Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

Introdução aos Modelos Probabilísticos Discretos:

Binomial, Hipergeométrico, Binomial Negativo, Geométrico e Poisson

Edna A. Reis e Ilka A. Reis

Apostila Didática
RTE-01/2016

Este material é de domínio público. Pede-se apenas para citar a fonte:

Reis, E. A., Reis, I. A. (2016). *Introdução aos Modelos Probabilísticos Discretos: Binomial, Hipergeométrico, Binomial Negativo, Geométrico e Poisson*. Relatório Técnico do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais.

SUMÁRIO

1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADES

Nossa vida, pessoal ou profissional, é repleta de eventos incertos. Quantos minutos levarei para ir de casa até o trabalho ou escola? Vai chover hoje à tarde? Este medicamento terá o desejado em mim? Eliminar a incerteza de nossas vidas é tarefa impossível. Assim, devemos aprender a lidar com ela.

Quantificar a incerteza, expressando-a em um valor numérico, é uma das maneiras que o ser humano criou para lidar com ela nos eventos do dia-a-dia. A quantificação da incerteza é o que chamamos de *Probabilidade*. Assim, a Probabilidade é a medida da (in)certeza sobre a ocorrência de um evento.

Até aqui, já sabemos o que são experimentos aleatórios e aprendemos a calcular probabilidades em situações simples, que envolvem espaços amostrais cujos elementos têm todos a mesma probabilidade de ocorrer (ex: jogos de dados ou de cartas). Em geral, o interesse era calcular a probabilidade de ocorrência de um elemento do espaço amostral (ex: um ás no jogo de cartas) ou de uma combinação de eventos (ex: um ás ou um valete; um ás vermelho).

Neste capítulo, vamos aprender a transformar os elementos simbólicos de um espaço amostral em valores numéricos. Essa operação de transformação, cujo resultado chamamos de *variável aleatória*, facilita muito a resolução de problemas que envolvem incerteza. A medida dessa incerteza, ou seja, a probabilidade, será associada aos valores da variável aleatória e não mais a cada elemento ou combinação de elementos do espaço amostral.

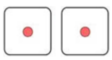
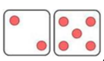
Cada *variável aleatória* tem associada a si uma *função de probabilidade*. As subseções 1.1 a 1.5 apresentarão a definição para esses dois elementos e trarão exemplos de sua aplicação na resolução de problemas. As seções 2 a 5 apresentação alguns dos modelos matemáticos para a função de probabilidade de uma variável aleatória *discreta*, como o número de filhos em uma família ou o número de votos de um candidato.

O objeto deste texto é abordar os modelos probabilísticos mais utilizados para se trabalhar com variáveis aleatórias discretas. Para detalhes e informações sobre outros modelos probabilísticos, os trabalhos de Triola (2013), Montgomery e Runger (2012) e de Walpole e colegas (2009) são excelentes fontes de consulta.

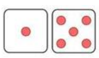
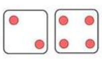
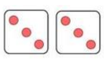
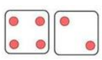
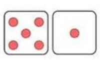
1.1. Variável Aleatória

Exemplo Inicial: vamos considerar, como exemplo, o experimento aleatório de jogar dois dados e observar as faces de cima. O espaço amostral, neste caso, é formado pelos resultados mostrados na Figura 1.1. Se os dados são honestos, cada um desses 36 resultados tem a mesma probabilidade de ocorrer (1/36).

Vamos atribuir, a cada ponto amostral, a *soma dos valores das faces*, denotada por X. Por exemplo, para os pontos amostrais

 e ,

temos que X=2 e X=7, respectivamente. Já os pontos amostrais

 ,  ,  ,  e 

levam ao mesmo valor de X=6.

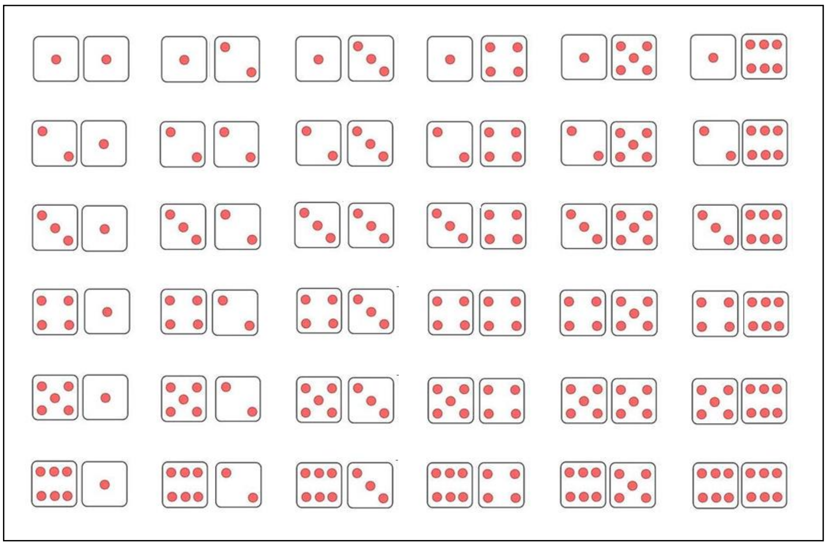


Figura 1.1: Espaço amostral no lançamento de dois dados.

A Figura 1.2 mostra os valores possíveis de X e quais elementos do espaço amostral levam a cada um desses valores. Note que cada ponto amostral leva a apenas um valor de X; entretanto, um determinado valor de X pode vir de diferentes pontos amostrais.

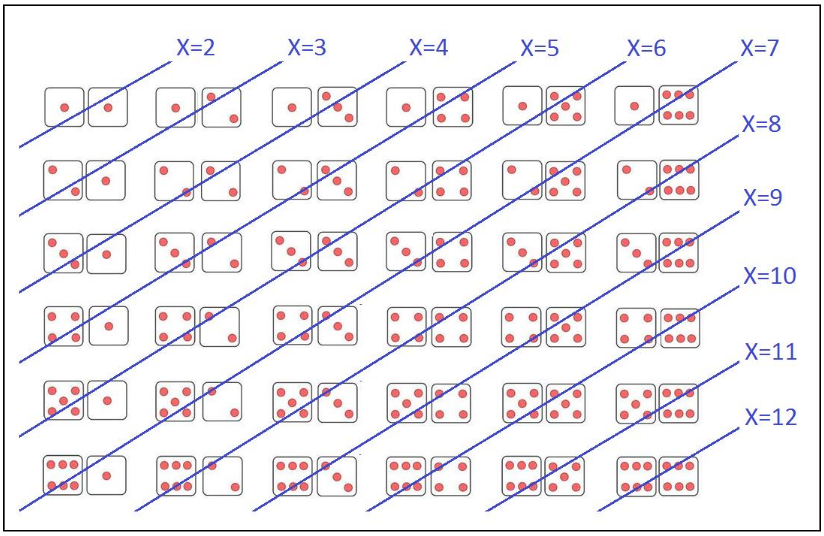


Figura 1.2: Valores possíveis da variável aleatória *X: soma dos valores das faces no lançamento de dois dados*.

A variável *X: soma das faces de dois dados lançados* é chamada de ***variável aleatória***, pois associa um valor numérico a cada elemento do espaço amostral, por meio da operação matemática da soma. O adjetivo ***aleatória*** indica que o valor que a variável vai assumir é determinado pelo ***acaso***, ou seja, seu valor somente é conhecido depois que o experimento aleatório é realizado.

Variável Aleatória: (v.a.)	é uma **função** aplicada aos pontos do espaço amostral de um experimento aleatório e cujo resultado é um **número** real (inteiro ou não). A cada resultado possível do experimento é associado um único valor para a variável aleatória. Entretanto, mais de um resultado do experimento pode levar ao mesmo valor da variável.

Vamos adotar a seguinte notação para as variáveis aleatórias: as letras maiúsculas (X,Y,Z,...) são usadas para *nomear* ou *definir* a variável aleatória, enquanto as letras minúsculas (x,y,z) são usadas para representar os *valores* que ela pode assumir, ou seja, o *contradomínio* da variável aleatória. No exemplo do lançamento de dois dados, temos

X: soma dos valores das faces e $x \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

As variáveis aleatórias podem ser ***discretas*** ou ***contínuas***.

Variável Aleatória Discreta:	Assume valores em um conjunto finito ou infinito contável. Exemplos: Y: nº de filhotes nascidos vivos em uma ninhada de cinco gatos, $y \in \{0,1,2,3,4,5\}$; Z: nº de colônias de bactérias por litro de leite, $z \in \{0,1,2,3,...\}$.

Variável Aleatória Contínua:	Assume valores em um conjunto infinito não contável. Exemplos: Y: peso de um filhote de gato, $y > 0$; Z: proporção de água no leite, $0 \leq z \leq 1$.

Neste capítulo, iremos estudar apenas ***variáveis aleatórias discretas***.

1.2. Função de Probabilidade

Apesar da aleatoriedade do valor da variável aleatória, podemos conhecer, de antemão, os valores ou intervalo de valores que ela **pode** assumir e qual é a **probabilidade** de cada um deles acontecer.

No exemplo do lançamento de dois dados, a probabilidade de cada um dos valores possíveis da variável aleatória X é calculada como a soma das probabilidades dos pontos amostrais associados a esses valores (que, nesse caso, são todas iguais a 1/36). Por exemplo, são quatro os resultados do lançamento de dois dados que levam à soma das faces igual a 5. Desse modo, a probabilidade de a soma das faces seja igual a 5 é 4/36. Os valores das probabilidades dos demais valores de X são mostrados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Resultados possíveis da soma das faces de dois dados e suas probabilidades de ocorrência.

Valor de X	Nº de pontos amostrais	Probabilidade de X
2	1	1/36
3	2	2/36
4	3	3/36
5	4	4/36
6	5	5/36
7	6	6/36
8	5	5/36
9	4	4/36
10	3	3/36
11	2	2/36
12	1	1/36

O conjunto das probabilidades associadas aos valores do domínio de uma variável aleatória discreta é chamado de **função (massa) de probabilidade** dessa variável aleatória.

Função (massa) de Probabilidade:	É a função que associa uma *probabilidade* a cada valor possível da variável aleatória discreta. Notação: P[X=x] é a probabilidade da variável aleatória discreta X assumir o valor x.

A função de probabilidade pode ser representada também por meio de um gráfico de barras verticais, como no caso do exemplo do lançamento de dois dados (Figura 1.3).

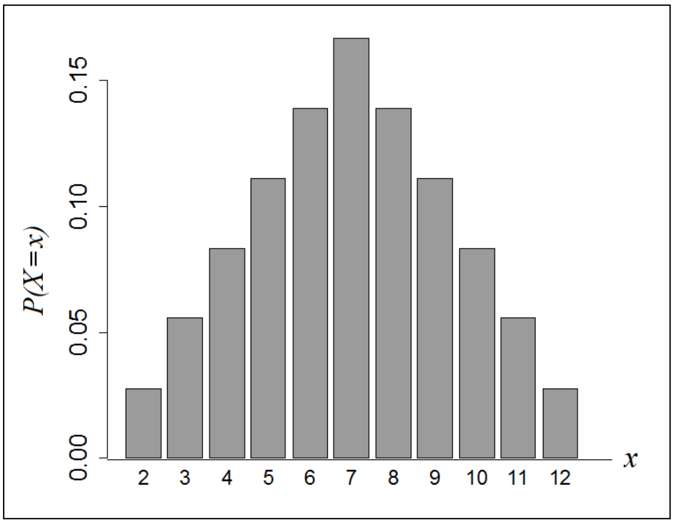


Figura 1.3: Representação gráfica da função de probabilidade da variável aleatória discreta *X: soma dos valores das faces de cima no lançamento de dois dados*.

Lembre-se de que a soma das probabilidades de todos os pontos do espaço amostral é igual a 1. Sabemos que cada ponto do espaço amostral leva a um único valor da variável aleatória X. Logo, a soma das probabilidades de todos os valores da variável aleatória X também é 1:

$$\sum_{\forall x} P[X = x] = 1.$$

1.3. Função de Distribuição Acumulada

Em alguns problemas, podemos estar interessados na probabilidade da variável aleatória discreta X assumir um valor menor ou igual a x, ou seja, em P[$X \leq x$]. O conjunto destas probabilidades definem a *função de distribuição (de probabilidade) acumulada de X*.

Função de Distribuição Acumulada:	Para uma variável aleatória discreta X, é definida por $F(t) \equiv P[X \leq t] = \sum_{\forall x \leq t} P[X = x], \quad -\infty < t < \infty.$

No exemplo do lançamento de dois dados, a probabilidade de a soma das faces de cima dos dois dados ser menor ou igual a 5 é calculada como:

$$P[X \leq 5] = P[X=2] + P[X=3] + P[X=4] + P[X=5] = 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36.$$

As demais probabilidades acumuladas para este exemplo são mostradas na Tabela 1.2.

Tabela 1.2: Probabilidades acumuladas da soma das faces de dois dados.

x	P[X = x]	P[X ≤ x]	
2	1/36	1/36	= 1/36
3	2/36	1/36 + 2/36	= 3/36
4	3/36	1/36 + 2/36 + 3/36	= 6/36
5	4/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36	= 10/36
6	5/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36	= 15/36
7	6/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36	= 21/36
8	5/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36	= 26/36
9	4/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36	= 30/36
10	3/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36	= 33/36
11	2/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36	= 35/36
12	1/36	1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36	= 1

Note que a função $F(t)$ é definida para todos os valores de t na reta real, ou seja, para $-\infty < t < \infty$, e não apenas para os valores de X com probabilidade não nula. Assim, define-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} P[X \leq 5{,}6] &= P[X \leq 5] = 10/36, \\ P[X \leq 7{,}1] &= P[X \leq 7] = 21/36, \\ P[X \leq 13] &= P[X \leq 12] = 1 \quad \text{e} \\ P[X \leq 1] &= 0. \end{aligned}$$

Desse modo, a função de distribuição acumulada $F(t)$ é representada graficamente como uma função escada, como aquela da Figura 1.4.

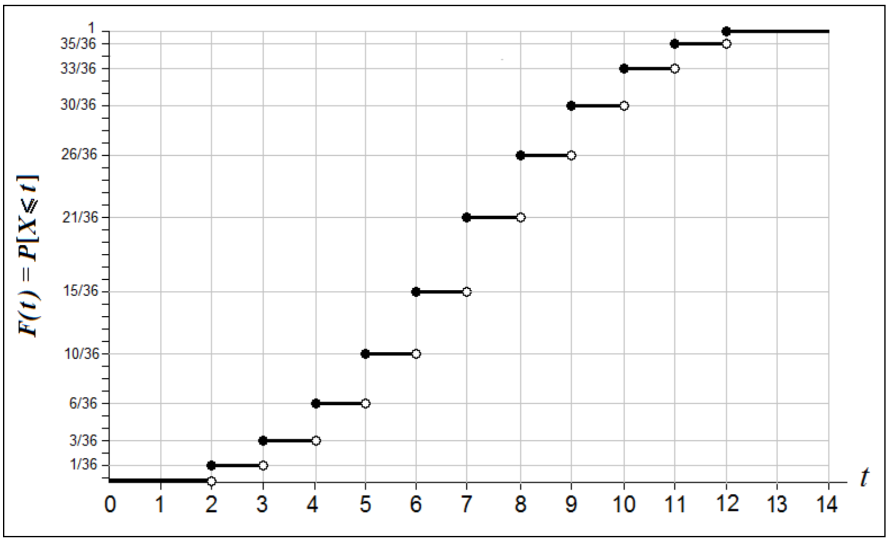


Figura 1.4: Representação gráfica da função de distribuição acumulada da variável aleatória *X: soma dos valores das faces no lançamento de dois dados*.

1.4. Esperança e Variância

Vamos introduzir agora o conceito de duas importantes medidas para variáveis aleatórias: *esperança* e *variância*.

Esperança ou Valor Esperado:	Seja *X* uma variável aleatória discreta. A *esperança* (*valor esperado* ou *média*) de X é calculada como $$E[X]=\sum_{\forall x} x\cdot P[X=x].$$

Variância:	Seja *X* uma variável aleatória discreta com E[X]=μ. A *variância* de X é calculada como $$Var[X]=\sum_{\forall x}(x-\mu)^2\cdot P[X=x].$$ O *desvio-padrão* de X é calculado como $DP[X]=\sqrt{Var[X]}$.

Uma fórmula alternativa para o cálculo da variância é:

Fórmula Alternativa Para Cálculo da Variância:	$Var[X]=E[X^2]-\left(E[X]\right)^2$, com $E[X^2]=\sum_{\forall x} x^2\cdot P[X=x]$

A esperança pode assumir qualquer valor real, enquanto a variância (e o desvio-padrão) assume apenas valores não-negativos.

Exemplo Inicial (*continuação*): Para a variável aleatória *X: soma das faces de dois dados lançados*, a esperança e a variância são dadas por:

$$E[X] = 2\cdot P[X=2] + 3\cdot P[X=3] + \cdots + 12\cdot P[X=12] = 2(1/36)+3(2/36)+\cdots+12(1/36) = 7$$

e

$$Var[X] = (2-7)^2\cdot P[X=2] + (3-7)^2\cdot P[X=3] + \cdots + (12-7)^2\cdot P[X=12] = \frac{210}{36}.$$

Ou, usando a fórmula alternativa para calcular a variância, temos:

$$E[X^2] = (2^2)\cdot P[X=2] + \cdots + (12^2)\cdot P[X=12] = 4(1/36)+\cdots+144(1/36) = \frac{1974}{36}$$

e, assim,

$$Var[X] = E[X^2]-\left(E[X]\right)^2 = \left(\frac{1974}{36}\right)-(7)^2 = \frac{210}{36}.$$

A esperança indica o valor em torno do qual a variável X tende a se localizar depois de muitas repetições do experimento. Sendo a média de uma variável aleatória, a esperança indica qual é o valor típico dessa variável. A variância, por sua vez, mede o quão espalhados (dispersos) em torno do valor da esperança estão os valores possíveis de X.

Exemplo 1.2: Uma mercearia compra lotes de leite de duas marcas, chamadas A e B. O lote tem cinco caixas de leite. Da observação das vendas até o momento, sabe-se que a variável aleatória X, o número de caixas vendidas por lote da marca A, tem função de probabilidade dada por

x	0	1	2	3	4	5
P[X=x]	0,01	0,08	0,23	0,34	0,26	0,08

e a variável aleatória Y, o número de caixas vendidas por lote da marca B, tem função de probabilidade dada por

y	0	1	2	3	4	5
P[Y=y]	0,00	0,01	0,05	0,20	0,41	0,33

Calcule a E[X], E[Y], Var[X] e Var[Y].

Solução:

- Para a marca A:

$$\begin{aligned}\mathrm{E[X]} &= 0\cdot \mathrm{P[X=0]} + 1\cdot \mathrm{P[X=1]} + 2\cdot \mathrm{P[X=2]} + 3\cdot \mathrm{P[X=3]} + 4\cdot \mathrm{P[X=4]} + 5\cdot \mathrm{P[X=5]} \\ &= 0(0{,}01) + 1(0{,}08) + 2(0{,}23) + 3(0{,}34) + 4(0{,}26) + 5(0{,}08) = 3.\end{aligned}$$

Para calcular a variância, vamos usar a fórmula alternativa:

$$\begin{aligned}\mathrm{E[X^2]} &= (0^2)\cdot \mathrm{P[X=0]} + (1^2)\cdot \mathrm{P[X=1]} + (2^2)\cdot \mathrm{P[X=2]} + (3^2)\cdot \mathrm{P[X=3]} + (4^2)\cdot \mathrm{P[X=4]} + (5^2)\cdot \mathrm{P[X=5]} \\ &= 0(0{,}01) + 1(0{,}08) + 4(0{,}23) + 9(0{,}34) + 16(0{,}26) + 25(0{,}08) = 51/5.\end{aligned}$$

e, assim, $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \left(\frac{51}{5}\right) - (3)^2 = \frac{6}{5} = 1{,}2.$

- Para a marca B:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[Y] &= 0\cdot \mathrm{P}[Y=0] + 1\cdot \mathrm{P}[Y=1] + 2\cdot \mathrm{P}[Y=2] + 3\cdot \mathrm{P}[Y=3] + 4\cdot \mathrm{P}[Y=4] + 5\cdot \mathrm{P}[Y=5] \\ &= 0(0{,}00) + 1(0{,}01) + 2(0{,}05) + 3(0{,}20) + 4(0{,}41) + 5(0{,}33) = 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[Y^2] &= (0^2)\cdot P[Y=0] + (1^2)\cdot P[Y=1] + (2^2)\cdot P[Y=2] + (3^2)\cdot P[Y=3] \\ &\quad + (4^2)\cdot P[Y=4] + (5^2)\cdot P[Y=5] \\ &= 0(0{,}00) + 1(0{,}01) + 4(0{,}05) + 9(0{,}20) + 16(0{,}41) + 25(0{,}33) = 16{,}82\end{aligned}$$

$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = (16{,}82) - (34 = 0{,}82.$

A marca B, além de ter, em média, um número maior de vendas, ainda tem uma variabilidade menor em torno deste valor esperado. Ou seja, as vendas da marca B seriam mais estáveis do que as da marca A. A Figura 1.5 mostra as funções de probabilidades do número de caixas vendidas por lote das duas marcas, que confirma que a marca B tem desempenho melhor, pois tem maiores probabilidades associados aos valores de vendas maiores do que 3.

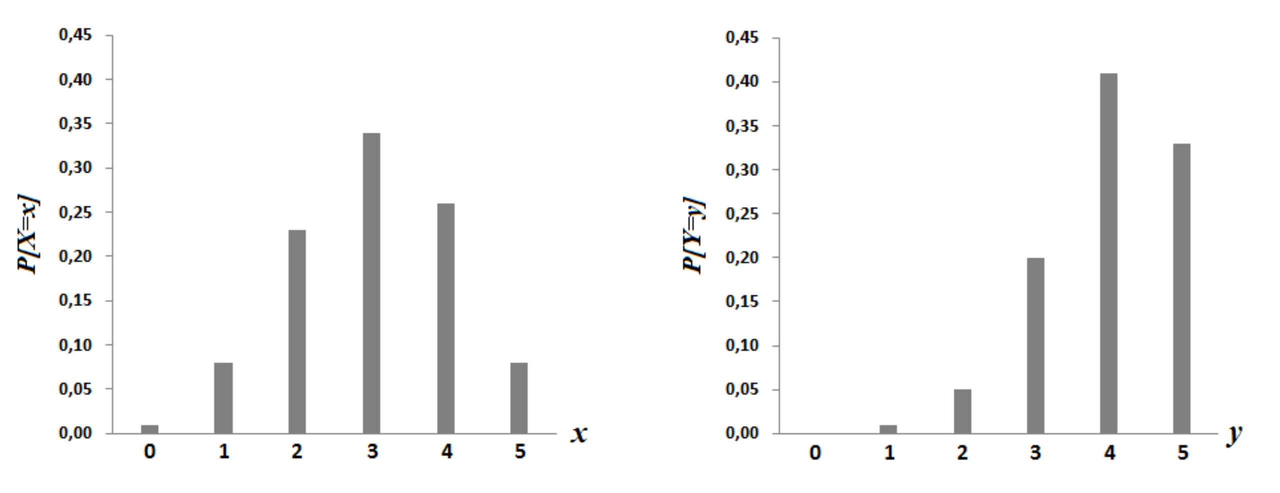


Figura 1.5: Funções de probabilidade das variáveis aleatórias *X* e *Y* do Exemplo 1.2.

1.5. Propriedades de Linearidade da Esperança e da Variância

A esperança e a variância têm algumas propriedades úteis nas transformações lineares de uma variável aleatória, ou seja, quando uma constante é somada à variável aleatória e/ou multiplicada à variável, criando uma nova variável aleatória.

Propriedade 1:	Seja X uma variável aleatória com $E[X]=\mu$ e $Var[X]=\sigma^2$. Se somarmos uma constante b a X, criando a nova variável aleatória $Y=X+b$, então $E[Y] = E[X] + b = \mu + b$ e $Var[Y] = Var[X] = \sigma^2$.

Propriedade 2:	Seja X uma variável aleatória com $E[X]=\mu$ e $Var[X]=\sigma^2$. Se multiplicarmos X por uma constante a, criando a nova variável aleatória $Z=aX$, então $E[Z] = aE[X] = a\mu$ e $Var[Z] = a^2Var[X] = a^2\sigma^2$.

Estas propriedades podem ser visualizadas na Figura 1.6. No primeiro caso, a soma da constante 4 à variável aleatória X desloca o centro (a *média*) da distribuição das probabilidades, mas não altera a dispersão (*variância*) dos valores. Já no segundo caso, a multiplicação de X pela constante 2, além de deslocar o centro da distribuição das probabilidades, também aumenta a dispersão dos valores. Se a constante multiplicada fosse tal que $-1 < a < 1$, a dispersão da variável resultante seria menor que a da original (Figura 1.6c).

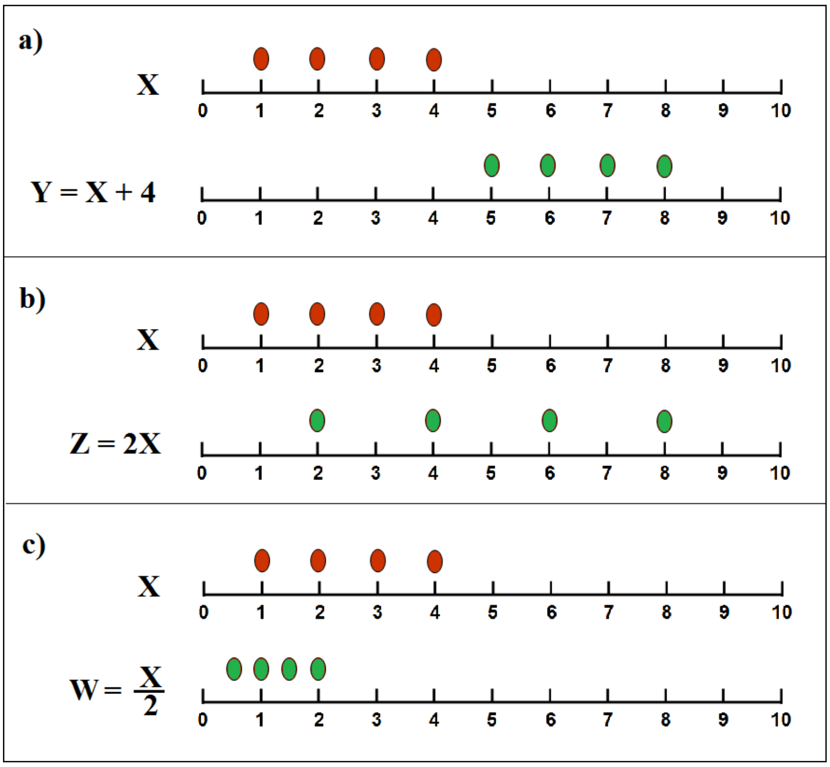


Figura 1.6: Ilustração das propriedades 1 (*a*) e 2 (*b* e *c*).

Exemplo 1.3: Uma mercearia compra um lote com cinco caixas de leite ao preço de atacado de 1,20 reais por caixa e revende cada caixa por 1,65 reais. Depois da data de validade, o leite não vendido é retirado da prateleira e a mercearia recebe, do distribuidor, um crédito igual de 0,90 reais por caixa. Sabe-se que a variável aleatória X, o número de caixas vendidas do lote, tem distribuição de probabilidade com média igual a 3 caixas e variância igual a 6/5. Encontre a média e a variância do lucro do vendedor por lote.

Solução: O lucro do vendedor por lote (Y) é dado pelo soma do valor que ele ganha pelas X caixas vendidas com o valor perdido pelas 5-X caixas não vendidas:

$$Y = (1{,}65-1{,}20)X + (-1{,}20+0{,}90)(5-X) \quad \Rightarrow \quad Y = 0{,}75X - 1{,}50.$$

Logo,

$$E(Y) = (0{,}75)\cdot E(X) + 1{,}50 = (0{,}75)(3) + 1{,}50 = 0{,}75 \text{ reais e}$$
$$Var(Y) = (0{,}75)^2\cdot Var(X) = (0{,}75)^2(6/5) = 0.68 \text{ reais}^2.$$

Em algumas situações, é possível identificar um padrão para a função de probabilidade de uma variável aleatória. Quando isso acontece, podemos adotar o que chamamos de **Modelo Probabilístico** para representar a função de probabilidade de uma variável aleatória. Um Modelo Probabilístico é definido por uma função de probabilidade ou por uma função de distribuição que, por sua vez, dependem de valores conhecidos, chamados **parâmetros** do modelo, e também dos valores que a variável aleatória pode assumir.

Os modelos probabilísticos são muito úteis na resolução de vários problemas práticos como dimensionamento de serviços (centrais telefônicas, portos e aeroportos), inventário da vida selvagem (método de captura-recaptura de aves e peixes), inspeções de elementos (controle de qualidade em indústrias, detecção de contrabando em alfândegas), estudo da eficácia de vacinas e muitos outros. Nas seções a seguir, vamos estudar os principais modelos probabilísticos para variáveis discretas, começando com um dos mais simples e intuitivo: o Modelo Binomial.

2. MODELO BINOMIAL

2.1. Exemplo Inicial

Uma caixa tem 3 bolas azuis e 7 bolas de outras cores. Uma bola é retirada aleatoriamente da caixa, observa-se sua cor (azul ou não azul) e ela é devolvida para a caixa. Repete-se este procedimento 6 vezes. Qual a probabilidade de 4 das 6 bolas selecionadas serem azuis?

2.2. Definições

Primeiramente, vamos definir o tipo de experimento aleatório no qual surge a variável aleatória Binomial.

Experimento Bernoulli ***Be(p)***	Um experimento aleatório de Bernoulli tem as seguintes propriedades: - Resulta em um de dois eventos excludentes: ***sucesso*** ou ***fracasso***; - A ***probabilidade de sucesso (p)*** é ***constante*** em todas as repetições do experimento, ou seja, as repetições geram ***resultados independentes***.

Alguns exemplos de experimentos que podem ser representados como de Bernoulli são:
- lançamento de uma moeda e observação da face de cima (cara ou coroa);
- lançamento de um dado e observação da face de cima (seis ou outro valor);
- nascimento de um bebê e observação do seu sexo (masculino ou feminino);
- verificação de um produto na linha de produção (conforme ou defeituoso);

A contagem dos sucessos em repetições de um experimento de Bernoulli define a variável aleatória Binomial.

Variável Aleatória Binomial ***X ~ B(n;p)***	Seja *X* o número de sucessos em *n* repetições de um experimento *B(p)*. A função de probabilidade de X é dada por $P[X=x]=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\dots,n.$

Lembre-se de que

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n\text{-}x)!}, \qquad n!=n(n-1)(n-2)\dots2.1 \qquad e \qquad 0!=1.$$

Exemplo 2.1 (*continuação*): Como a bola retirada é colocada de volta na caixa para a próxima retirada, o número de bolas azuis será sempre 3 em 10; logo, a probabilidade de bola azul em qualquer retirada é sempre *p*=3/10=0,3. Assim, X, o número de bolas azuis em *n*=6 retiradas, é uma v.a. B(6 ; 0,3). A probabilidade de bola azul em 4 das 6 retiradas é dada por

$$P[X=4]=\binom{6}{4}(0{,}3)^4(1-0{,}3)^{6-4}=\frac{6!}{4!2!}\cdot(0{,}3)^4(0{,}7)^2=15\cdot(0{,}008)\cdot(0{,}49)\approx 0{,}06.$$

Esperança e Variância da Binomial:	Seja $X \sim B(n;p)$. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X] = np$ e $Var[X] = np(1-p)$.

Exemplo 2.1 (*continuação*): O número esperado de bolas azuis em 6 retiradas é de 6(0,3) = 1,8.

A Figura 2.1 mostra a função de probabilidade do modelo Binomial para diversos valores de n (nas linhas) e *p* (nas colunas). Observe que:

- quando *p* está fixo e *n* cresce, a esperança cresce e a variância cresce também, também, pois X pode assumir uma maior variedade de valores;
- quando *n* está fixo e *p* cresce, a esperança cresce. A variância, por sua vez, cresce até p=0,5, atingindo seu valor máximo (n/4). Para valores de p > 0,5, a variância volta a diminuir.

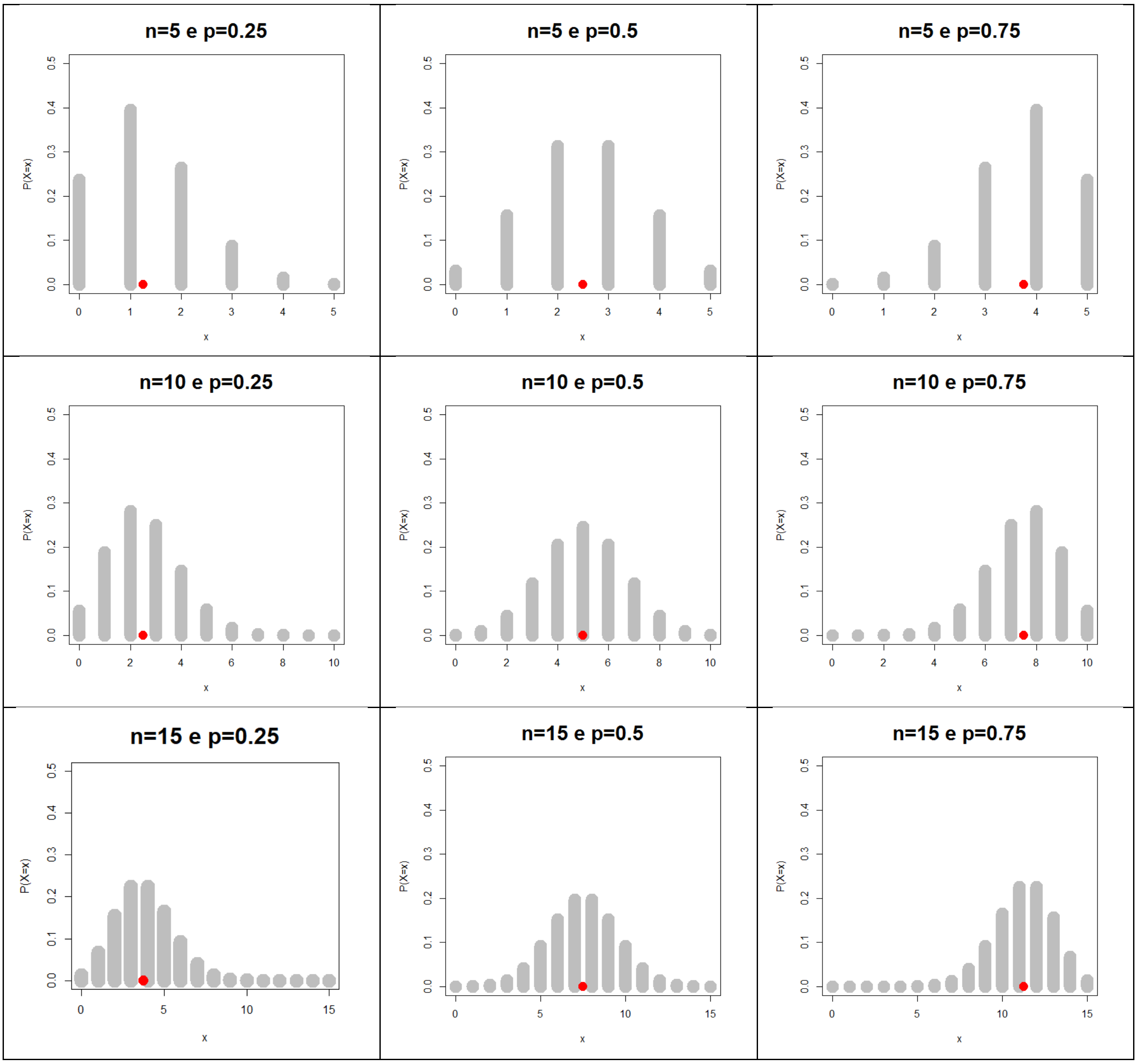


Figura 2.1: Função de Probabilidade da Binomial com diferentes valores de *n* e *p* (em vermelho, a *esperança*).

2.3. Outros Exemplos

Exemplo 2.2: Uma mercearia compra um lote com cinco caixas de leite. Se a probabilidade de uma caixa ser vendida é de 3/5 e as caixas são vendidas de modo independente, determine a função de probabilidade do número de caixas vendidas por lote. Calcule E[X] e Var[X].

Solução: Seja a variável aleatória X, o número de caixas vendidas por lote. Podemos assumir que X segue o modelo Binomial com n=5 e p=3/5. Logo, a função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = \binom{5}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(1-\frac{3}{5}\right)^{5-x}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Substituindo os valores de x na fórmula acima, obtemos:

x	0	1	2	3	4	5
P[X=x]	0,01	0,08	0,23	0,34	0,26	0,08

E ainda, E[X] = np = 5(3/5) = 3 e Var[X] = $np(1\text{-}p)$ = 5(3/5)(2/5) = 6/5.

Exemplo 2.3: No processo de fabricação de uma peça, admite-se que no máximo 5% sejam produzidas com defeito. Todos os dias, cerca de 15 unidades são selecionadas para inspeção. Se uma ou mais peças defeituosas são encontradas nesta amostra, o processo de produção é paralisado. Calcule a probabilidade de o processo ser paralisado quando:

(a) Cinco por cento das peças inspecionadas são produzidas com defeito.

(b) Sete por cento das peças inspecionadas são produzidas com defeito.

Solução: O número de (X) tem distribuição Binomial com *n*=15 e *p* igual à proporção de peças defeituosas produzidas. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X = x] = \binom{15}{x} p^x (1-p)^{15-x}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 15.$$

(a) Se p=0,05, a probabilidade é de o processo ser paralisado é dada por

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{15}{0}(0,05)^0(1-0,05)^{15-0}$$
$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot (0,95)^{15}\right) \approx 1 - 0,46 = 0,54.$$

(b) Se p=0,07, a probabilidade é do processo ser paralisado é dada por

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{15}{0}(0,07)^0(1-0,07)^{15-0}$$
$$= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot (0,93)^{15}\right) \approx 1 - 0,37 = 0,63$$

Note que, quanto maior a probabilidade de uma peça do lote ser defeituosa, maior é a probabilidade de se encontrar uma ou mais peças defeituosas na amostra de 15 peças inspecionadas e, assim, maior é a probabilidade de o processo ser paralisado.

---

3. MODELO HIPERGEOMÉTRICO

3.1. Exemplo Inicial

Suponha que uma caixa contenha 10 bolas, das quais 4 são azuis e 6 são vermelhas. Três bolas serão retiradas em sequência desta caixa e não serão devolvidas. Considere a variável aleatória X, que conta o número de bolas azuis nesta amostra de três bolas retiradas. Os valores possíveis de X são x = 0, 1, 2 e 3. Como podemos calcular a probabilidade de que X assuma cada um destes valores?

Primeiro, vamos determinar o tamanho do espaço amostral deste experimento. De quantas maneiras podemos retirar 3 bolas de uma caixa que contém 10 bolas? A resposta é

$$\binom{10}{3}=120\,.$$

Das 4 bolas azuis que estão na caixa, de quantas maneiras podemos retirar uma quantidade x (x=0,1,2,3)? A resposta é

$$\binom{4}{x}.$$

Simultaneamente, das 6 bolas vermelhas da caixa, uma quantidade igual a

$$\binom{6}{3-x}$$

serão selecionadas. Assim, o número de maneiras possíveis de se selecionar x bolas azuis e 3-x bolas vermelhas na amostra é

$$\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}.$$

Logo, a probabilidade de x bolas azuis serem selecionadas na amostra de 3 bolas é dada por

$$P[X=x]=\frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \qquad x=0,\,1,\,2\;\;e\;3.$$

A função de probabilidade da variável X desse exemplo pode ser definida pelo **Modelo Hipergeométrico**.

3.2. Definições

Variável Aleatória Hipergeométrica ***X~H(N,n,k)***	Seja *X* o número de sucessos em uma amostra aleatória de tamanho *n* selecionada, sem reposição, de *N* itens, dos quais *k* são sucessos. A função de probabilidade de X é dada por[1] $P[X = x] = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad a \leq x \leq b, \quad \text{com} \quad x_a = \max\{0, n-(N-k)\}$ e $x_b = \min\{n, k\}.$

Exemplo 3.1 (*continuação*): No exemplo inicial, a variável aleatória X, o número de bolas azuis em uma amostra de *n*=3 bolas retiradas de uma caixa com *N*=10 bolas das quais *k*=4 são azuis (e *N*-*k*=10-4=6 bolas são vermelhas) tem probabilidades calculadas como

$$P[X = x] = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \qquad x = 0,\ 1,\ 2\ e\ 3.$$

Temos, assim,

$$P[X=0] = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{(1)(20)}{120} = \frac{20}{120} \approx 0{,}17 \qquad P[X=1] = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{(4)(15)}{120} = \frac{60}{120} = 0{,}50$$

$$P[X=2] = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(6)(6)}{120} = \frac{36}{120} = 0{,}30 \qquad P[X=3] = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{(4)(1)}{120} = \frac{4}{120} \approx 0{,}03.$$

Os experimentos aleatórios nos quais aplica-se o modelo Hipergeométrico são muito parecidos com aqueles que definem o modelo Binomial: conta-se o número de sucessos (bolas azuis) em um número (N) predefinido de realizações de um experimento (retirada de uma bola da caixa). Entretanto, no modelo hipergeométrico, a probabilidade de sucesso não é constante nem há independência entre as realizações do experimento.

A maneira mais simples de diferenciar os modelos binomial e hipergeométrico é entender como as retiradas (amostragem) são feitas: *com* ou *sem reposição*. Se cada bola fosse retirada da caixa e reposta após a observação de sua cor (*amostragem com reposição*), teríamos, em todas as retiradas, 4 bolas azuis dentre a 10 bolas. Desse modo, a variável aleatória X (número de bolas azuis dentre as três selecionadas) teria função de probabilidade Binomial com *n*=3 e *p*=4/10. Se a amostragem é feita sem reposição das bolas selecionadas, a probabilidade de seleção de uma bola

[1] A definição do menor valor que X pode assumir (x_a) pode ser entendida da seguinte forma: se o número de bolas fracasso na urna (N-k) é menor que o número de bolas retiradas (n), então teremos na amostra no máximo (N-k) bolas fracasso, e o restante da amostra (n-[N-k]) será necessariamente completada com bolas sucesso (daí ter x_a = n-[N-k]); caso contrário, se n>N-k (ou seja, n-[N-k]>0), então podemos a situação de zero bolas sucesso na amostra (todas as n bolas serem fracasso). Veja o esquema a seguir:

$N-k < n \Leftrightarrow n > N-k \Rightarrow n-(N-k) > 0 \Rightarrow \min\{0, n-(N-k)\} = n-(N-k) \Rightarrow x_a = n-(N-k);$

$N-k > n \Leftrightarrow n < N-k \Rightarrow n-(N-k) < 0 \Rightarrow \min\{0, n-(N-k)\} = 0 \Rightarrow x_a = 0.$

Já o maior valor X poderá assumir (x_b) será o número total de sucessos na urna (k) apenas se n≥k; no entanto, se n<k , ou seja, se o número de bolas retiradas (n) for menor que o número de bolas sucesso (k), poderemos ter na amostra no máximo n bolas sucesso.

azul em cada retirada não é constante, pois depende do resultado da seleção anterior, caracterizando a função de probabilidade Hipergeométrica.

Esperança e Variância da Hipergeométrica	Seja *X*∼*H(N,n,k)*. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X]=n\frac{k}{N}$ *e* $Var[X]=n\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\left(\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{k}{N}\right).$

Exemplo 3.1 (*continuação*): A esperança e a variância do número de bolas azuis dentre as três retiradas da caixa são dadas, respectivamente, por

$$E[X]=3\left(\frac{4}{10}\right)=1{,}2 \qquad e \qquad Var[X]=3\left(\frac{10-3}{10-1}\right)\left(\frac{4}{10}\right)\left(1-\frac{4}{10}\right)= 0{,}56.$$

3.3. Outros Exemplos

Exemplo 3.2: Uma peça usada em motores de carros é vendida em lotes de 10 unidades. O comprador sabe que são produzidas algumas peças defeituosas, mas considera que um lote qualquer é ***aceitável*** se tiver, no máximo, uma peça defeituosa. A inspeção do lote pelo comprador consiste em escolher aleatoriamente 3 peças e testá-las; se nenhuma dessas 3 peças for defeituosa, o lote é considerado aceitável. Suponha que um lote a ser inspecionado tenha 2 peças defeituosas, ou seja, esse lote ***não é aceitável***. Qual é a probabilidade da inspeção classificá-lo como ***aceitável*** ?

Solução: O número de peças defeituosas dentre as inspecionadas (X) tem distribuição Hipergeométrica com N=10, n=3 e k=2. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\frac{\binom{2}{x}\binom{8}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \qquad x=0,1,2.$$

A probabilidade de o lote em análise ser considerado aceitável é

$$P[X=0]=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{21}{45}=0{,}467\ ,$$

uma probabilidade muito alta de aceitar um lote “ruim”.

Exemplo 3.3: Um biólogo, desejando estimar a quantidade N de peixes de certa espécie em um lago, resolve seguir o seguinte procedimento (chamado de ***método da captura-recaptura***): num primeiro momento (etapa da ***captura***), ele vai amostrar 10 peixes desta espécie no lago e marcá-los (com tinta indelével e atóxica) e devolvê-los vivos ao lago. Após algum tempo (etapa da ***recaptura***), ele vai retirar 12 peixes do lago e contar quantos deles estão marcados.

O número de peixes marcados na recaptura é a variável aleatória X, que tem distribuição Hipergeométrica com N desconhecido, n=12 e k=10. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\frac{\binom{10}{x}\binom{N-10}{12-x}}{\binom{N}{12}}, \qquad x = 0, 1, ..., 10.$$

Suponha que o valor observado de X seja x=6. Desse modo, a proporção de peixes marcados na amostra da recaptura é x/n=6/12. No lago todo, esta proporção é k/N=10/N. Então, uma estimativa de N pode ser obtida supondo que estas duas proporções são próximas: $x/n \approx k/N$,
ou seja, $N \approx (nk)/x=(12)(10)/6 = 20$ peixes.

4. MODELO BINOMIAL NEGATIVO

4.1. Exemplo Inicial

Considere que, em uma feira, 20% dos abacaxis (dentre dezenas) estão estragados. Uma pessoa quer comprar dois abacaxis (não estragados, claro). Qual a probabilidade de que ela precise analisar cinco abacaxis para concluir sua compra? E qual a probabilidade de que ela precise analisar pelo menos quatro abacaxis?

4.2. Definições

A contagem do número de repetições de um experimento de Bernoulli até que se obtenham k sucessos define a variável aleatória Binomial Negativa.

Variável Aleatória Binomial Negativa	Seja *X* o número de repetições de um experimento *BN(k,p)* até que ocorram *k* sucessos. A função de probabilidade de X é dada por
X ~ BN(k,p)	$P[X=x]=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}, \qquad x=k,k+1,k+2,\ldots.$

Exemplo 4.1 (*continuação*): A variável aleatória X é o número de abacaxis inspecionados (repetições do experimento) até que se encontre dois (k=2) em bom estado (sucesso); a probabilidade de um abacaxi qualquer selecionado estar em bom estado (probabilidade de sucesso) é p=0,8. Assim, a probabilidade de que a pessoa precise analisar 5 abacaxis para conseguir dois em bom estado é, pelo modelo Binomial Negativo(k=2,p=0,8),

$$P[X=5]=\binom{5-1}{2-1}0,8^2(1-0,8)^{5-2}=\binom{4}{1}0,8^2\cdot 0,2^3=4\cdot(0,640)(0,008)=0,02048.$$

A probabilidade que a pessoa precise analisar pelo menos 4 abacaxis é

$$P[X\geq 4]=\sum_{x=4}^{\infty}P[X=x]=1-P[X\leq 3]=1-\left(P[X=2]+P[X=3]\right)=1-\left(0,64+0,256\right)=1-0,896=0,104.$$

Qual seria o “número esperado de abacaxis analisados”?

Esperança e Variância da Binomial Negativa	Seja *X~BN(k,p)*. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $$E[X]=\frac{k}{p} \quad e \quad Var[X]=\frac{k(1-p)}{p^2}.$$

Exemplo 4.1 (*continuação*): A esperança e a variância do número de abacaxis analisados é

$$E[X]=\frac{2}{0{,}8}=2{,}5 \quad \text{e} \quad Var[X]=\frac{2(1-0{,}8)}{0{,}8^2}=0{,}625.$$

Espera-se analisar entre 2 e 3 abacaxis até encontrar dois que não estejam estragados.

4.3. Outros Exemplos

Exemplo 4.2: Um cientista inocula os germes de certa doença em ratos até que dois contraiam a doença. Se probabilidade de um rato contrair a doença em cada inoculação é de 1/6, calcule a probabilidade de que oito ratos sejam necessários.

Solução: Podemos assumir que a variável aleatória

X: o número de ratos inoculados até que dois contraiam a doença,

segue o modelo Binomial Negativo com k=2 e p=1/6. Assim, a função de probabilidade de X seria dada por

$$P[X=x]=\binom{x-1}{2-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{x-2}, \qquad x=2,3,\ldots .$$

O número esperado de ratos a serem inoculados até que dois contraiam a doença é de *k/p*=2/(1/6)=12.

A probabilidade requerida é

$$P[X=8]=\binom{8-1}{2-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-2}=\binom{7}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 0{,}065.$$

Pensando no planejamento do experimento, talvez a questão mais interessante fosse do tipo: qual é a probabilidade de que mais de oito ratos sejam necessários?

$$\begin{aligned} P[X>8] &= 1-P[X\le 8]=1-\{P[X=2]+P[X=3]+\ldots+P[X=8]\} \\ &= 1-\{0{,}028+0{,}046+\ldots.+0{,}065\}=0{,}605 \end{aligned}$$

Ou seja, a probabilidade de que sejam necessários mais do que oito ratos é grande.

Exemplo 4.3: Sabe-se que, em certo aeroporto, cerca de 25% dos passageiros inspecionados têm objetos proibidos em sua bagagem. Qual é a probabilidade de que, em uma fila, 10 passageiros tenham que ser revistados até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos?

Solução: Seja X o número de passageiros que passam na inspeção até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos. Se pudermos supor que a probabilidade de trazer objetos proibidos é a mesma para todos os passageiros e que os passageiros cometem essa infração de forma independente uns dos outros, a variável aleatória X segue o modelo Binomial Negativo com k=1 e p=0,25. Assim, a função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\binom{x-1}{1-1}(0{,}25)^1(0{,}75)^{x-1}, \qquad x=1,2,3,\ \ldots\ .$$

A probabilidade de que 10 passageiros sejam inspecionados até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos é

$$P[X=10]=\binom{10-1}{0}(0{,}25)^1(0{,}75)^{10-1}=1\cdot(0{,}25)^1\cdot(0{,}75)^9\approx 0{,}02.$$

A Figura 4.1 mostra a função de probabilidade do número de passageiros que passam na inspeção até que seja encontrada uma bagagem com objetos proibidos, quando a probabilidade de que um passageiro tenha objetos escondidos seja de 0,25.

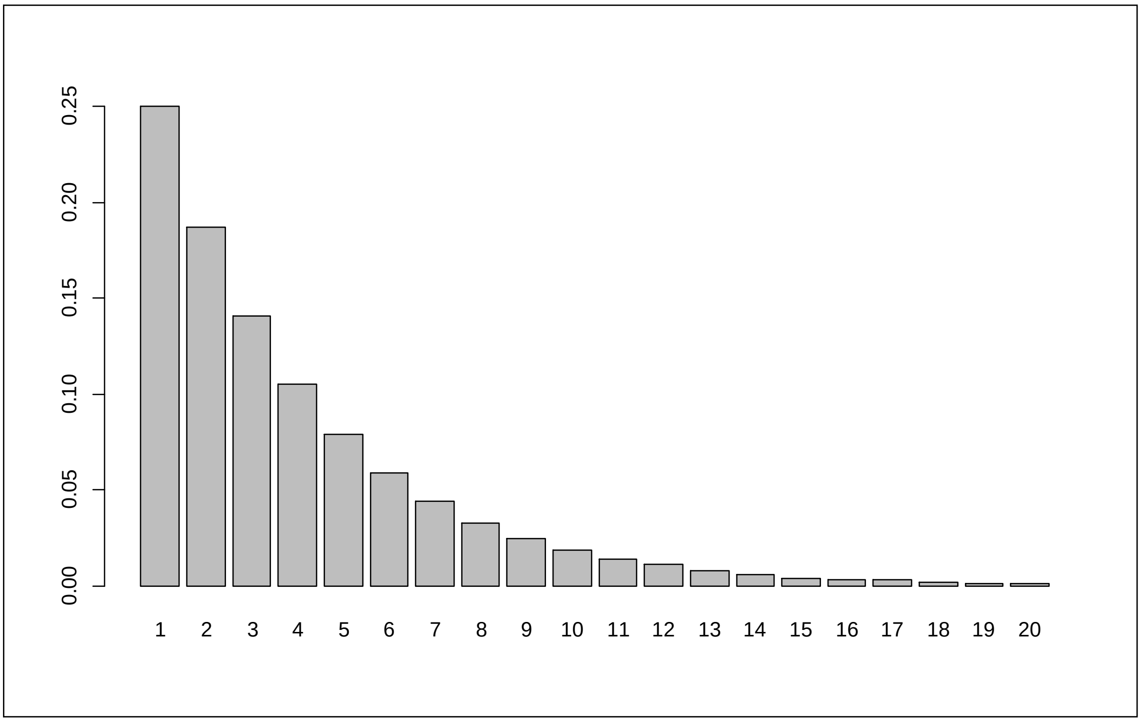


Figura 4.1: Função de Probabilidades da Binomial Negativa $k=1$ e $p=0.25$ (x variando de 1 a 20).

4.4. Caso Especial: O Modelo Geométrico

A variável aleatória Binomial Negativa com *k*=1 é mais conhecida como Geométrica.

Variável Aleatória Geométrica ***X ~ G(p)***	Seja *X* o número de repetições de um experimento *Be(p)* até que ocorra um sucesso. A função de probabilidade de X é dada por $$P[X=x]=p(1-p)^{x-1}, \qquad x=1,2,3,\ldots.$$

Esperança e Variância da Geométrica	Seja *X~BN(k,p)*. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $$E[X]=\frac{1}{p} \quad e \quad Var[X]=\frac{1-p}{p^2}.$$

Note que, quanto menor a probabilidade de sucesso, maior será o número esperado de tentativas até que se obtenha o primeiro sucesso (Figura 4.2). A variância de X também decresce rapidamente com o aumento de *p*.

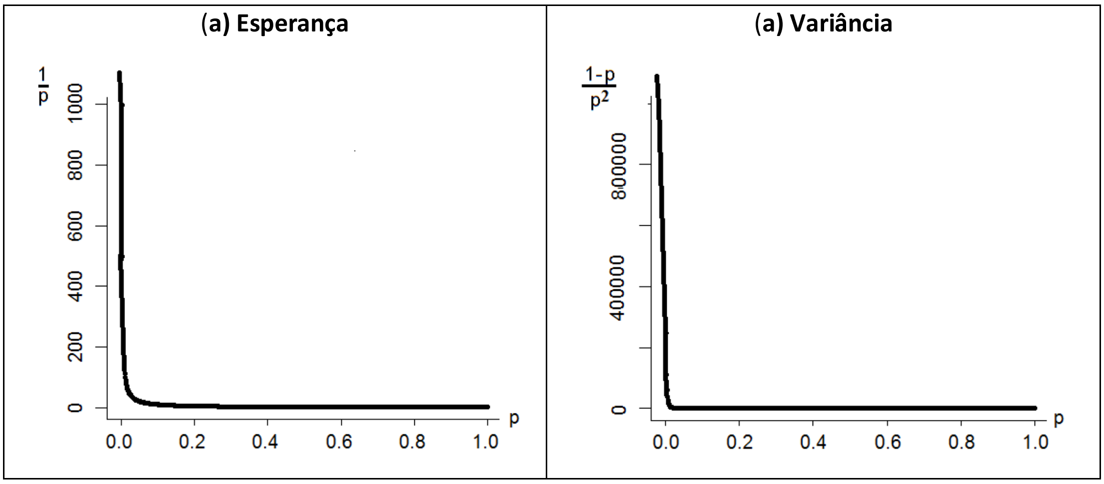


Figura 4.2: Ilustração dos valores de esperança (a) e variância (b) da variável aleatória Geométrica em função da probabilidade de sucesso p.

Exemplo 4.4: No horário de pico, uma central telefônica está muito próxima de sua capacidade máxima e o usuário tem dificuldade para completar sua chamada. De fato, apenas 10% das chamadas são completadas neste horário. É interessante conhecer a distribuição de probabilidade do número de tentativas até que o usuário consiga completar sua chamada. Qual é a probabilidade de que sejam necessárias cinco tentativas para se conseguir completar uma chamada?

Solução: O número de tentativas até a chamada (X) tem distribuição Geométrica com p=0,10. A função de probabilidade de X é dada por

$$P[X=x]=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{x-1}, \qquad x=1,2,3,\ldots.$$

A probabilidade de que sejam necessárias cinco tentativas para completar uma chamada é

$$P[X=5]=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^{4}=0{,}06561.$$

5. MODELO POISSON

5.1. Exemplo Inicial

Considere as seguintes variáveis definidas por uma contagem de certos tipos de evento:

- número de carros que passam por um pedágio por minuto;
- número de buracos por m^2 de um telhado;
- número de bactérias por litro de leite;
- número de multas por veículo;
- número de filhotes em uma ninhada.

Cada uma destas contagens pode assumir valores de zero até um valor máximo indeterminado (0,1,2,3,4,...). Essa "limitação" é definida por uma unidade de tempo (minuto), área (m^2), volume (litro) ou elemento (veículo/ninhada).

Para o estudo da distribuição de probabilidade deste tipo de variável aleatória, um modelo muito utilizado é o Modelo de Poisson.

5.2. Definições

Variável Aleatória Poisson ***X ~ P(λ)***	Se *X*, o número de eventos ocorridos em uma unidade de tempo (espaço, volume, etc.), segue o modelo Poisson com parâmetro λ, a função de probabilidade de X é dada por $P[X=x]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x=0,1,2,\ \ldots .$

Esperança e Variância da Poisson	Seja *X~P(λ)*. A esperança e a variância de X são, respectivamente, $E[X]=\lambda \quad e \quad Var[X]=\lambda .$

A Figura 5.1 mostra que a função de probabilidade da Poisson torna-se mais dispersa entre os valores de X à medida que se aumenta o λ. Note que, também, que o gráfico se torna cada vez mais simétrico à medida que λ aumenta[2].

Exemplo 5.2: Suponha que se possa assumir que o número de navios petroleiros que chegam por dia a um porto tenha distribuição de probabilidade de Poisson com média igual a 10 navios-dia. As instalações do porto podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, em um certo dia, os navios que chegarem não consigam aportar?

Solução: A função de probabilidade do número de navios petroleiros que chegam por dia ao porto (X) é dada por

$$P[X=x]=\frac{e^{-10}10^{x}}{x!}, \qquad x=0,1,2,3,\ldots$$

A probabilidade de que cheguem mais de 15 navios em um dia é

[2]A distribuição Poisson se aproxima da distribuição Normal (Gaussiana) à medida que λ cresce.

$$P[X > 15] = 1 - P[X \le 15] = 1 - \sum_{x=0}^{15} P[X = x] = 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{e^{-10} 10^x}{x!} = 1 - 0{,}9513 = 0{,}0487.$$

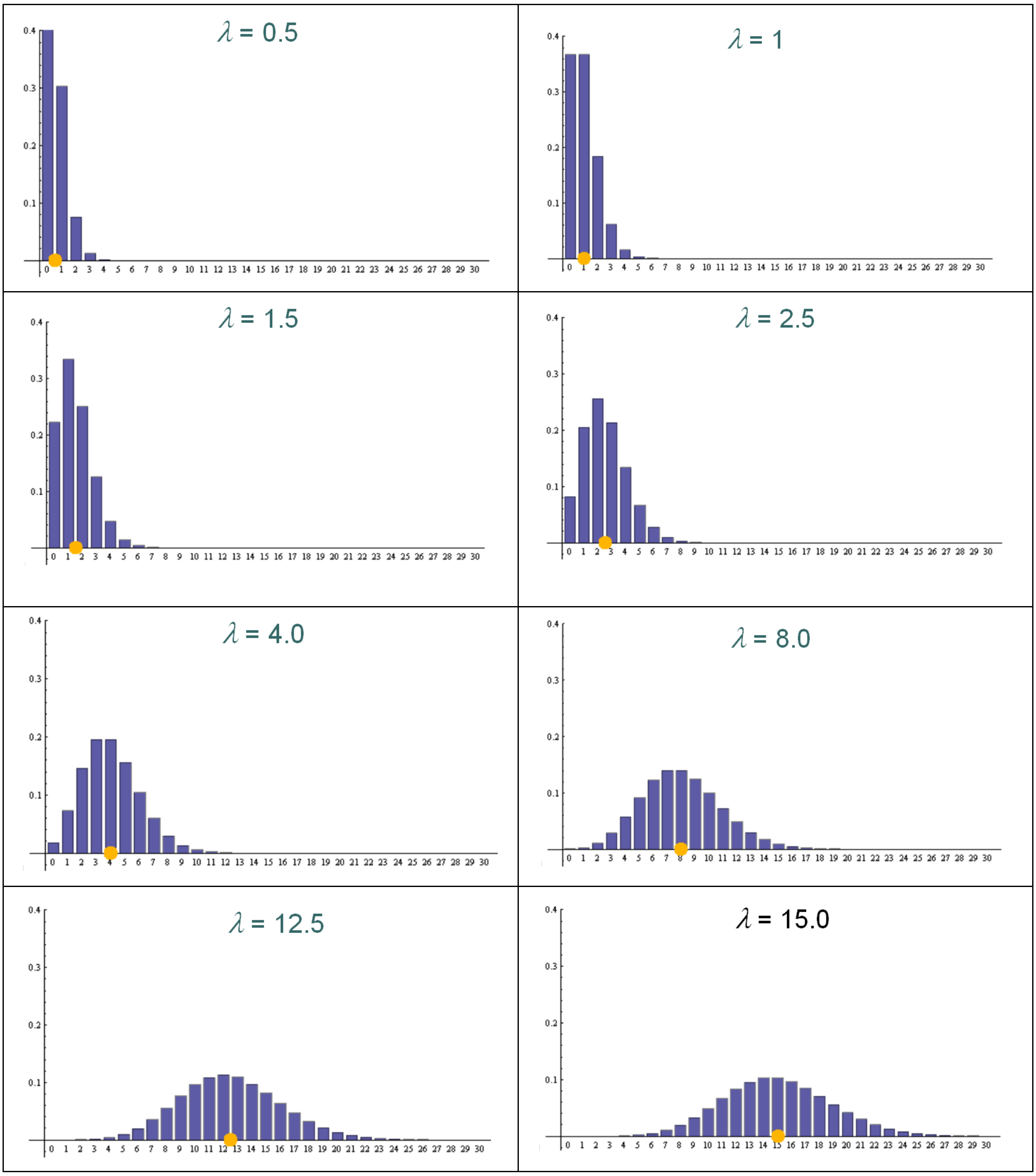


Figura 5.1: Função de Probabilidades de Poisson para vários valores de λ. Em amarelo, a média λ. Feito na plataforma WolframAlpha (www.wolframalpha.com).

5.3. Suposições do Modelo de Poisson

A definição da variável aleatória de Poisson decorre de um experimento aleatório que atende às duas seguintes suposições:

Suposição 1: Média constante	As condições do experimento permanecem constantes no decorrer do tempo (ou no espaço), isto é, a taxa média de ocorrência de eventos, λ, é constante ao longo do tempo (ou do espaço).

Suposição 2: Independência	Intervalos disjuntos, ou seja, sem interseção de tempo ou espaço, são independentes. Isto significa que o que ocorreu em um intervalo nada diz sobre o que vai ocorrer no outro intervalo.

Como consequência das suposições 1 e 2, temos que:

Propriedade 1	Se o número de eventos ocorrendo em uma unidade de tempo (ou espaço) tem distribuição de Poisson com média igual à λ, então o número de eventos ocorrendo em t>0 unidades de tempo (ou espaço) tem distribuição de Poisson com média igual à λt.

Por exemplo, se X_1, o número de partículas emitidas por um material radioativo ***por segundo***, tem distribuição Poisson com λ_1=3, então, X_2, o número de partículas emitidas pelo material radioativo ***em dois segundos*** tem distribuição Poisson com λ_2=2×3=6.

5.4. Outros Exemplos

Exemplo 5.3: O número de carros que passam por um posto policial em uma rodovia em um intervalo de um minuto tem distribuição de Poisson com média igual a 20. Supondo que essa média se mantenha constante ao longo de 10 minutos, qual é o número médio de carros que passam pelo posto policial em 10 minutos?

Solução: Sejam X_1 o número de carros que passam pelo posto policial em 1 minuto e X_2 o número de carros que passam em 10 minutos. Se Se X_1~P(20), então X_2~P(200), pela *Propriedade 1*. Logo, passam, em média, 200 carros pelo posto policial em 10 minutos.

Exemplo 5.4: Assuma que o número de raios que atingem uma região por mês possa ser descrito por um modelo de Poisson com média igual a 2. Supondo que essa média se mantenha constante ao longo do ano, qual é a probabilidade de que 12 raios atinjam esta região no próximo ano?

Solução: Sejam X_1 o número de raios que atingem a região por *mês* e X_2 o número de raios que atingem a região por *ano (12 meses)*. Se X_1~P(2), então X_2~P(24), pela *Propriedade 1*. A função de probabilidade de X_2 é dada por

$$P[X_2 = x] = \frac{e^{-24}(24)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

A probabilidade de que 12 raios atinjam esta região no próximo ano é

$$P[X = 12] = \frac{e^{-24}(24)^{12}}{12!} \approx 0{,}003.$$

5.5. Aproximação da Binomial pela Poisson

Apesar da definição das variáveis aleatórias Binomial e Poisson serem diferentes, as duas distribuições de probabilidade são muito semelhantes quando, na Binomial, n é muito grande e p é muito pequeno, e, na Poisson, toma-se $\lambda = np$.

Mais claramente, se $X \sim B(n;p)$, a distribuição de probabilidade de X aproxima-se da distribuição de Poisson com média $\lambda = np$ à medida que n cresce e p decresce. Isso quer dizer que os valores de

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{e} \qquad P[X = x] = \frac{e^{-np}(np)^x}{x!}$$

ficam cada vez mais próximos à medida que n cresce e p decresce.

Como exemplo, considerando n=100 e p=0,01, note que a probabilidade do valor x=0 calculada na Binomial(100;0.01) é

$$P[X = 0] = \binom{100}{0} (0{,}01)^0 (0{,}99)^{100} \approx 0{,}3660323,$$

e, na Poisson(100[0,01]=1), é

$$P[X = 0] = \frac{e^{-1}1^0}{0!} \approx 0{,}3678794.$$

Os dois valores a partir da terceira casa decimal. Tomando n ainda maior (n=1000) e p ainda menor (p=0.001), as probabilidades calculadas na Binomial(1000;0,001) e na Poisson(1000[0,001]=1), respectivamente,

$$P[X = 0] = \binom{1000}{0} (0{,}001)^0 (0{,}999)^{1000} \approx 0{,}3676954 \qquad \text{e} \qquad P[X = 0] = \frac{e^{-1}1^0}{0!} \approx 0{,}3678794,$$

diferem a partir da quarta casa decimal.

A Figura 5.2 mostra a aproximação entre as distribuições de probabilidade dos modelos Binomial e Poisson para diversas combinações de n e p.

Exemplo 5.5: O fabricante um uma bicicleta infantil recebeu diversas reclamações de um defeito no freio. Teste preliminares haviam determinado que este tipo de defeito ocorreria em 1 a cada 10 mil produtos, ou seja, com probabilidade igual a 0,0001. Decidiu-se retirar uma amostra aleatória de 200 bicicletas da produção, encontrando-se 5 delas com defeito no freio. Comente a afirmação do fabricante de que tal defeito ocorre “em 1 a cada 10 mil” usando um argumento probabilístico. Use a aproximação da Binomial pela Poisson.

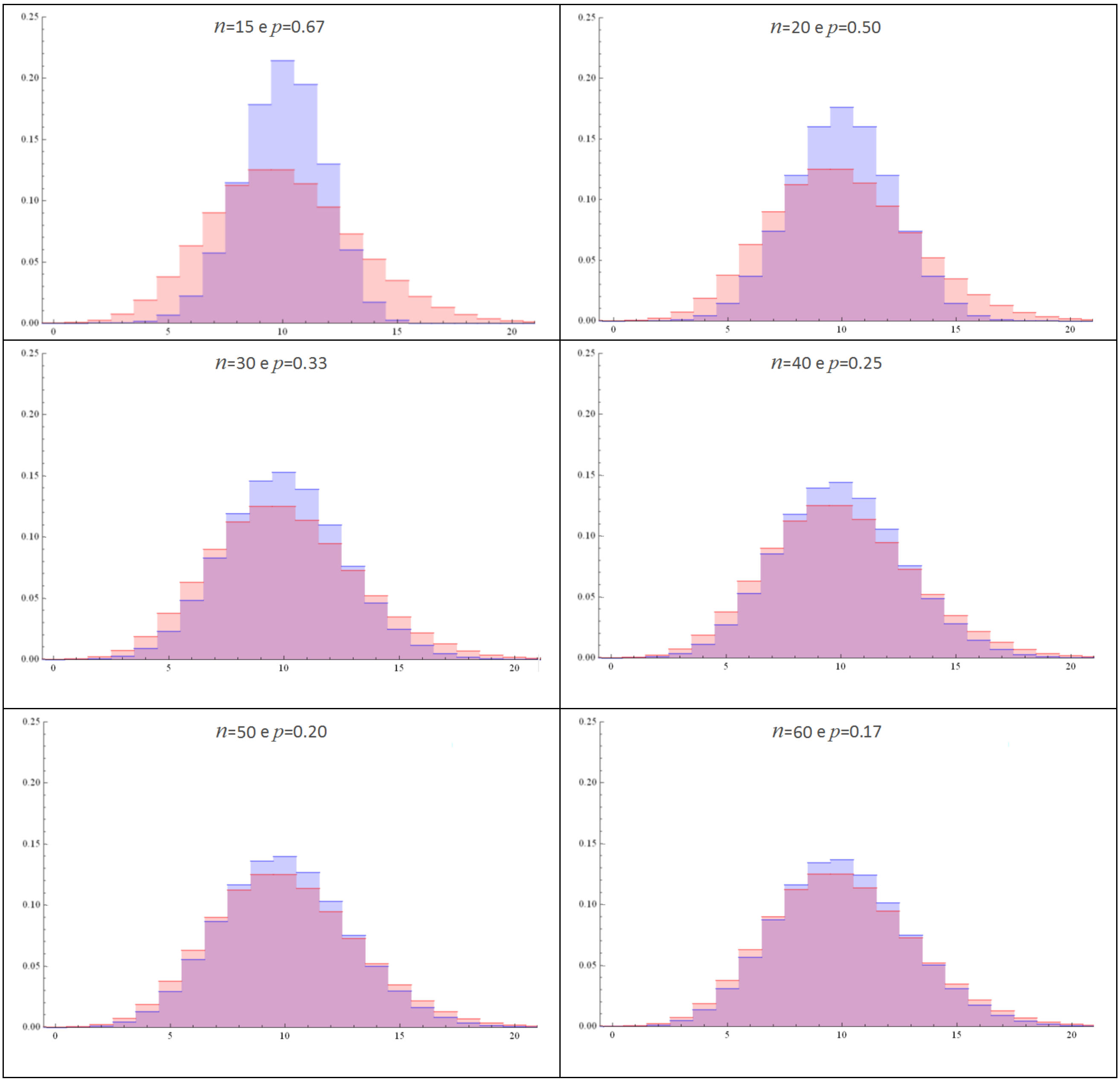


Figura 5.2: Representação gráfica da aproximação entre as funções de probabilidades Binomial(*n*,*p*), em azul, e Poisson(*np*), em rosa, para valores crescentes de *n* e decrescentes de *p*.
Feito na plataforma WolframAlpha (www.wolframalpha.com).

Solução: Seja X a variável aleatória que representa o número de bicicletas com defeito dentre as 200 selecionadas. Se a alegação do fabricante está correta, X tem distribuição Binomial com n=200 e p=0,0001, que pode ser aproximada pelo modelo de Poisson com λ=200(0,0001)=0,02. Desse modo, a probabilidade de que 5 bicicletas com defeito no freio sejam encontradas em 200 bicicletas quando a probabilidade de defeito é de 1 em 10 mil é

$$P[X=5] = \binom{200}{5}(0,0001)^5(0,9999)^{195} \approx \frac{e^{-0,02}(0,02)^5}{5!} = 3\times10^{-11},$$

uma probabilidade muito baixa. Logo, a alegação do fabricante não parece estar certa. Além disso, o número esperado de bicicletas com defeito em um lote de 200 bicicletas, caso o proprietário estivesse certo, seria 200(0,0001) = 0,02, o que está bem abaixo do número de bicicletas defeituosas realmente encontradas.

5.6. Verificação da Adequação do Modelo de Poisson

No caso dos modelos Binomial, Hipergeométrico e Binomial Negativo, a descrição do experimento e da variável aleatória já nos leva à definição do modelo. Entretanto, no modelo Poisson, fazemos as suposições 1 e 2, mas não sabemos ao certo de elas são cumpridas e, portanto, se o modelo Poisson descreve bem a função de probabilidade da variável aleatória. Neste caso, a adequação do modelo de Poisson para descrever a função de probabilidade de uma contagem deve ser checada por meio de uma amostra aleatória de observações da variável.

Exemplo 5.6: Estatísticos de uma companhia telefônica estudam se o modelo de Poisson com média igual a 4,5 pode ser ajustado ao número de chamadas interestaduais que chegam, por hora, à central telefônica, durante o período noturno. Para tanto, eles registraram o número de chamadas em 650 intervalos de uma hora. O número de intervalos de uma hora em que forma recebidas k chamadas (k=0, 1, 2,...) é mostrado no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Frequência observada na amostra	9	38	71	115	125	106	79	50	57

Se X, o número de chamadas interestaduais por hora, tivesse distribuição Poisson (λ=4,5), a probabilidade de chegarem k chamadas em uma hora, seria dada por:

$$P[X=k] = \frac{e^{-4,5}(4,5)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, .., 7,$$
$$P[X \geq 8] = 1 - P[X \leq 7] = 1 - \left(P[X=0]+P[X=1]+\cdots+P[X=7]\right).$$

Os valores destas probabilidades são dados no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
$P[X = k]$ se $X \sim$ P(4,5)	0,011	0,050	0,112	0,169	0,190	0,171	0,128	0,082	0,087

A *frequência esperada* de *k* chamadas por hora (k=0, 1, 2,...), no modelo Poisson (λ=4,5), é obtida multiplicando a probabilidade de *k* chamadas pelo total n=650 intervalos de uma hora. Por exemplo, ao número esperado de intervalos de uma hora com k=0 chamadas é calculado como $nP[X=0]$ = 650(0,011) $\approx$ 7. Os demais valores são mostrados no quadro a seguir.

No. de chamadas (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Frequência esperada no modelo Poisson(4,5)	7	33	73	110	124	111	83	53	56

As frequências esperadas e observadas são próximas, o que levou os engenheiros à conclusão de que o modelo de Poisson (λ=4,5) parece ser adequado para descrever o número de chamadas interestaduais que chegam, por hora, à central telefônica, durante o período noturno.

Esta verificação gráfica da adequação do modelo Poisson por meio de uma amostra é complementada por um procedimento de inferência estatística chamado ***teste de aderência***, que não é abordado neste texto. Para maiores detalhes, ver Triola (2013).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Montgomery, D.C., Runger, G.C. (2012) ***Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*** (5ª edicão). Editora LTC.

- Triola, M.F. (2013) ***Introdução à Estatística*** (11ª edição). Editora LTC.

- Walpole, R. E. e colegas (2009) ***Probabilidade e Estatística*** (8ª edição). Editora Pearson.