os *limiares-barreira* estão abaixo de  $b < b''$ , e no intervalo de tempo  $[\tau_{j(n)+1,A}, n]$ , serão atribuídos aos *limiares-barreira* somente valores abaixo de  $b''$ . Logo, podemos afirmar que no tempo  $n$ , todos os *limiares-barreira* estão abaixo de  $b''$ . Assim sendo, temos

$$G_N(n, b'') = \mathbb{P}(Y_{N,0}(n) < b'') \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{x \in \Lambda(N)} \{Y_{N,x}(n) < b''\}\right) \geq \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right).$$

Então para provar o Lema é suficiente mostrar que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) = 1. \quad (3.46)$$

Está claro que em todo  $\tau_{j,R}$  as *aptidões* são i.i.d. e exponencialmente distribuídas acima do *limiar*  $b''$ , e em todo  $\tau_{j+1,A}$  as *aptidões* são i.i.d. e exponencialmente distribuídas acima do *limiar*  $b$ . Então a sequência de tamanhos  $(|I_{j,A}^N(b)|)_{j \in \mathbb{N}}$  e  $(|I_{j,R}^N(b, b'')|)_{j \in \mathbb{N}}$  são independentes, e cada uma consiste de variáveis aleatórias i.i.d.. Como  $|I_{j,A}^N(b)|$  e  $|I_{j,R}^N(b, b'')|$  tem distribuições não-aritméticas, pelo Teorema 2.27, no regime estacionário com  $N$  vértices temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) = \frac{\mathbb{E}(|I_{0,R}^N(b, b'')|)}{\mathbb{E}(|I_{0,A}^N(b)|) + \mathbb{E}(|I_{0,R}^N(b, b'')|)} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{E}(|I_{0,A}^N(b)|)}{\mathbb{E}(|I_{0,R}^N(b, b'')|)}}.$$

Substituindo pelas Equações (3.43) e (3.44) temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) \geq \frac{1}{1 + \frac{D_N(b)}{(b'' - b' + o(b'' - b'))ND(b')P_N(b)}}.$$

Agora, basta tomar o limite quando  $N \rightarrow \infty$  em ambos os lados e notar que, pela hipótese do Lema,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D_N(b)}{ND(b')P_N(b)} = 0$ . Temos então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{(b'' - b' + o(b'' - b'))} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{D_N(b)}{ND(b')P_N(b)}} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$



Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(n \in I_{j(n),R}^N(b, b'')\right) = 1.$$

Então, acabamos de mostrar que a Expressão (3.46) é satisfeita. Consequentemente o Lema esta provado.  $\square$

Se  $b' > b > b_c^p$  então  $D_N(b') \geq D_N(b)$  e  $P_N(b) \geq P_\infty(b) > 0$ , uniformemente em  $N \geq 3$ . Temos então o seguinte o corolário do Lema 3.34.

**Corolário 3.35.** *Para qualquer  $b'' > b_c^p$  temos*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b'') = 1.$$

**Lema 3.36.** *Para qualquer  $b < b_c^d$  temos*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b) = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $P_N(b, k)$  a probabilidade que a  $b$ -avalanche tem *alcance*  $k$  e  $P_N^c(b, k)$  a probabilidade que a  $b$ -avalanche não tem *alcance*  $k$ . Seja  $D_N(b|k)$  a duração média da  $b$ -avalanche, dado que a avalanche tem *alcance*  $k$  e  $D_N^c(b|k)$  a duração média da  $b$ -avalanche, dado que a avalanche não tem *alcance*  $k$ . Decomponha o BS-processo em uma sequência de  $b$ -avalanches. Considere um Processo de Renovação Alternado com o estado ativo sendo “estar em uma  $b$ -avalanche de *alcance*  $k$ ” e o estado inativo caso contrário. Então a média de tempo gasta nesses dois estados é

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\eta_N(b), \xi_N(b) = k\right) &= D_N(b|k)P_N(b, k) \quad (\text{ativo}), \\ \mathbb{E}\left(\eta_N(b), \xi_N(b) \neq k\right) &= D_N^c(b|k)P_N^c(b, k) \quad (\text{inativo}). \end{aligned}$$

Como as  $b$ -avalanches tem *alcance* i.i.d. e *duração* i.i.d., pelo Teorema 2.27, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_N(b, k) = \frac{D_N(b|k)P_N(b, k)}{D_N(b|k)P_N(b, k) + D_N^c(b|k)P_N^c(b, k)} = \frac{D_N(b|k)P_N(b, k)}{D_N(b)}. \quad (3.47)$$

Para qualquer  $k \geq 3$ , dado que estamos na  $b$ -avalanche de *alcance*  $k$ , temos no máximo  $k$  *limiares-barreira* abaixo de  $b$ . Então para qualquer  $N \geq 3$  e  $k \geq 3$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{N,0}(n, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{N,0}(n) \leq b) \leq \frac{\sum_{k=3}^N \frac{k}{N} D_N(b|k)P_N(b, k)}{D_N(b)}. \quad (3.48)$$

Segue da Proposição 3.19 que os valores de  $D_N(b|k)$  e  $P_N(b, k)$  são independentes de  $N$ , para  $k < N$ . Logo,

$$D_N(b) = D_N(b|N)P_N(b, N) + \sum_{k=3}^{N-1} D(b|k)P(b, k).$$

Como, pelo Teorema 3.21, temos que para qualquer  $b < b_c^d$ ,  $D_\infty < \infty$ , então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(b) = \mathbb{E}(\eta(b)) = \sum_{k=3}^{\infty} D(b|k)P(b, k) < \infty.$$

Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $K(\varepsilon) \geq 3$  tal que para qualquer  $N > K(\varepsilon)$ ,

$$\sum_{k=K(\varepsilon)+1}^N D_N(b|k)P_N(b, k) \leq \sum_{k=K(\varepsilon)+1}^{N-1} D(b|k)P(b, k) + D_N(b|N)P_N(b, N) < \varepsilon.$$

Então o lado direito da Expressão (3.48), para  $N > K(\varepsilon)/\varepsilon$ , é pelo menos

$$\frac{\sum_{k=3}^{K(\varepsilon)} \frac{K(\varepsilon)}{N} D_N(b|k)P_N(b, k) + \sum_{k=K(\varepsilon)+1}^N D_N(b|k)P_N(b, k)}{\sum_{k=3}^N D_N(b|k)P_N(b, k)} \leq \frac{\frac{K(\varepsilon)}{N} D_N(b|k) + \varepsilon}{D_N(b)} \leq 2\varepsilon, \quad (3.49)$$

ou seja,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} G_{N,0}(n, b) \leq 2\varepsilon.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário o Lema está provado.  $\square$

Com auxílio desses dois Lemas e com a teoria desenvolvida para os *limiares-barreira* anteriormente somos capazes de demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 3.37.** *Se  $b_c^d = b_c^r = b_c^p = b_c$ , então a distribuição limite do BS-processo é o produto de distribuições exponenciais acima de  $b_c$ .*

*Demonstração.* Suponha  $b_c^d = b_c^r = b_c^p = \mathbf{b}_c$ . Então, pelo Corolário 3.35, para qualquer  $b' > b_c$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b') = 1$$

e, pelo Lema 3.36, para qualquer  $b'' < b_c$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} G_N(n, b'') = 0.$$

Então, pelo Lema 3.33, a distribuição limite no *BS-processo* existe e é igual ao produto de distribuições exponencial acima de  $b_c$ .  $\square$

Note que a condição do Lema 3.34 é mais fraca do que a da condição do Corolário 3.35, e ter a declaração do Teorema 3.37 seria suficiente para provar que para qualquer  $b' > b > b_c^r$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{P_N(b) D_N(b')}{D_N(b)} = \infty.$$

Em palavras, o Teorema acima nos diz que, se os três *limiares críticos* coincidirem a Conjectura 1.2 estará provada. Recordamos que, por hora, foi provado apenas que dois deles são iguais (Teorema 3.28).

Agora que estamos equipados com o Teorema 3.37 somos capazes de dar uma cota para o *limiar crítico*  $b_c$ . Mas antes de podermos determinar essa cota, serão necessárias algumas definições e um Lema.

Para qualquer  $b \geq 0$ , seja  $\ell(b)$  o vértice mais a esquerda de  $\xi(b)$ , i.e.

$$\ell(b) := \min\{k \in \mathbb{Z} : k \in \xi(b)\}.$$

Seja  $L_\infty(b)$  o valor esperado de  $\ell(b)$ . Observe que  $L_\infty(b)$  é decrescente em  $b$ , e se torna  $-\infty$  no mesmo ponto que a função  $R_\infty(b)$ .

**Lema 3.38.** *Se  $R_\infty(b) < \infty$ , então*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{L_\infty(b + \varepsilon) - L_\infty(b)}{\varepsilon} \leq \frac{-1}{2} L_\infty^2(b) + \frac{1}{2} L_\infty(b).$$

*Demonstração.* Fixe qualquer  $b > 0$ , tal que  $R_\infty(b) < \infty$ . Como  $L_\infty(\cdot)$  e  $R_\infty(\cdot)$  tem o mesmo *limiar crítico*, imediatamente temos  $L_\infty(b) > -\infty$ . Considere o *conjunto-alcance* como uma função do *limiar*  $b' \geq b$  em  $GR$ . Fixe  $\varepsilon > 0$ . Vamos estimar o valor esperado do seguinte decremento

$$\Delta(b, \varepsilon) := \ell(b + \varepsilon) - \ell(b).$$

Seja  $(x(b), \tau(b))$  a posição e o momento da primeira chegada na superposição dos Processos de Poisson

$$\bigcup_{x \in [\ell(b), 0]} \Pi_x,$$

de  $GR$  depois do tempo (*limiar*)  $b$ . Segue da definição de  $x(b)$  e  $\tau(b)$  que

$$\mathbb{P}(\tau(b) < b + \varepsilon \mid \ell(b) = l) = -(l + 1)(\varepsilon + o(\varepsilon)), \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\mathbb{P}\left(x(b) = x \mid \ell(b) = l\right) = \frac{1}{-l + 1}, \quad x \in [l, 0]. \quad (3.50)$$

Além disso,  $x(b)$  e  $\tau(b)$  são condicionalmente independentes dado  $\ell(b)$ . Na representação gráfica  $GR$ , no momento  $\tau(b)$  temos a *subavalanche*  $(\hat{\xi}(\tau(b)), \hat{\eta}(\tau(b)))$ . Se  $\tau(b) < b + \varepsilon$  temos

$$\Delta(b, \varepsilon) \leq \min\left(m(b) + x(b, \ell(b))\right) - \ell(b), \quad (3.51)$$

onde  $m(b)$  é o ponto mais a esquerda de  $\hat{\xi}(\tau(b))$ , i.e.

$$m(b) = \min\{k : k \in \hat{\xi}(\tau(b))\}.$$

Observe que, a distribuição condicional de  $m(b)$  dado  $\ell(b)$  depende de  $\ell(b)$ , mas somente através do valor de  $\tau(b)$ . Como qualquer  $b$ -avalanche “contém” uma  $\tau(b)$ -avalanche (pois  $\tau(b) < b + \varepsilon$ ), podemos acoplar  $m(b)$  com  $\hat{\ell}(b)$ , a variável aleatória independente de  $\tau(b)$  e  $\ell(b)$ , e distribuída como o ponto mais a esquerda de uma  $b$ -avalanche com origem em 0, e assim sendo  $\mathbb{E}(\hat{\ell}(b)) = L_\infty(b)$ . Então

$$\min\left(m(b) + x(b, \ell(b))\right) - \ell(b) \leq \min\left(\hat{\ell}(b) + x(b, \ell(b))\right) - \ell(b). \quad (3.52)$$

As variáveis aleatórias  $\hat{\ell}(b)$  e  $\ell(b)$  tem esperança finita, mas não temos informação sobre os segundos momentos. Para lidar com isso, usamos os truncamentos

$$\begin{aligned} a_M(b) &= \max(\ell(b), -M), \\ \hat{a}_M(b) &= \max(\hat{\ell}(b), -M), \quad M \geq 1. \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} a_M(b) &= \ell(b), \\ \text{e } \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{a}_M(b) &= \hat{\ell}(b), \end{aligned}$$

temos, pelo Lema de Fatou, que

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}(a_M(b)) &= \mathbb{E}(\ell(b)) = L_\infty(b), \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{a}_M(b)) &= \mathbb{E}(\hat{\ell}(b)) = L_\infty(b). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Temos

$$\min\left(\hat{\ell}(b) + x(b, \ell(b))\right) - \ell(b) \leq \left(\min(\hat{a}_M(b) + x(b, \ell(b)))\right) \mathbb{1}\left\{x(b) \leq \ell(b) - a_M(b)\right\} =$$

$$= \sum_{x=\ell(b)}^{\ell(b)-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (\hat{a}_M(b) + x - \ell(b)) \mathbb{1}\{x(b) = x\} = \sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b)) \mathbb{1}\{x(b) = \ell(b) + j\}.$$

Combinando a estimativa acima com a Expressão (3.51) e tomando a esperança em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta(b, \varepsilon)) &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\{\tau(b) < b + \varepsilon\} \sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b)) \mathbb{1}\{x(b) = \ell(b) + j\}\right) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{-1} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\{\tau(b) < b + \varepsilon\} \sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b)) \mathbb{1}\{x(b) = \ell(b) + j\} | \ell(b) = l\right) \mathbb{P}(\ell(b) = l). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como  $\tau(b)$  e  $x(b)$  são condicionalmente independentes dado  $\ell(b)$ , e portanto  $\hat{a}_M(b)$  e  $\ell(b)$  são independente, o lado direito da equação anterior é igual a

$$\sum_{l=-\infty}^{-1} \mathbb{P}(\tau(b) < b + \varepsilon | \ell(b) = l) \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b)) | \ell(b) = l\right) \mathbb{P}(x(b) = \ell(b) + j | \ell(b) = l) \mathbb{P}(\ell(b) = l).$$

Depois substituindo a Expressão (3.50) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{l=-\infty}^{-1} \mathbb{E}\left((\varepsilon + o(\varepsilon)) \sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b)) | \ell(b) = l\right) \mathbb{P}(\ell(b) = l) = \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{-\max(a_M(b), \hat{a}_M(b))} (j + \hat{a}_M(b))\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) = \\ &= \mathbb{E}\left(-\frac{\hat{a}_M(b)(\hat{a}_M(b) - 1)}{2} \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) > a_M(b)\}\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) + \\ &+ \mathbb{E}\left(\left(- (a_M(b) - 1)\hat{a}_M(b) + \frac{a_M(b)(a_M(b) - 1)}{2}\right) \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) \leq a_M(b)\}\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) = \\ &= \mathbb{E}\left(-\frac{\hat{a}_M(b)(\hat{a}_M(b) - 1)}{2} + (a_M(b) - 1)\hat{a}_M(b) - \frac{a_M(b)(a_M(b) - 1)}{2} \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) > a_M(b)\}\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) + \\ &+ \mathbb{E}\left(\left(- (a_M(b) - 1)\hat{a}_M(b) + \frac{a_M(b)(a_M(b) - 1)}{2}\right)\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) \leq \\ &\leq \mathbb{E}\left(-\frac{(\hat{a}_M(b) - a_M(b))^2}{2} - \frac{\hat{a}_M(b) - a_M(b)}{2} \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) > a_M(b)\}\right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) + \end{aligned}$$

$$+ \left( -\mathbb{E}(a_M(b))\mathbb{E}(\hat{a}_M(b)) + \mathbb{E}(\hat{a}_M(b)) + \frac{(\mathbb{E}(a_M(b)))^2}{2} - \frac{\mathbb{E}(a_M(b))}{2} \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Como,  $a_M(b)$  e  $\hat{a}_M(b)$  são i.i.d., a diferença  $a_M(b) - \hat{a}_M(b)$  tem uma distribuição simétrica.

Logo,

$$\mathbb{E}\left((a_M(b) - \hat{a}_M(b))^2 \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) < a_M(b)\}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(a_M(b) - \hat{a}_M(b)\right)^2.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left(-\frac{(\hat{a}_M(b) - a_M(b))^2}{2} - \frac{\hat{a}_M(b) - a_M(b)}{2}\right) \mathbb{1}\{\hat{a}_M(b) > a_M(b)\} (\varepsilon + o(\varepsilon)) + \\ & + \left( -\mathbb{E}(a_M(b))\mathbb{E}(\hat{a}_M(b)) + \mathbb{E}(\hat{a}_M(b)) + \frac{(\mathbb{E}(a_M(b)))^2}{2} - \frac{\mathbb{E}(a_M(b))}{2} \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) = \\ & = \left( -\mathbb{E}\frac{(a_M(b) - \hat{a}_M(b))^2}{4} - (\mathbb{E}a_M(b))^2 + \mathbb{E}\frac{a_M(b)}{2} + \mathbb{E}\frac{(a_M(b))^2}{2} \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)) = \\ & = \left( -\frac{(\mathbb{E}a_M(b))^2}{2} + \frac{\mathbb{E}a_M(b)}{2} \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Substituindo a estimativa acima na Expressão (3.54) resulta em

$$\mathbb{E}\left(\Delta(b, \varepsilon)\right) \leq \left( \frac{-(\mathbb{E}a_M(b))^2}{2} + \frac{\mathbb{E}a_M(b)}{2} \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)).$$

Pela Expressão (3.53) temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\Delta(b, \varepsilon)\right) &= \mathbb{E}\left(\ell(b + \varepsilon) - \ell(b)\right) = \mathbb{E}\left(\ell(b + \varepsilon)\right) - \mathbb{E}\left(\ell(b)\right) = \\ &= L_\infty(b + \varepsilon) - L_\infty(b) \leq \left( -\frac{1}{2}L_\infty^2(b + \varepsilon) + \frac{1}{2}L_\infty(b) \right) (\varepsilon + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Basta tomarmos o limite superior quando  $\varepsilon \rightarrow 0$  na equação anterior.  $\square$

Agora somos capazes de dar uma cota para o *limiar* crítico  $b_c^r$ .

**Teorema 3.39.** *Com as hipóteses do Teorema 3.37 temos que*

$$b_c^r \leq 2 \log 2.$$

*Demonstração.* Por definição temos,  $\ell(0) = -1$  e então  $L_\infty(0) = -1$ . Portanto, pelo Lema 3.38,  $L_\infty(b)$  decai pelo menos tão rápida como a solução de

$$\begin{cases} y'(b) = -\frac{y^2(b)}{2} + \frac{y(b)}{2} \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

A equação diferencial acima pode ser resolvida analiticamente,

$$\frac{2y'(b)}{y(b) - y^2(b)} = 1.$$

Integrando ambos os lados temos

$$2\left(\log(y(b)) - \log(y(b) - 1)\right) = b + C \Rightarrow \frac{y(b)}{y(b) - 1} = e^{b/2}K \Rightarrow y(b) = \frac{1}{1 - e^{-b/2}K^{-1}}.$$

Resolvendo o *Problema de Valor Inicial*

$$-1 = y(0) = \frac{1}{1 - e^{-0/2}K^{-1}} \Rightarrow K = \frac{1}{2}.$$

Temos então que

$$y(b) = \frac{1}{1 - 2e^{-b/2}}.$$

Note que, esta função não está definida em  $b = 2\log 2$ . Portanto temos  $b_c^r < 2\log 2$ .  $\square$

O artigo *Critical Thresholds and the Limit Distribution in the Bak-Sneppen Model* [23], sem dúvidas avança bastante para comprovar a Conjectura 1.2 sobre o modelo *Bak-Sneppen*. A estratégia de estudar o *BS-processo* como uma sequência de *b-avalanches* permitiu obter uma série de resultados sobre ao comportamento do modelo. E estes resultados serão importantíssimos para confirmar a conjectura. O método de observar as *subavalanches* como um subgrafo da representação gráfica auto-similar também merece destaque. Sem ele seria difícil demonstrar a maioria dos resultados que foram obtidos no artigo.

Com tudo que já apresentamos até aqui, podemos ver que, apesar de ser um modelo de construção simples, o Bak-Sneppen é matematicamente difícil. Foram necessárias uma série de estratégias e conceitos para atingir um resultado significativo. E, apesar de todo o esforço empregado, ainda não foi possível concluir a veracidade de sua conjectura.

# Apêndice



# Apêndice A

## Processos de Renovação

O objetivo desse Apêndice é demonstrar alguns resultados discutidos na Seção 2.2.2. As demonstrações aqui apresentadas podem ser encontradas em [25] e [11].

Seja  $U(t)$  a função de renovação, observe que

$$\begin{aligned} U(t-b, t] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[t-b < S_n \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbb{P}[S_n \leq t] - \mathbb{P}[S_n < t-b] \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t] - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t-b] = U(t) - U(t-b). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

*Demonstração. Teorema 2.21:*

(1) Primeiro vamos verificar que  $U * z$  é localmente limitada. Para qualquer  $T > 0$  temos

$$\sup_{0 \leq t \leq T} U * z(t) = \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t z(t-u)U(du) \leq \left( \sup_{0 \leq t \leq T} z(s) \right) U(T) < \infty.$$

Para comprovar que  $U * z$  é uma solução, observe que

$$F * (U * z) = (F * U) * z \stackrel{(\text{A.3})}{=} (U - F^{0*}) * z = U * z - z.$$

Então

$$U * z = z + F * (U * z)$$

e portanto  $U * z$  é uma solução de (2.8).

(2) Seja  $Z_1, Z_2$  duas soluções localmente limitadas de (2.8) em  $(-\infty, 0)$  tal que

$$\begin{aligned} Z_1 &= z + F * Z_1 \\ Z_2 &= z + F * Z_2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Seja  $H = Z_1 - Z_2$ , e portanto  $H$  também é localmente limitada. Além disso, se subtrairmos as duas equações em (A.2) teremos

$$H = Z_1 - Z_2 = F * (Z_1 - Z_2) = F * H.$$

Iterando, para qualquer  $n \geq 1$ ,

$$H = F^{n*} * H.$$

Assim, para qualquer  $T > 0$ , e pelas Propriedades de convolução, quando  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |H(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (Z_1(t-y) - Z_2(t-y)) F^{n*}(dy) \right| \leq \left( \sup_{0 \leq t \leq T} H(t) \right) F^{n*}(T) \rightarrow 0.$$

Como  $H$  é localmente limitada e  $U(T) < \infty$  implicam que  $F^{n*}(T) \rightarrow 0$ . Portanto,  $H \equiv 0$  e  $Z_1 = Z_2$ .  $\square$

Considere a função de renovação  $U(t)$ , temos que

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t) = F^{0*}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) = \\ &= F^{0*}(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n-1)*}(t) = F^{0*}(t) + F * U(t) \Rightarrow F * U = U - F^{0*}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e temos uma equação de renovação como em (2.8) com  $Z = U$ ,  $z = F^{0*}$ .

O primeiro passo para computar as distribuições de  $A(t)$  e  $B(t)$  é escrever suas respectivas equações de renovação. Começaremos com  $A(t)$  assumindo que o processo é puro. Fixe um  $x > 0$ , então

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = \mathbb{P}[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] + \mathbb{P}[A(t) \leq x, Y_1 > t].$$

No evento  $\{Y_1 > t\}$  temos que  $A(t) = t$ , então

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x, Y_1 > t] = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t). \quad (\text{A.4})$$

Para o evento  $\{Y_1 \leq t\}$  temos

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x, Y_1 \leq t] = \mathbb{P}[t - S_{N(t)-1} \leq x, N(t) \geq 2] = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}[t - S_{N(t)-1} \leq x, S_{n-1} \leq t < S_n].$$

Condicionando em  $Y_1$  temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}[t - S_{N(t)-1} \leq x, S_{n-1} \leq t < S_n] = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}\left[t - \left(y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i\right) \leq x, y + \sum_{i=2}^{n-1} Y_i \leq t < y + \sum_{i=2}^n Y_i\right] F(dy) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}\left[t - y - S_{n-2} \leq x, S_{n-2} \leq t - y < S_{n-1}\right] F(dy) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}\left[t - y - S_{N(t-y)-1} \leq x, N(t-y) = n - 1\right] F(dy) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \mathbb{P}\left[A(t-y) \leq x, N(t-y) = n\right] F(dy) = \int_0^t \mathbb{P}[A(t-y) \leq x] F(dy). \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Combinando as Equações (A.4) e (A.5) temos que

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t) + \int_0^t \mathbb{P}[A(t-y) \leq x] F(dy) \quad (\text{A.6})$$

que está na forma da Expressão (2.8) com  $z(t) = (1 - F(t)) \mathbb{1}_{[0,x]}(t)$  e  $Z(t) = \mathbb{P}[A(t) \leq x]$ .

Para  $B(t)$ , continuamos a supor que  $Y_0 = 0$  e  $x > 0$  fixo. Temos

$$\mathbb{P}[B(t) > x] = \mathbb{P}[B(t) > x, Y_1 \leq t] + \mathbb{P}[B(t) > x, Y_1 > t]$$

No evento  $\{Y_1 > t\}$ , se  $B(t) > x$  então  $Y_1 > t + x$ . No evento  $\{Y_1 \leq t\}$ ,  $B(t)$  começa de novo em  $Y_1$ , então

$$\mathbb{P}[B(t) > x] = \int_0^t \mathbb{P}[B(t-y) > x] F(dy) + (1 - F(t+x)) \quad (\text{A.7})$$

que está na forma da Expressão (2.8) com  $z(t) = (1 - F(t+x))$  e  $Z(t) = \mathbb{P}[B(t) > x]$ .

Usando o Teorema 2.21 podemos resolver essas equações de renovação para os tempos de recorrência. Resolvendo a equação de renovação de  $A(t)$ , dada na Expressão (A.6), temos que

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = U * ((1 - F) \cdot \mathbb{1}_{[0,x]})(t).$$

Para a equação de renovação de  $B(t)$ , dada na Expressão (A.7), temos que

$$\mathbb{P}[B(t) > x] = U * (1 - F(\cdot + x))(t).$$

Agora, seja  $G_t(x) := \mathbb{P}[B(t) \leq x]$ , teremos que

$$\begin{aligned}
V(t, t+b) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[t < S_n \leq t+b] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n - t \leq b] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_{N(t)} - t + Y_{N(t)+1} + \dots + Y_n \leq b] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[B(t) + Y_{N(t)+1} + \dots + Y_n \leq b] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} G_t * F^{(n-[N(t)+1])^*}(b) = G_t * \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n-[N(t)+1])^*}(b) = G_t * U(b). \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

**Lema A.1.** *Se  $F(b) < 1$  então*

$$U(t-b, t] \leq (1 - F(b))^{-1}$$

para todo  $t \geq b$ , e, portanto, para  $t \geq b$ ,

$$\sup_{t \geq 0} U(t, t+b] \leq (1 - F(b))^{-1} = c(b) < \infty.$$

*Demonstração.* Temos a equação de renovação, dada na Expressão (A.3),

$$U = F^{0*} + F * U \quad \Rightarrow \quad U - F * U = F^{0*} \quad \Rightarrow \quad F^{0*} = U * [F^{0*} - F].$$

Portanto

$$1 = \int_0^t (1 - F(t-s))U(ds) \geq \int_{t-b}^t (1 - F(t-s))U(ds).$$

Note que  $\inf_{t-b \leq s \leq t} [1 - F(t-s)] = [1 - F(b)]$ . Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{t-b}^t (1 - F(t-s))U(ds) \geq \\
&\geq (1 - F(b)) \int_{t-b}^t U(ds) = (1 - F(b)) (U(t) - U(t-b)) \stackrel{(A.1)}{=} (1 - F(b)) U(t-b, t].
\end{aligned}$$

□

*Demonstração. Teorema 2.22:*

Começaremos demonstrando a equivalência entre **(iii)** e **(iv)**. Temos

$$\mathbb{P}[B(t) \leq x] = \mathbb{P}[S_{N(t)} - t \leq x] = \mathbb{P}[S_{N(t)} \leq t + x].$$

Note que, o evento  $\{S_{N(t)} \leq t + x\}$  é equivalente a dizer que, no intervalo de tempo  $(t, t + x]$  ocorre pelo menos uma chegada do processo, ou seja,  $\{N(t, t + x] \geq 1\}$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_{N(t)} \leq t + x] &= \mathbb{P}[N(t, t + x] \geq 1] = \\ &= \mathbb{P}[t - S_{N(t+x)-1} \leq 0] = \mathbb{P}[t + x - S_{N(t+x)-1} \leq x] = \mathbb{P}[A(t + x) < x]. \end{aligned}$$

(ii) → (iv): Relembre que no caso puro

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = U * ((1 - F(\cdot))\mathbb{1}_{[0,x]}(\cdot))(t) =: Z(t) = U * z(t),$$

onde  $z(t) = (1 - F(t))\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$ . Como  $z$  tem suporte compacto, pela Observação 2.15  $z$  é dRi e portanto o *Teorema Chave da Renovação* afirma que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) &= \mu^{-1} \int_0^\infty z(s) ds = \\ &= \mu^{-1} \int_0^\infty (1 - F(s))\mathbb{1}_{[0,x]}(s) ds = \mu^{-1} \int_0^x (1 - F(s)) ds = F_0(x). \end{aligned}$$

Se o processo é *atrasado* com distribuição de atraso  $G$ , então

$$\mathbb{P}[A(t) \leq x] = \mathbb{P}[A(t) \leq x, S_0 > t] + \int_0^t Z(t - y)G(dy).$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A(t) \leq x, S_0 > t] \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_0 > t] = 0.$$

Seja  $f_t(y) := Z(t - y)\mathbb{1}_{[0,t]}(y)$ . Como  $Z(t)$  é uma probabilidade, temos  $f_t(y) \leq 1$  para todo  $t > 0, y > 0$ , e assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = F_0(x) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(y) = F_0(x) \quad \forall y > 0.$$

Segue da convergência dominada que

$$\int_0^t Z(t - y)G(dy) = \int_0^t f_t(y)G(dy) \rightarrow \int_0^\infty F_0(x)G(dy) = F_0(x).$$

(iii) → (i): Pela Equação (A.8)

$$V(t, t + b] = G_t * U(b) = \int_0^b G_t(b - s)U(ds), \quad \text{onde } G_t = \mathbb{P}[B(t) \leq x].$$

Em  $[0, b]$ ,  $U$  é uma medida finita. Por (iii), para cada  $x > 0$ , temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B(t) \leq x] = \lim_{t \rightarrow \infty} G_t(x) = F_0(x).$$

Como  $G_t(b-s) \leq 1$  e para cada  $s$  temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_t(b-s) = F_0(b-s).$$

Segue da convergência dominada que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, t+b) = \int_0^b F_0(b-s)U(ds) = F_0 * U(b) = \mu^{-1}b.$$

(i)  $\rightarrow$  (ii): Dividiremos essa parte em 3 passos complementares.

Passo 1: Seja  $z(t) = \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t)$ , ou seja,

$$z(t-s) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } t-nh < s \leq t-(n-1)h \\ 0 & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

$$U * z(t) = \int_0^t z(t-s)U(ds) = \int_{t-nh}^{t-(n-1)h} U(ds) = U(t-nh, t-(n-1)h]$$

pelo Teorema de Blackwell temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} U * z(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} U(t-nh, t-(n-1)h] = \\ &= \mu^{-1}(t-(n-1)h - (t-nh)) = \mu^{-1}h = \mu^{-1} \int_{t-nh}^{t-(n-1)h} ds = \mu^{-1} \int_0^\infty z(s)ds. \end{aligned}$$

Passo 2: Seja  $z(t) = \sum_{n=1}^\infty c_n \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t)$  onde  $c_n \geq 0$ ,  $\sum c_n < \infty$  e  $h$  é fixado de modo que  $F(h) < 1$ . Então:

$$\begin{aligned} U * z(t) &= \int_0^t z(t-s)U(ds) = \int_0^t \sum_{n=1}^\infty c_n \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t)U(ds) = \\ &= \sum_{n=1}^\infty c_n \int_{t-nh}^{t-(n-1)h} U(ds) = \sum_{n=1}^\infty c_n \left( U(t-nh, t-(n-1)h] \right). \end{aligned}$$

Pelo passo 1, para cada  $n$ , temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t-nh, t-(n-1)h] = \mu^{-1}h,$$

e, como  $F(h) < 1$ , pelo Lema A.1

$$\sup_{t,n} U(t - nh, t - (n-1)h] \leq c(h) < \infty.$$

Portanto, pela convergência dominada

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U * z(t) = \sum c_n \mu^{-1} h = \mu^{-1} \int_0^\infty z(s) ds.$$

Passo 3: Seja  $z$  dRi, e defina

$$\bar{z}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(h) \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t) \quad , \quad \underline{z}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h) \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t)$$

onde

$$\bar{m}_n(h) = \bigvee_{(n-1)h \leq s < nh} z(s) \quad , \quad \underline{m}_n(h) = \bigwedge_{(n-1)h \leq s < nh} z(s).$$

Então  $\bar{z}(t)$  e  $\underline{z}(t)$  são funções do tipo considerado no passo 2, pois pela definição de dRi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(h) < \infty.$$

Portanto, pelo passo 2,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U * \bar{z}(t) = \mu^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{m}_n(h) h =: \frac{\bar{\sigma}(h)}{\mu}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U * \underline{z}(t) = \mu^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(h) h =: \frac{\underline{\sigma}(h)}{\mu}.$$

Por fim, como  $\underline{z} \leq z \leq \bar{z}$ , para todo  $h$  temos:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\sigma}(h)}{\mu} &= \lim_{t \rightarrow \infty} U * \underline{z}(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} U * \underline{z}(t) \leq \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} U * z(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} U * z(t) \leq \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} U * \bar{z}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} U * \bar{z}(t) = \frac{\bar{\sigma}(h)}{\mu}. \end{aligned}$$

Assuma  $h \downarrow 0$ , então da definição de dRi temos

$$\lim_{h \downarrow 0} \bar{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \downarrow 0} \bar{\sigma}(h) = \int_0^\infty z(s) ds,$$

ou seja,  $\bar{\sigma}(h) = \underline{\sigma}(h) = \int_0^\infty z(s)ds$ , quando  $h \downarrow 0$ . Assim, quando  $h \downarrow 0$  teremos

$$\int_0^\infty z(s)ds \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} U * z(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} U * z(t) \leq \int_0^\infty z(s)ds.$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto, o limite existe e temos o Teorema Chave da Renovação, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U * z(t) = \int_0^\infty z(s)ds$$

□

As equivalências do Teorema da Renovação, que acabamos de demonstrar, nos possibilitam demonstrar apenas a mais atrativa. Um método de acoplamento é utilizado em [18] para provar que, no caso não-aritmético para um Processo de Renovação puro, vale que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B(t) \leq x] = F_0(x).$$

*Demonstração.* Lema 2.25 Vamos condicionar na primeira chegada  $M_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_t = 1] &= \mathbb{P}[E_t = 1, M_1 > t] + \mathbb{P}[E_t = 1, M_1 \leq t] = \\ &= \mathbb{P}[E_t = 1, M_1 > t] + \int_0^t \mathbb{P}[E_t = 1 | M_1 = s] dF(s). \end{aligned}$$

Mas  $\{E_t = 1, M_1 > t\} = \{A_1 > t\}$  então  $\mathbb{P}[E_t = 1, M_1 > t] = \mathbb{P}[A_1 > t] = G^c(t)$ . Pela Propriedade fundamental de renovação  $\mathbb{P}[E_t = 1 | M_1 = s] = \rho(t - s)$  para  $s \leq t$ . Isto é, o processo é reiniciado, independentemente do passado, em cada chegada. Então temos

$$\rho(t) = G^c(t) + \int_0^t \rho(t - s) dF(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ou de maneira equivalente,  $\rho = G^c + \rho * F$ . Pelo Teorema 2.21, a solução da equação anterior é  $\rho = G^c + G^c * U$  então

$$\rho(t) = G^c(t) + \int_0^t G^c(t - s) dU(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

□



# Referências Bibliográficas

- [1] ALBERTS, T., LEE, G. Y., AND SIMPER, M. Bak-sneppen backwards. *Stochastics* 89, 8 (2017), 1127–1142.
- [2] BAK, P. *How Nature Works*. Springer-Verlag, 1996.
- [3] BAK, P., AND SNEPPEN, K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution. *Physical Review Letters* 71, 24 (1993), 4083–4086.
- [4] BARBAY, J., AND KENYON, C. On the discrete bak-sneppen model of self-organized criticality. In *Proceedings of the twelfth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms* (2001), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 928–933.
- [5] BOER, J. D., DERRIDA, B., FLYVBJERG, H., JACKSON, A., AND WETTIG, T. Simple model of self-organized biological evolution. *Physical Review Letters* 73, 6 (1994), 906–909.
- [6] BOSE, I., AND CHAUDHURI, I. Bacterial evolution and the bak-sneppen model. *International Journal of Modern Physics C* 12, 05 (2001), 675–683.
- [7] CUNIBERTI, G., VALLERIANI, A., AND VEGA, J. L. Effects of regulation on a self-organized market. *Quantitative Finance* 1, 3 (2001), 332–335.
- [8] DONANGELO, R. J., AND FORT, H. Model for mutation in bacterial populations. *Physical Review Letters* 89, 3 (2002), 038101.
- [9] GILLETT, A., MEESTER, R., AND NUYENS, M. Bounds for avalanche critical values of the bak-sneppen model. *Markov Processes And Related Fields* 12 (09 2005), 679–694.

- [10] GRASSBERGER, P. The bak-sneppen model for punctuated evolution. *Physics Letters A* 200, 3-4 (1995), 277–282.
- [11] GRIMMETT, G. R., AND STIRZAKER, D. R. *Probability and random processes*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1992.
- [12] HOFSTAD, R. V. D. *Random graphs and complex networks*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2016.
- [13] JENSEN, H. J. *Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1998.
- [14] JOVANOVIĆ, B., BULDYREV, S., HAVLIN, S., AND STANLEY, E. Punctuated equilibrium and “history-dependent” percolation. *Physical Review E* 50, 4 (1994), R2403–R2406.
- [15] KINGMAN, J. F. C. *Poisson Processes*. Oxford science publications. Clarendon Press, 1993.
- [16] KOVALEV, O., PIS’MAK, Y., AND VECHERNIN, V. Self-organized criticality in the model of biological evolution describing interaction of “coenophilous” and “coenophobic” species. *Europhysics Letters* 40, 4 (1997), 471–476.
- [17] LERCH, M. Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d’abel. *Acta mathematica* 27, 1 (1903), 339–351.
- [18] LINDVALL, T. A probabilistic proof of blackwell’s renewal theorem. *The Annals of Probability* 5, 3 (1977), 482–485.
- [19] MARSILI, M., RIOS, P. D. L., AND MASLOV, S. Expansion around the mean-field solution of the bak-sneppen model. *Physical Review Letters* 80, 7 (1998), 1457–1460.
- [20] MASLOV, S. Infinite series of exact equations in the bak-sneppen model of biological evolution. *Physical Review Letters* 77, 6 (1996), 1182–1185.

- [21] MEESTER, R., AND ZNAMENSKI, D. Limit behavior of the bak–sneppen evolution model. *The Annals of Probability* (2002).
- [22] MEESTER, R., AND ZNAMENSKI, D. Non-triviality of a discrete bak–sneppen evolution model. *Journal of Statistical Physics* 109, 5-6 (2002), 987–1004.
- [23] MEESTER, R., AND ZNAMENSKI, D. Critical thresholds and the limit distribution in the bak-sneppen model. *Communications in Mathematical Physics* 246, 1 (2004), 63–86.
- [24] PIS’MAK, J. M. Self-organized criticality in simple model of evolution: exact description of scaling laws. *Acta Physica Slovaca* 52, 6 (2002), 525–532.
- [25] RESNICK, S. I. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston, 1992.
- [26] SCHLEMM, E. Asymptotic fitness distribution in the bak–sneppen model of biological evolution with four species. *Journal of Statistical Physics* 148, 2 (2012), 191–203.
- [27] SCHLEMM, E. A differential equation for the asymptotic fitness distribution in the bak–sneppen model with five species. *Mathematical Biosciences* 267 (2015), 53–60.
- [28] SILVA, R. W. C., AND BEN-ARI, I. On a local version of the bak–sneppen model. *Journal of Statistical Physics* 173 (2018), 362–380.
- [29] YAMANO, T. Regulation effects on market with bak–sneppen model in high dimensions. *International Journal of Modern Physics C* 12, 09 (2001), 1329–1333.