

**Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística**

**Uma introdução ao cálculo  
estocástico e às equações  
diferenciais estocásticas**

Aniura Milanés

**Relatório Técnico  
RTE-03/2004  
Série Ensino**

## CONTEÚDO

1. Introdução	2
2. O processo de Wiener.	3
2.1. Processos estocásticos a tempo contínuo.	3
2.2. O processo de Wiener	6
2.3. Martingais, processo de Markov e difusões.	8
3. A integral de Itô	12
3.1. Fórmula de Itô.	16
3.2. Integral de Stratonovich	18
4. Equações diferenciais estocásticas.	19
4.1. Equações diferenciais ordinárias.	19
4.2. Equações diferenciais estocásticas.	20
5. Conclusões	25
Referências	25

## 1. INTRODUÇÃO

Este texto deve a sua origem a uma série de seminários organizados no Departamento focados essencialmente na discussão do livro "Numerical solutions of Stochastic Differential Equations", dos autores P. E. Kloeden e E. Platen ([6]). O nosso objetivo era estudar métodos para a resolução numérica de equações diferenciais estocásticas, implementação destes algoritmos, simulações e aplicações.

Para isso era, no entanto, necessário fazer uma primeira introdução na teoria e é isto o que pretendemos colocar aqui. Neste sentido, o material aqui apresentado pode ser considerado como uma rápida introdução às idéias fundamentais do cálculo estocástico. Pensamos que pode ser apropriado para aqueles leitores com noções básicas de probabilidade e de processos estocásticos a tempo discreto, interessados na simulação e nas aplicações do cálculo estocástico, mais do que na parte teórica. Textos mais profundos e abrangentes e com mais rigor matemático são citados na bibliografia.

Foram colocados ao longo do texto, vários exemplos e exercícios que pensamos serão de grande ajuda na compreensão dos tópicos expostos. Com o mesmo objetivo, são esboçadas as demonstrações de alguns resultados.

O texto não aborda temas importantes como o processo de Wiener n-dimensional e as equações diferenciais estocásticas vetoriais. Estes tópicos assim como aplicações no controle ótimo estocástico, filtragem e a estimação de parâmetros serão tratados em um próximo trabalho.

O material aparece dividido em três partes fundamentais. Na seção 2 fazemos uma exposição dos conceitos básicos nos processos a tempo contínuo e introduzimos o processo de Wiener ou movimento browniano. Na seção 3 apresentamos a integral de Itô com as suas propriedades principais e por último, na seção 4 tratamos as equações diferenciais estocásticas.

Fico muito grata aos colegas que participaram no nosso seminário, especialmente ao professor Adrián Hinojosa, principal responsável pela sua criação e funcionamento.

## 2. O PROCESSO DE WIENER.

**2.1. Processos estocásticos a tempo contínuo.** Dado um conjunto  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$  e um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , a função

$$X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

é um *processo estocástico* se para cada  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória. Aqui e no que segue estaremos denotando  $X_t(w) = X(t, w)$ . Cada função obtida fixando  $w$  e variando o tempo, i.e.  $X(\cdot)(w) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de *trajetória*. Dizemos que o *processo*  $X$  tem *trajetórias contínuas* quando existe um conjunto  $A \in \mathcal{F}$  com probabilidade 1, tal para todo  $w \in A$ , as funções  $X(\cdot)(w) : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas.

Neste trabalho estaremos mais focados em processos a tempo contínuo, i.e., quando  $\mathbb{T} = [0, T]$ ,  $T > 0$  ou  $\mathbb{T} = [0, \infty)$ .

**Exemplo 2.1.** O processo de Poisson com intensidade  $\lambda > 0$  é um processo estocástico  $N = \{N_t, t \geq 0\}$  a tempo contínuo tal que

- (1)  $N_0 = 0$ ;
- (2)  $N_t - N_s$  é uma variável de Poisson com parâmetro  $\lambda(t - s)$  para todos  $0 \leq s < t$ ;
- (3) os incrementos  $N_{t_2} - N_{t_1}$  e  $N_{t_4} - N_{t_3}$  são independentes, para todos  $0 < t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ .

As suas médias, variâncias e covariâncias são:

$$\mu(t) = \sigma^2(t) = \lambda t \text{ e } C(s, t) = \lambda \min\{s, t\}, \quad (2.1)$$

respectivamente, para todos  $s, t > 0$ . Além disto, as suas trajetórias são quase certamente descontínuas.

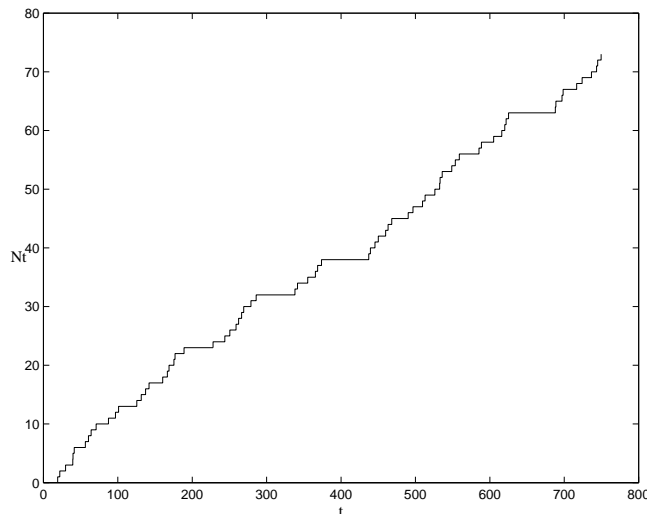


FIGURA 1. Trajetória do processo de Poisson,  $\lambda = 0.1$

Os processos estocásticos com a propriedade (3) do exemplo, são chamados *procesos de incrementos independentes*.

Um objeto fundamental na teoria dos processos estocásticos é a lei do processo.

Dado o processo estocástico  $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ , podemos considerar para cada conjunto  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $t_j \in \mathbb{T}$ , a função de distribuição conjunta do vetor aleatório  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  que denotaremos por  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ . Desta forma fica definida a família  $\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}\}$  das funções de distribuição finito-dimensionais do processo. Esta família é chamada de *lei do processo*  $X$  e faz para processos o mesmo papel que fazem as funções de distribuição para as variáveis aleatórias.

É claro que estas funções de distribuição conjunta estão definidas de maneira única e satisfazem a seguinte propriedade de consistência,

$$\lim_{x_k \uparrow \infty} F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

Sabemos que a todo processo estocástico corresponde uma família de funções de distribuição (ver definição abaixo), satisfazendo (2.2). Veremos que, dada uma família consistente de funções de distribuição, podem se encontrar um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e um processo estocástico  $X$  tais que esta família constitua a lei deste processo. Este resultado é fundamental na hora de provar a existência de processos estocásticos.

Começaremos então tratando o problema análogo para o caso de uma variável aleatória.

- (1) Existência de uma variável aleatória com uma distribuição dada.

Seja  $X$  uma variável aleatória definida no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Sabe-se que a sua função de distribuição é dada por:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\{w : X(w) \leq x\})$$

e que ela tem as seguintes propriedades:

- (a)  $F_X$  é não decrescente;
- (b)  $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(+\infty) = 1$ ;
- (c)  $F_X$  é contínua à direita e tem limite à esquerda em todo ponto  $x \in \mathbb{R}$ .

As funções  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfazem as três propriedades acima, são chamadas de *funções de distribuição*. Consequentemente, temos que a função de distribuição de uma variável aleatória é uma função de distribuição.

Podemos nos fazer a pergunta no sentido inverso. Será que dada uma função de distribuição  $F$  arbitrária, existem um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e uma variável aleatória sobre este espaço de forma que  $F_X = F$ , i.e., tal que  $\mathbb{P}(\{w : X(w) \leq x\}) = F(x)$ ?

A resposta é afirmativa e pode ser abordada da seguinte forma. Sejam

$$\Omega = \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

onde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  representa a  $\sigma$ -álgebra boreliana (gerada pelos conjuntos abertos) de  $\mathbb{R}$ . Definamos sobre os intervalos da forma  $(a, b]$  a função  $\mathbb{P}(a, b] = F(b) - F(a)$ . Usando resultados de Teoria da Medida, é possível provar que  $\mathbb{P}$  pode ser estendida a toda a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ . De forma que, definindo a variável  $X(w) = w$  sobre  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , obteremos

$$\mathbb{P}(\{w : X(w) \leq x\}) = \mathbb{P}(\{w : w \leq x\}) = \mathbb{P}(-\infty, x] = F(x).$$

(2) Existência de um vetor aleatório com função de distribuição dada.

Dado o vetor aleatório  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , define-se a sua função de distribuição por  $F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$ , ou em forma mais compacta,

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(-\infty, \mathbf{x}],$$

onde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $(-\infty, \mathbf{x}] = (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]$ .

Consideremos o operador de diferenças dado pela fórmula:

$$\Delta_{a_i, b_i} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i-1}, \dots) - F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i-1}, \dots),$$

com  $a_i \leq b_i$ . Não é difícil ver que

$$\Delta_{a_1, b_1} \cdots \Delta_{a_n, b_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

onde  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ . Portanto,

$$\Delta_{a_1, b_1} \cdots \Delta_{a_n, b_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$$

para  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  tais que  $a_i \leq b_i$ .

É conhecido que  $F_{\mathbf{X}}$  satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $\Delta_{a_1, b_1} \cdots \Delta_{a_n, b_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ ,
- (b)  $F_{\mathbf{X}}(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \downarrow F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n)$  desde que  $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \downarrow (x_1, \dots, x_n)$ , quando  $k \rightarrow \infty$ ;
- (c)  $F(+\infty, \dots, +\infty) = 1$ ;
- (d)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} F(x_1, \dots, x_n) = 0$ , se pelo menos uma das coordenadas de  $\mathbf{y}$  é zero.

Chama-se de *função de distribuição (n-variada)* a toda função  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as quatro propriedades acima. Análogamente a como foi feito para o caso de uma variável, podemos colocar a questão: dada uma  $F$  função de distribuição n-variada existirão um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e um vetor aleatório  $\mathbf{X}$  sobre este espaço de forma que  $F_{\mathbf{X}} = F$ ?

Novamente a resposta é afirmativa. Podemos considerar  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  e definir  $\mathbb{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) - F_{\mathbf{X}}(\mathbf{a})$  sobre conjuntos da forma  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ . Mais uma vez, a Teoria da Medida garante a possibilidade de estender esta função a toda a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  de forma que ela defina uma probabilidade. Então é fácil ver que o vetor aleatório dado por  $\mathbf{X}(w_1, w_2, \dots, w_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  satisfaz as propriedades desejadas.

(3) Existência de um processo estocástico com distribuições finito-dimensionais dadas.

O seguinte resultado garante a existência de um processo com lei dada por uma família consistente de funções de distribuição.

**Teorema 2.2.** (Teorema de consistência de Kolmogorov.) *Seja*

$$\{F_{(t_1, t_2, \dots, t_n)}, t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_j \in \mathbb{T}, j = 1, \dots, n\}$$

*uma família de funções de distribuição satisfazendo a condição de consistência (2.2). Então existem um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e um processo estocástico  $X$  tais que*

$$F_{(t_1, t_2, \dots, t_n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(\{w : X_{t_1}(w) \leq x_1, \dots, X_{t_n}(w) \leq x_n\}).$$

Para provar este teorema constrói-se uma probabilidade  $\mathbb{P}$  apropriada sobre o espaço de medida  $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{T}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{T}}))$  e considera-se o processo  $X$  como o processo coordenado:  $X_t(w) = w_t$  (ver [10]).

Quando dois processos  $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  e  $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$  possuem a mesma lei, dizemos que cada um deles é *versão* do outro. Se além disto, eles estão definidos sobre o mesmo espaço de probabilidade e vale que

$$\mathbb{P}(\{w : X_t(w) = Y_t(w)\}) = 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{T},$$

então dizemos que  $X$  é uma *modificação* de  $Y$  e vice-versa. Por último, se

$$\mathbb{P}(\{w : X_t(w) = Y_t(w), \forall t \in \mathbb{T}\}) = 1,$$

então  $X$  e  $Y$  são chamados *indistinguíveis*. É claro que dois processos indistinguíveis são necessariamente modificações e versões um do outro.

**2.2. O processo de Wiener.** Passemos agora a definir o processo de Wiener ou movimento browniano.

Em 1827, o botânico escocês Robert Brown observou e descreveu o tipo de movimento irregular executado por pequenos grãos de pólen suspensos em água (ver [2]). Esta observação aparentemente sem muita importância, tornou-se especialmente relevante alguns anos depois.

Embora L. Bachelier em 1900 e A. Einstein em 1905 tenham sido os primeiros a abordar quantitativamente o estudo deste fenômeno (ver [1] e [3]), foi o matemático norteamericano Norbert Wiener quem em 1923, nos artigos [11] e [12] estudou e formalizou rigorosamente o modelo matemático motivado no fenômeno físico do movimento browniano. É por isso que ele é chamado de processo de Wiener ou movimento browniano, sendo que este último nome dá mais ênfase ao processo físico. O leitor interessado na história das diferentes teorias sobre o movimento browniano pode consultar [8], excelente livro de E. Nelson.

Existem várias formas de formalizar matematicamente o processo de Wiener (ver [5]). Aqui usaremos uma delas, que é geralmente usada para provar a existência de processos de Markov.

**Definição 2.3.** *Chamaremos de processo de Wiener padrão a um processo estocástico*

$W : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (1)  $\mathbb{P}(\{w : W_0(w) = 0\}) = 1$ ;
- (2) para quaisquer  $0 \leq s \leq t$ ,  $W_t - W_s$  segue uma distribuição normal com média zero e variância  $t - s$ ;
- (3)  $W_{t_2} - W_{t_1}$  e  $W_{t_4} - W_{t_3}$  são independentes desde que  $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  (incrementos independentes);
- (4) as trajetórias são contínuas.

Tendo definido o processo de Wiener padrão como acima, devemos poder garantir que realmente existe um processo com estas propriedades. Caso contrário a definição não faria sentido.

Observe que as propriedades (1)-(3) que estabelecimos, determinam as funções candidatas a distribuições finito-dimensionais de  $W$ . É possível provar que elas satisfazem (2.2), então o Teorema de Consistência de Kolmogorov (Teorema 2.2) nos permite garantir a existência de uma probabilidade em  $(\mathbb{R}^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0, \infty)}))$  tal que o processo coordenado  $\tilde{W}$  possui estas distribuições finito-dimensionais.

Aparentemente isto resolve o nosso problema e de fato é assim, salvo por um detalhe que é a propriedade de continuidade das trajetórias. Vamos precisar do seguinte resultado.

**Teorema 2.4.** (*Critério de Kolmogorov para a continuidade das trajetórias de um processo*) Um processo  $X$  para o qual existem constantes  $\alpha, \beta, C > 0$  tais que

$$\mathbb{E}(|X_{t+h} - X_t|^\alpha) \leq Ch^{1+\beta}, \quad (2.3)$$

para todos  $t, h > 0$ , possui uma modificação com trajetórias contínuas.

**Exercício 2.5.** Prove que

$$\mathbb{E}(|\tilde{W}_{t+h} - \tilde{W}_t|^4) = 3h^2, \quad (2.4)$$

Finalmente, (2.4) e o Teorema 2.4, garantem a existência de uma modificação  $W$  de  $\tilde{W}$ , satisfazendo as propriedades (1)-(4).

**Exercício 2.6.** Prove que o processo de Wiener padrão tem covariâncias

$$C(s, t) = \min\{s, t\}. \quad (2.5)$$

Supondo que as seguintes expressões existem, as esperanças e variâncias

$$\mu(t) = \mathbb{E}(X(t)), \quad \sigma^2(t) = \text{Var}(X(t)),$$

respectivamente, a cada instante  $t \in \mathbb{T}$  e as covariâncias

$$C(s, t) = \mathbb{E}((X(s) - \mu(s))(X(t) - \mu(t)))$$

em distintos momentos  $s, t \in \mathbb{T}$ , dão alguma informação sobre a variabilidade no tempo do processo correspondente.

Os processos estacionários (no sentido estrito), são aqueles cujas distribuições finito-dimensionais são invariantes no tempo, i.e.,

$$F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h} = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}$$

para todo  $t_i, t_{i+h} \in \mathbb{T}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $h > 0$ . Por outro lado, se existir uma constante  $\mu$  e uma função  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\mu(t) = \mu, \quad \sigma^2(t) = c(0) \text{ e } C(s, t) = c(t - s),$$

para todos  $s, t \in \mathbb{T}$ , então diremos que o processo é estacionário no sentido amplo. É claro que todo processo estacionário no sentido estrito tem que sê-lo também no sentido amplo. O contrário não necessariamente tem que ocorrer.

**Exemplo 2.7.** (2.1) e (2.5) provam que nem o processo de Poisson nem o processo de Wiener padrão são processos estacionários no sentido amplo.

**Exemplo 2.8.** O processo de Ornstein-Uhlenbeck  $X = \{X_t, t \geq 0\}$  com parâmetro  $\gamma > 0$ , e valor inicial  $X_0 \sim N(0; 1)$  é um processo Gaussiano, (i.e., as suas distribuições finito-dimensionais são normais multivariadas) com médias e covariâncias dadas, respectivamente, por:

$$\mu(t) = 0 \quad C(s, t) = e^{-\gamma|t-s|}$$

para todos  $t, s > 0$ . Ele é, portanto, um processo estacionário no sentido amplo. Ele também é estacionário no sentido estrito, como podemos deduzir a partir de (2.12).



A existência de tal processo pode ser garantida novamente usando o teorema de Kolmogorov. Além disso, assim como o processo de Wiener, ele tem trajetórias contínuas.

**2.3. Martingais, processo de Markov e difusões.** Suponha que é dada uma família crescente  $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$  de sub  $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Se  $X_t$  for  $\mathcal{F}_t$ -mensurável para cada  $t \in \mathbb{T}$ , dizemos que o processo é *adaptado à família*  $\mathcal{F}^*$ . Tal família de  $\sigma$ -álgebras é chamada de *filtração*. Sem perda de generalidade, podemos supor que a filtração  $\mathcal{F}^*$  é contínua à direita, i.e.  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$  e que é completa, no sentido que cada  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  o é.

Seja  $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  um processo estocástico adaptado à filtração  $\mathcal{F}^*$  e tal que para todo  $s < t, s, t \in \mathbb{T}$ ,

$$X_s = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s), \text{ quase certamente.} \quad (2.6)$$

$X$  será então chamado de *martingal em relação à filtração*  $\mathcal{F}^*$  ou simplesmente de *martingal*. Se em (2.6) trocarmos o sinal  $=$  por  $\leq$ , então ele é chamado de *submartingal* e se o trocarmos por  $\geq$ , será chamado de *supermartingal*.

**Exercício 2.9.** Prove que se  $X$  é um martingal, então  $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$ , para todo  $t \in \mathbb{T}$ .

**Exemplo 2.10.** Para o processo de Poisson  $N_t$  com intensidade  $\lambda$ , o processo  $N_t - \lambda t$  é um martingal em relação a qualquer filtração para a qual  $N$  seja adaptado.

**Exemplo 2.11.** Para o processo de Wiener padrão  $W$ , os processos  $W_t^2 - t$ ,  $\exp(W_t - \frac{1}{2}t)$  e ele próprio são martingais em relação a qualquer filtração para a qual  $W$  seja adaptado.

Quando  $X$  é um processo a tempo discreto, por exemplo,  $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ , a relação (2.6) fica da forma,

$$X_n = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n), \text{ quase certamente} \quad (2.7)$$

e dizemos que  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  é um *martingal a tempo discreto em relação à filtração*  $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média zero e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$  a sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$  gerada por  $Y_1, \dots, Y_n$ , i.e.,  $\mathcal{F}_n$  é a menor  $\sigma$ -álgebra que podemos considerar sobre  $\Omega$  de forma que  $Y_1, \dots, Y_n$  sejam todas mensuráveis. Então  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$  e  $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$  define uma filtração discreta.

Definamos as variáveis

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

Afirmamos que  $X_n$  é um martingal a tempo discreto em relação à filtração  $\mathcal{F}^*$ . De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

Como  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  é a soma de  $n$  funções  $\mathcal{F}_n$ -mensuráveis então ela própria é  $\mathcal{F}_n$ -mensurável e portanto  $\mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n | \mathcal{F}_n) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = X_n$ . Pela independência das variáveis tem-se que  $\mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}) = 0$  e o resultado segue.

**Exemplo 2.13.** Seja  $Z$  uma variável aleatória no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , com  $\mathbb{E}(|Z|) < \infty$  e seja  $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$  uma filtração discreta. Então a sequência definida por

$$Z_n = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_n)$$

é um martingal a tempo discreto.

Com efeito, usando propriedades da esperança condicional, temos que como  $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ ,

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n) = Z_n.$$

Uma classe muito importante dos processos a tempo contínuo são os *processos de Markov* ou markovianos. Eles constituem formulações a tempo contínuo das cadeias de Markov.

Consideremos agora processos  $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$  tais que, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , suas distribuições finito-dimensionais  $F_{t_1 t_2 \dots t_k}(x_1, \dots, x_k)$  tenham densidades  $p(t_1, x_1; \dots; t_k, x_k)$ . Definimos então as probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1}) \in B | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = \frac{\int_B p(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n; t_{n+1}, y) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, x_1; \dots; t_n, x_n; t_{n+1}, y) dy} \quad (2.8)$$

para cada boreliano  $B \subset \mathbb{R}$ , para instantes  $t_i$ 's satisfazendo a condição  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  e para estados  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Se o denominador em (2.8) é não nulo. Quando o denominador é nulo, define-se esta probabilidade condicional como zero ou a deixamos indefinida. Neste contexto, a propriedade de Markov toma a forma,

$$\mathbb{P}(X(t_{n+1}) \in B | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n) = \mathbb{P}(X(t_{n+1}) \in B | X(t_n) = x_n), \quad (2.9)$$

se as probabilidades condicionais estiverem bem definidas. Quando (2.9) é satisfeita, chamamos ao processo  $X$  de *processo de Markov* com probabilidades de transição dadas por:

$$P(s, x; t, B) = \mathbb{P}(X(t) \in B | X(s) = x), \quad (2.10)$$

onde  $s < t$ . Para  $s, x, t$  fixados,  $P(s, x; t, \cdot)$  é uma função de probabilidade sobre a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$ . Pelas suposições feitas, ela possui densidade  $p(s, x; t, \cdot)$ , chamada de *densidade de transição*. Consequentemente, para cada boreliano  $B$  na reta tem-se

$$P(s, x; t, B) = \int_B p(s, x; t, y) dy.$$

Por conveniência, define-se  $P(s, x; s, B) = \mathbb{I}_B(x)$ , onde  $\mathbb{I}_B$  representa a função indicadora do conjunto  $B$ . Diremos que  $X$  é um *processo de Markov homogêneo* quando todas as densidades de transição dependem não dos valores específicos de  $s$  e  $t$ , mas da sua diferença  $t - s$ . Em tal caso, tem-se  $p(s, x; t, y) = p(0, x; t - s, y)$  e escreveremos  $p(x; t - s, y)$ , omitindo a primeira variável, com  $P(x; t - s, B) = P(0, x; t - s, B)$ .

**Exemplo 2.14.** O processo de Wiener e o processo de Ornstein-Uhlenbeck com  $\gamma = 1$ , são processos de Markov homogêneos com densidades de transição

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right) \quad (2.11)$$

e

$$p(s, x; t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2(t-s)})}} \exp\left(-\frac{(y-xe^{-(t-s)})^2}{2(1-e^{-2(t-s)})}\right), \quad (2.12)$$

respectivamente. Se  $X_0$  for uma variável aleatória arbitrária, o processo de Markov  $X$  com densidades de transição dadas por (2.12), não é necessariamente estacionário, nem Gaussiano. Este processo também é chamado de Ornstein-Uhlenbeck e para evitar amigüidades chamaremos

de processo de Ornstein-Uhlenbeck estacionário aquele com condição inicial  $X_0$  Gaussiana com média zero.

O processo de Ornstein-Uhlenbeck é também um modelo matemático para o movimento browniano. (Ver [8]).

Considere agora um processo de Markov  $X : \mathbb{T} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com densidades de transição  $p(s, x; t, y)$ ,  $s \leq t$  e probabilidades de transição  $P(s, x; t, \cdot)$ ,  $s \leq t$ .

Dizemos que  $X$  é uma difusão com drift  $a(s, x)$  e coeficiente de difusão  $b(s, x)$  se as suas densidades de transição satisfazem

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \epsilon} p(s, x; t, y) dy &= 0 && \text{não há pulos instantâneos} \\ \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \epsilon} (y-x) p(s, x; t, y) dy &= a(s, x) && \text{drift} \\ \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| < \epsilon} (y-x)^2 p(s, x; t, y) dy &= b^2(s, x) && \text{quadrado do coeficiente de difusão} \end{aligned}$$

Uma propriedade importante das difusões é que elas são processos de trajetórias contínuas.

**Exemplo 2.15.** O processo de Poisson  $N$  não é uma difusão. (Por quê?)

**Exercício 2.16.** Prove que o processo de Wiener padrão é uma difusão com drift  $a(s, x) = 0$  e coeficiente de difusão  $b(s, x) = 1$  e que o processo de Ornstein-Uhlenbeck estacionário com  $\gamma = 1$  é uma difusão com drift  $a(s, x) = -x$  e coeficiente de difusão  $b(s, x) = \sqrt{2}$ .

O processo de Wiener pode ser aproximado em distribuição, sobre qualquer intervalo finito, por um passeio aleatório rescalonado apropriadamente e de fato, isto está relacionado com uma das possíveis formas de definir este processo.

Dividamos o intervalo  $[0, 1]$  em  $N$  subintervalos

$$0 = t_0^{(N)} < t_1^{(N)} < \dots < t_k^{(N)} < \dots < t_N^{(N)} = 1,$$

com o mesmo comprimento  $\Delta t = \frac{1}{N}$ . Consideremos uma sequência de variáveis aleatórias independentes  $\{X_n, n \geq 1\}$  tomando os valores 1 e  $-1$  com a mesma probabilidade.

Definamos  $S_N(\cdot)$  para  $N \in \mathbb{N}$  como:

$$S_N(t) = \begin{cases} (X_1 + \dots + X_k) \sqrt{\Delta t} & , t = t_k^{(N)}, k = 1, 2, \dots, N-1 \\ S_N(t_k^{(N)}) & , t_k^{(N)} < t < t_{k+1}^{(N)} \\ 0, & , t = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Observe que as trajetórias de  $S_N$  são constantes em cada intervalo  $[t_k^{(N)}, t_{k+1}^{(N)})$ .

**Exercício 2.17.** Prove que para  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\mathbb{E}(S_N(t)) = 0, \quad \text{Var}(S_N(t)) = \Delta t \left\lceil \frac{t}{\Delta t} \right\rceil,$$

onde  $\lceil x \rceil$  denota o maior inteiro menor ou igual que  $x$ .

Segue que  $\text{Var}(S_N(t)) \rightarrow t$  quando  $N \rightarrow \infty$ , para  $0 \leq t \leq 1$ . De forma similar pode ser provado que para  $0 \leq s < t \leq 1$ ,

$$\text{Var}(S_N(t) - S_N(s)) \rightarrow t - s$$

quando  $N \rightarrow \infty$ . Pelo Teorema Central do Limite, segue que  $S_N$  converge em distribuição para um processo em  $[0, 1]$ , satisfazendo as quatro propriedades do processo de Wiener padrão.

**Exercício 2.18.** No lugar do passeio aleatório  $S_N$ , podemos considerar em  $[0, 1]$  o passeio aleatório interpolado  $\tilde{S}_N$ , resultante de usar interpolação linear em cada subintervalo no lugar de usar (2.13), i.e., para  $t_k^{(N)} \leq t \leq t_{k+1}^{(N)}$ , considere

$$\tilde{S}_N(t) = \frac{S_N(t_{k+1}^{(N)}) - S_N(t_k^{(N)})}{\Delta t} (t - t_k^{(N)}) + S_N(t_k^{(N)}). \quad (2.14)$$

Calcule as médias e as variâncias de  $\tilde{S}_N$  e os seus limites. Prove que este processo também converge em distribuição para o processo de Wiener padrão.

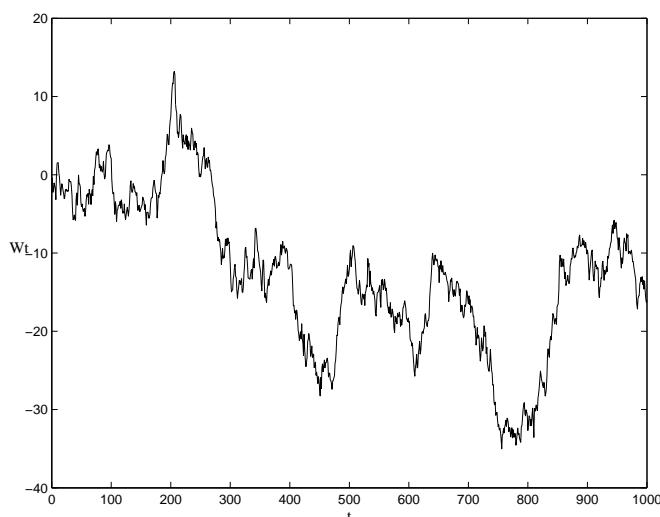


FIGURA 2. Trajetória do processo de Wiener

A Figura 2 acima, sugere um comportamento bastante irregular das trajetórias do processo de Wiener. De fato é possível provar que quase certamente estas trajetórias são não diferenciáveis.

No entanto, em certo sentido pode-se calcular a derivada em relação ao tempo do processo de Wiener, obtendo-se o que é chamado de ruído branco gaussiano. O ruído branco é um objeto mais complexo matematicamente e que não será tratado aqui em rigor. Na Teoria de Sinais, o ruído branco é um som com a mesma intensidade em todas as frequências dentro de uma banda. A música rock, o barulho feito por um motor e as flutuações no mercado de valores, são exemplos de ruído branco. Usa-se a palavra "branco" para descrever este tipo de ruído pela sua semelhança com a "luz branca", composta pelas luzes de todas as cores (frequências) de luz combinadas. Nas aplicações, usa-se o ruído branco na modelação matemática de fenômenos envolvendo flutuações grandes e repentinas.

## 3. A INTEGRAL DE ITÔ

Suponhamos que o vetor  $x(t) \in \mathbb{R}^3$  representa em cada momento do tempo  $t$ , a posição de uma partícula com velocidade conhecida  $a(t, x(t))$ . Este fenômeno é um exemplo clássico de uma situação que pode ser descrita matematicamente usando a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = a(t, x). \quad (3.15)$$

Observe que (3.15) exprime exatamente a variação de  $x$  em cada ponto e em cada momento do tempo, de forma que para conhecer a incógnita  $x$  (pelo menos localmente) basta fixar uma condição inicial  $x(t_0) = x_0$ .

Existem situações nas quais a variação da magnitude de interesse não pode de ser representada somente usando uma relação funcional como em (3.15), mas devem ser levadas em consideração flutuações que podem ser consideradas aleatórias. Em particular, isto ocorre quando observamos a dinâmica do movimento browniano (como explicada por Einstein). Consequentemente, a formulação proposta por Langevin ([7]) e outros para descrever tais fenômenos, consiste em adicionar a (3.15), um termo  $\xi_t$ , representando um ruído aleatório, obtendo-se:

$$\dot{X}_t = a(t, X_t) + b(t, X_t)\xi_t. \quad (3.16)$$

A solução, agora, seria o processo estocástico  $X_t$ . Esta formulação, no entanto, tem a desvantagem de que, em muitas situações, o processo  $\xi$  devia corresponder ao ruído branco: "derivada" do processo de Wiener  $W$ , cujas trajetórias não são diferenciáveis.

Uma alternativa é reformular (3.16) da seguinte forma. Poderíamos interpretar as soluções de (3.16) como os processos  $X$  tais que para quase todo  $w$ ,

$$X_t(w) = X_{t_0}(w) + \int_{t_0}^t a(s, X_s(w))ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s(w))\xi_s ds. \quad (3.17)$$

Agora, como temos  $\dot{\xi}_t = W_t$ , fazemos

$$X_t(w) = X_{t_0}(w) + \int_{t_0}^t a(s, X_s(w))ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s(w))dW_s(w). \quad (3.18)$$

A primeira integral que aparece no termo da direita pode ser interpretada como uma integral de Riemann para cada  $w$ . Fixando  $w$ , vemos que a segunda integral parece com a integral de uma função em relação a uma trajetória. Matematicamente, esse tipo de operação é formalizada através da chamada integral de Riemann-Stieltjes, que permite integrar funções em relação a trajetórias de variação limitada, ou em outras palavras, trajetórias diferenciáveis em relação ao tempo para quase todos os instantes  $t \in [0, T]$ .

O seguinte resultado nos impede de fazer isto.

**Proposição 3.1.** *As trajetórias de processo de Wiener padrão são quase certamente de variação ilimitada sobre cada intervalo finito.*

Para formalizar o termo  $\int_{t_0}^t b(s, X_s(w))dW_s(w)$  usaremos a definição de Itô ([4]) da integral estocástica que explicamos a seguir.

Vamos supor que no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , temos um processo de Wiener  $W = \{W_t, t \geq 0\}$  e uma filtração  $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  tal que  $W$  é um martingal em relação a esta filtração.

Para fixar idéias, consideraremos a integral  $I(f)$  a seguir de uma função  $f$  sobre o intervalo  $[0, T]$ ,  $T > 0$ :

$$I(f)(w) = \int_0^T f(s, w) dW_s(w). \quad (3.19)$$

Para uma constante  $f(t, w) = f$ , é natural fazer

$$I(f)(w) = f(W_1(w) - W_0(w)) = fW_1(w). \quad (3.20)$$

Para uma função escada não aleatória  $f(t, w) = f_j$ ,  $t_j \leq t < t_{j+1}$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  onde  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = T$ , devemos fazer,

$$I(f)(w) = \sum_{j=1}^n f_j (W_{t_{j+1}}(w) - W_{t_j}(w)), \quad (3.21)$$

se quisermos manter a linearidade da integral.

Observe que  $I(f)$  é uma variável aleatória com média zero por ser soma de variáveis aleatórias com esta propriedade.

Para funções escada aleatórias, vamos impor certas condições de mensurabilidade.

Consideremos funções escada aleatórias,  $f(t, w) = f_j(w)$ ,  $t_j \leq t < t_{j+1}$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  e assumamos que  $f_j$  é  $\mathcal{F}_{t_j}$ -mensurável, i.e., observável por eventos que podem ocorrer até o instante  $t_j$ . Assumimos também que  $f$  é quadrado integrável sobre  $\Omega$  e, portanto,  $\mathbb{E}(f_j^2) < \infty$ , para  $1 \leq j \leq n$ .

Analogamente a (3.21), definiremos a integral  $I(f)$  como

$$I(f)(w) = \sum_{j=1}^n f_j(w) (W_{t_{j+1}}(w) - W_{t_j}(w)), \text{ quase certamente.} \quad (3.22)$$

Definida desta forma,  $I(f)$  possui as seguintes propriedades.

**Lema 3.2.** *Se  $f$  é uma função escada aleatória e  $I(f)$  é definida como em (3.22), então  $I(f) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e valem as seguintes condições:*

$$I(f) \in \mathcal{F}_T, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{E}(I(f)) = 0, \quad (3.24)$$

$$\mathbb{E}(I(f)^2) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(f_j^2)(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T \mathbb{E}(f^2(t)) dt. \quad (3.25)$$

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g), \text{ quase certamente} \quad (3.26)$$

para todo  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* (1) (3.23) vale pois cada termo na soma em (3.22) é  $\mathcal{F}_{t_{j+1}}$ -mensurável, e  $\mathcal{F}_{t_{j+1}} \subset \mathcal{F}_T$ .

(2) Podemos calcular

$$\mathbb{E}(f_j \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}) = \mathbb{E}(f_j \mathbb{E}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j})) = 0, \quad (3.27)$$

pois  $W_t$  é um martingal em relação a  $\mathcal{F}^*$ . Sendo assim, (3.24) segue de (3.27).

(3) Para provar (3.25), fazemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I(f)^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n f_j(w)(W_{t_{j+1}}(w) - W_j(w))\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(f_j^2(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(f_j^2 \mathbb{E}(|W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|^2 | \mathcal{F}_{t_j})) + \\
&\quad 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(f_i f_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \mathbb{E}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j} | \mathcal{F}_{t_j})) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(f_j^2)(t_{j+1} - t_j),
\end{aligned}$$

onde usamos de novo que  $W_t$  é um martingal em relação a  $\mathcal{F}^*$  e que pelo Teorema de Lévy de caracterização do movimento browniano (ver [5]), tem-se que  $W_t - W_s$  é independente de  $\mathcal{F}_s$ , para  $0 \leq s < t$  e, portanto, para  $1 \leq j \leq n$ , vale

$$\mathbb{E}(|W_{t_{j+1}} - W_{t_j}|^2 | \mathcal{F}_{t_j}) = t_{j+1} - t_j.$$

(4) (3.26) segue de (3.22). □

Para um integrando  $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mais geral, definiremos  $I(f)$  como o limite de integrais  $I(f^{(n)})$  de funções escada aleatórias,  $f^{(n)}$  convergindo para  $f$  em certo sentido. Para fazer isto precisamos especificar condições sobre  $f$  e determinar o tipo de convergência para que tal sequência  $\{f^{(n)}\}$  exista.

Definamos a classe  $\mathcal{L}_T^2$  de funções  $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo,

- (1)  $f$  é  $\mathcal{L} \times \mathcal{F}$ -mensurável;
- (2)  $\int_0^T \mathbb{E}(f(t, \cdot)^2) dt < \infty$ ;
- (3)  $\mathbb{E}(f(t, \cdot)^2) < \infty$  para cada  $0 \leq t \leq T$ ;
- (4)  $f(t, \cdot) \in \mathcal{F}_t$  para cada  $0 \leq t \leq T$ .

Além disso, consideraremos duas funções de  $\mathcal{L}_T^2$  idênticas, quando elas coincidam em todos os  $(t, w)$  salvo um conjunto de medida  $\mu \times \mathbb{P}$  nula. Então, assumindo a norma

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\int_0^T \mathbb{E}(f(t, \cdot)^2) dt},$$

prova-se que  $\mathcal{L}_T^2$  é um espaço vetorial completo, i.e., um espaço de Banach.

Denotemos como  $\mathcal{S}_T^2$  o subconjunto de  $\mathcal{L}_T^2$  de todas as funções escada aleatórias. É possível provar que, para toda função  $f$  de  $\mathcal{L}_T^2$ , existe uma sequência  $f^{(n)}$  de funções em  $\mathcal{S}_T^2$ , tal que

$$\int_0^T \mathbb{E}(|f^{(n)}(t, \cdot) - f(t, \cdot)|^2) dt \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

em outras palavras,

**Lema 3.3.**  $\mathcal{S}_T^2$  é denso em  $\mathcal{L}_T^2$ .

*Demonstração.* Faremos aqui somente um esboço da prova.

Consideremos partições do intervalo  $[0, T]$  da forma  $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$ , com  $t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)} \rightarrow 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Quando  $\mathbb{E}(f(t, \cdot)^2)$  é contínua, definimos a sequência de funções escada  $f^{(n)}$  como  $f^{(n)}(t, w) = f(t_j^{(n)}, w)$ , quase certamente, para  $t_j^{(n)} \leq t < t_{j+1}^{(n)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  e  $n \in \mathbb{N}$ . É claro então que para estes valores de  $n$  teremos que  $f^{(n)} \in \mathcal{S}_T^2$  e a convergência é consequência do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue.

O caso geral pode ser provado usando argumentos de aproximação.  $\square$

Seja agora  $f \in \mathcal{L}_T^2$ , arbitrária. Vamos definir  $I(f)$ . Para isto consideramos uma sequência  $\{f^{(n)}\}$  satisfazendo (3.28). As integrais  $I(f^{(n)})$  estão bem definidas pela expressão (3.22) e é possível provar que elas formam uma sequência de Cauchy em  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Portanto, existe um limite  $I \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  para esta sequência, i.e., existe  $I$  tal que  $\mathbb{E}(|I(f^{(n)}) - I|^2) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Não é difícil comprovar que  $I$  não depende da escolha da sequência  $\{f^{(n)}\}$ .

Definiremos a *integral estocástica de Itô* de uma função  $f \in \mathcal{L}_T^2$ , como esse limite  $I$ , i.e., como o limite em média quadrática das somas (3.22) para qualquer sequência de funções em  $\mathcal{S}_T^2$  convergindo para  $f$  na norma de  $\mathcal{L}_T^2$ .

Em particular, no caso em que  $\mathbb{E}(f(t, \cdot)^2)$  é contínua, temos que

$$I(f) = l.m.q. \sum_{k=1}^n f(t_j^{(n)}, \cdot)(W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}}), \quad (3.29)$$

onde *l.m.q.* = limite em média quadrática.

Pela própria definição, a integral de Itô herda as propriedades que aparecem no Lema 3.2.

**Teorema 3.4.** A integral estocástica de Itô de uma função  $f \in \mathcal{L}_T^2$ , satisfaz as propriedades (3.23)-(3.26).

Entenderemos a integral de Itô de  $f$  sobre qualquer boreliano  $B \subset [0, T]$  como  $I(f\mathbb{I}_B)$ . Quando  $B = [t_0, t_1] \subset [0, T]$ , denotaremos a integral resultante por  $\int_{t_0}^{t_1} f(s, w)dW_s(w)$ . Como consequência da linearidade da integral, tem-se, quase certamente que:

$$\int_{t_0}^{t_2} f(s, w)dW_s = \int_{t_0}^{t_1} f(s, w)dW_s + \int_{t_1}^{t_2} f(s, w)dW_s, \quad (3.30)$$

para  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 \leq T$ .

Para o intervalo variável  $[t_0, t] \subset [0, T]$ , podemos formar o processo  $Z = \{Z_t, t_0 \leq t \leq T\}$ , definido por

$$Z_t(w) = \int_{t_0}^t f(s, w)dW_s(w), \quad (3.31)$$

quase certamente, para  $t_0 \leq t \leq T$ . Usando o Teorema 3.4 e propriedades de martingais, é possível provar o seguinte teorema, cuja demonstração aparece em [6].



**Teorema 3.5.** *O proceso  $Z_t$  definido em (3.31) é um martingal em relação à filtração  $\{\mathcal{F}_t, t_0 \leq t \leq T\}$  tal que para cada  $t \in [t_0, T]$  vale*

$$\mathbb{E}(Z_t) = 0; \quad (3.32)$$

$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \int_{t_0}^t \mathbb{E}(f(s, \cdot)^2) ds. \quad (3.33)$$

Além disto,  $Z_t$  possui uma versão com trajetórias contínuas.

O fato de  $Z$  ser um martingal é uma das propriedades mais úteis da integral de Itô. Há, no entanto, um preço a ser pago por isto: agora os diferenciais estocásticos, interpretados em termos de integrais estocásticas, não se transformam segundo a regra da cadeia do cálculo diferencial clássico. Isto é consequência da fórmula de Itô que apresentamos a seguir.

**3.1. Fórmula de Itô.** Entenderemos por diferencial estocástico uma expressão da forma

$$dX_t(w) = a(t, w)dt + b(t, w)dW_t(w),$$

que é uma maneira simbólica de representar a igualdade:

$$X_t - X_s = \int_s^t a(u, w)du + \int_s^t b(u, w)dW_u(w), \quad (3.34)$$

quase certamente, para todo  $0 \leq s \leq t \leq T$ . A primeira integral em (3.34) pode ser interpretada como integral de Riemann para cada  $w \in \Omega$  e a segunda é uma integral de Itô.

Consideremos o processo  $Y_t = cX_t$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . As propriedades da integral de Itô permitem afirmar que  $Y_t$  deve satisfazer uma equação do tipo (3.34), com  $\tilde{a} = ca$  e  $\tilde{b} = cb$ . Observe que podemos escrever  $Y_t = U(X_t)$ , com  $U(x) = cx$ . A fórmula de Itô, que apresentaremos a seguir, fornece uma maneira de encontrar as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelo processo  $Y_t = U(X_t)$ , sob condições bastante gerais para a função  $U$ .

**Teorema 3.6.** *(Fórmula de Itô.) Para  $0 \leq t \leq T$ , seja  $Y_t = U(t, X_t)$ , onde  $U : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivadas  $\partial_t U$ ,  $\partial_x U$  e  $\partial_x^2 U$  contínuas e  $X_t$  satisfaz (3.34), com  $\sqrt{|a|}, b \in \mathcal{L}_T^2$ . Então,*

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \left\{ \partial_t U(u, X_u) + a_u \partial_x U(u, X_u) + \frac{1}{2} b_u^2 \partial_x^2 U(u, X_u) \right\} du + \int_s^t b_u \partial_x U(u, X_u) dW_u, \quad (3.35)$$

quase certamente, para quaisquer  $0 \leq s \leq t \leq T$ .

Usando diferenciais, a equação em (3.35) fica da forma:

$$dY_t = \left\{ \partial_t U(t, X_t) + a(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) + \frac{1}{2} b^2(t, \cdot) \partial_x^2 U(t, X_t) \right\} dt + b(t, \cdot) \partial_x U(t, X_t) dW_t.$$

Vejamos alguns exemplos que ilustrem o uso desta fórmula.

**Exemplo 3.7.** *Com  $X_t = W_t$  e  $Y_t = W_t^2$ , temos  $a = 0$  e  $b = 1$ .  $U(t, x) = x^2$ ,  $\partial_t U(t, x) = 0$ ,  $\partial_x U(t, x) = 2x$  e  $\partial_x^2 U(t, x) = 2$ , portanto,*

$$dY_t = dt + 2X_t dW_t = dt + 2W_t dW_t \quad (3.36)$$

ou, equivalentemente, na forma integral

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s. \quad (3.37)$$

**Exemplo 3.8.** Seja  $X_t = W_t$  e  $Y_t = e^{W_t}$ . Então com  $U(t, x) = e^x$ ,  $\partial_t U(t, x) = 0$  e  $\partial_x U(t, x) = e^x$  a fórmula de Itô fica

$$dY_t = \frac{1}{2} Y_t dt + Y_t dW_t. \quad (3.38)$$

A Figura 3 mostra uma trajetória do processo  $Y_t$  deste exemplo.

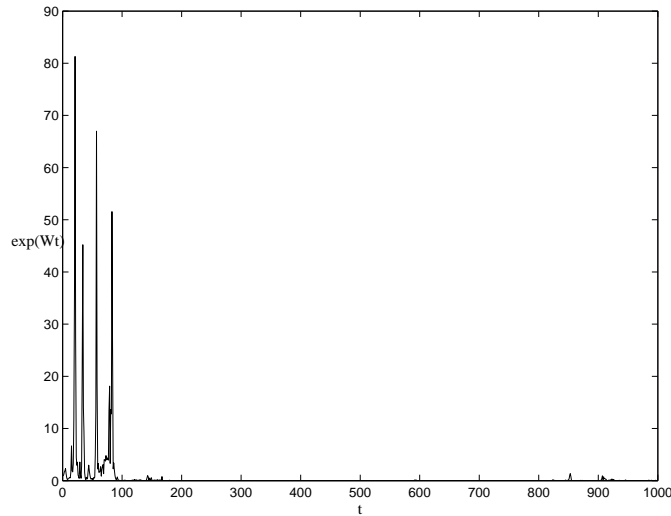


FIGURA 3. Trajetória de  $e^{W_t}$

**Exemplo 3.9.** Assumimos de novo  $X_t = W_t$ , mas agora  $U(t, x) = e^{(x - \frac{t}{2})}$ . Obtemos  $\partial_t U(t, x) = -\frac{1}{2} e^{(x - \frac{t}{2})}$  e  $\partial_x U(t, x) = e^x$  e então

$$dY_t = Y_t dW_t, \quad (3.39)$$

portanto,

$$e^{(W_t - \frac{t}{2})} = 1 + \int_0^t e^{(W_s - \frac{s}{2})} dW_s, \quad (3.40)$$

quase certamente.

**Exercício 3.10.** Use (3.37) e (3.40) para provar o enunciado do exemplo 2.11.

As equações (3.36), (3.38) e (3.39) são exemplos de equações diferenciais estocásticas. Em particular, (3.39) mostra que o análogo da exponencial no cálculo de Itô deve ser  $Y_t = e^{W_t - \frac{t}{2}}$  e não  $Y_t = e^{W_t}$  como no caso do cálculo convencional. Isto indica que resolver equações diferenciais estocásticas de forma exata será mais complicado do que no caso de equações diferenciais ordinárias.

**Exercício 3.11.** Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas por  $Y_t^{(1)} = e^{X_t}$  e  $Y_t^{(2)} = e^{(X_t - \frac{1}{2} \int_0^t f_u^2 du)}$ , quando  $dX_t = f_t dW_t$ .

**Exercício 3.12.** Prove que

$$d(X_t^{2n}) = n(2n-1)f_t^2 X_t^{2n-2} dt + 2nf_t X_t^{2n-1} dW_t,$$

para  $n \geq 1$ , onde  $dX_t = f_t dW_t$ . Use esta expressão para encontrar  $d(W_t^{2n})$  para  $n \geq 1$ .

**3.2. Integral de Stratonovich.** Como consequência da prova do Lema 3.3, vimos que para funções  $f \in \mathcal{L}_T^2$  com  $\mathbb{E}(f(t, \cdot)^2)$  contínua, a integral de Itô  $\int_0^T f(t, w) dW_t(w)$  coincide com o limite em média quadrática das somas

$$S_n(\cdot) = \sum_{k=1}^n f(\xi_j^{(n)}, \cdot) (W_{t_{j+1}^{(n)}} - W_{t_j^{(n)}}), \quad (3.41)$$

onde os pontos  $\xi_j^{(n)}$  em que avaliamos  $f$  são os extremos esquerdos de cada intervalo das partições, i.e.,  $\xi_j^{(n)} = t_j^{(n)}$  para as partições  $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_{n+1}^{(n)} = T$  para as quais observa-se

$$\delta^{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Acontece que é possível escolher outros pontos de avaliação  $t_j^{(n)} \leq \xi_j^{(n)} \leq t_{j+1}^{(n)}$ , sendo que escolhas diferentes determinam diferentes variáveis aleatórias no limite. Em particular, quando pagamos o ponto médio de cada intervalo,

$$\xi_j^{(n)} = \frac{t_j^{(n)} + t_{j+1}^{(n)}}{2}, \quad (3.42)$$

obtemos no limite das somas (3.41), a chamada integral de Stratonovich, denotada como

$$\int_0^T f_t \circ dW_t$$

para um integrando  $f \in \mathcal{L}_T^2$ .

As integrais de Itô e de Stratonovich são as mais usadas e estão relacionadas entre si da seguinte forma. Suponha que  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente diferenciável. Usando a fórmula de Taylor e as definições de ambas integrais, é possível provar que:

$$\int_0^T h(W_t) \circ dW_t = \int_0^T h(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T h'(W_t) dt. \quad (3.43)$$

Uma característica importante da integral de Stratonovich é que ela satisfaz propriedades análogas às do cálculo convencional. De fato, seja  $U' = h$ , i.e.,  $U$  é uma primitiva de  $h$ . Então usando a fórmula de Itô obtém-se:

$$\int_0^T h(W_t) \circ dW_t = U(W_T) - U(W_0). \quad (3.44)$$

Note que a expressão (3.44) é um resultado análogo ao teorema fundamental do cálculo clássico.

**Exemplo 3.13.** Seja  $h(x) = 2x$ , então  $U(x) = x^2 e$

$$2 \int_0^T W_t \circ dW_t = W_T^2,$$

ou, equivalentemente,

$$dW_t^2 = 2W_t \circ dW_t.$$

Compare com (3.36)-(3.37).

**Exemplo 3.14.** Para  $h(x) = e^x$ , temos que  $U(x) = e^x e$  e então

$$\int_0^T e^{W_t} \circ dW_t = e^{W_T} - 1.$$

Portanto,  $Y_t = e^{W_t}$  é uma solução da seguinte equação diferencial estocástica de Stratonovich

$$dY_t = Y_t \circ dW_t. \quad (3.45)$$

Por outro lado, a equação diferencial estocástica de Itô

$$dY_t = Y_t dW_t, \quad (3.46)$$

tem como solução  $Y_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$  para o mesmo valor inicial  $Y_0 = 1$ .

A maior vantagem, se comparada à integral de Itô, da integral estocástica de Stratonovich é que ela segue as regras usuais do cálculo. No entanto, os processos estocásticos definidos por integrais de Stratonovich sobre intervalos de tempo variáveis  $Z_t = \int_{t_0}^t f_t \circ dW_t$ ,  $t \geq 0$ , não definem em geral martingais como no caso da integral de Itô.

**Exercício 3.15.** Use o cálculo determinístico para resolver a equação diferencial de Stratonovich,

$$dY_t = e^{-Y_t} \circ dW_t$$

com  $Y_0 = 0$ . Determine qual é a equação diferencial de Itô satisfeita por esta solução.

#### 4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS.

**4.1. Equações diferenciais ordinárias.** Vimos que as equações diferenciais ordinárias modelam fenômenos onde a variação temporal da magnitude incógnita depende do tempo e desta própria magnitude através de uma relação funcional conhecida. Matematicamente, podemos representar esta situação como

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(t, x). \quad (4.47)$$

Em geral, magnitudes governadas por equações da forma (4.47) são determinadas totalmente e de maneira única por esta equação e por um valor particular em algum momento do tempo. Mais precisamente, suponhamos que a magnitude de interesse  $x$  toma valores reais. Chamaremos de solução da equação (4.47) com valor inicial  $x_0$  a toda função  $x(t, x_0) : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $x(t_0, x_0) = x_0$ . Aqui consideramos  $\delta > 0$ . Sem perda de generalidade, vamos supor, no que segue, que  $t_0 = 0$ .

A condição de Lipschitz dada por:

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|, \quad (4.48)$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $t > 0$ , garante a existência e a unicidade da solução  $x(t, x_0)$ , com valor inicial  $x(0, x_0) = x_0$ , pelo menos para momentos do tempo próximos de  $t = 0$ , ou melhor, para  $-\delta \leq t \leq \delta$ , com  $\delta > 0$ . O método usual para a prova deste tipo de resultado envolve o uso do método das aproximações sucessivas de Picard-Lindelöf, que consiste em definir iterativamente uma sequência convergente de funções  $\{x^{(n)}\}$  satisfazendo

$$x^{(n+1)}(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x^{(n)}(s)) ds,$$

cujo limite  $x$  satisfaz a condição

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s)) ds,$$

e, portanto, satisfaz também a equação diferencial (4.47).

Um problema sério é que a solução pode ficar ilimitada depois de um intervalo de tempo finito. Por exemplo, a solução  $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$  para  $\dot{x} = x^2$  explode no instante  $T(x_0) = \frac{1}{x_0}$ . Para garantir a existência de soluções definidas para todo  $t > 0$ , precisamos exigir alguma condição sobre o crescimento de  $a$ , por exemplo

$$|a(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2), \quad (4.49)$$

ou

$$xa(t, x) \leq L(1 + |x|^2), \quad (4.50)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , onde  $L$  é uma constante positiva.

As equações da forma

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad (4.51)$$

são chamadas de *equações diferenciais ordinárias lineares*. Quando  $a$  e  $b$  são funções limitadas, tais equações satisfazem as condições (4.48), (4.49) e (4.50).

Geralmente o termo  $b(t)$  na equação (4.51) corresponde a uma força que perturba o sistema governado pela equação

$$\dot{x} = a(t)x, \quad (4.52)$$

chamada de *equação homogênea* associada a (4.51). Por isso, às vezes  $b(t)$  costuma ser chamado de *forçante* (forcing term em inglês). A equação (4.52) pode ser resolvida facilmente e com ajuda da sua solução, calcula-se explicitamente a solução geral de (4.51) que é dada por:

$$x(t, x_0) = e^{\int_0^t a(s) ds} \left( x_0 + \int_0^t e^{-\int_0^\tau a(s) ds} b(\tau) d\tau \right). \quad (4.53)$$

**4.2. Equações diferenciais estocásticas.** A inclusão de efeitos aleatórios em equações diferenciais conduz a duas classes diferentes de equações que requerem diferentes métodos de análise.

À primeira classe pertencem as equações ordinárias com coeficientes aleatórios, ou a condição inicial aleatória ou um forçante dado por um processo estocástico regular ou alguma combinação destas. Elas são chamadas de equações diferenciais aleatórias e podem ser resolvidas trajetória-a-trajetória como equações diferenciais ordinárias. As trajetórias da solução são

funções diferenciáveis. Por exemplo, consideremos a equação

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = a(w)x + b(t, w),$$

onde o processo forçante  $b$  tem trajetórias contínuas para cada  $w$ . A solução com valor inicial  $x_0(w)$  em  $t = 0$ , é dada por (comparar com (4.53)):

$$x(t, w) = e^{a(w)t} \left( x_0(w) + \int_0^t e^{-a(w)s} b(s, w) ds \right),$$

sendo as suas trajetórias claramente funções diferenciáveis de  $t$ .

A segunda classe de equações diferenciais estocásticas é formada por aquelas equações nas quais o termo forçante é um processo estocástico irregular como o ruído branco gaussiano. Estas equações podem ser simbolicamente escritas como diferenciais estocásticos, da forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (4.54)$$

mas devem ser interpretadas como equações integrais com integrais estocásticas no sentido de Itô ou de Stratonovich, isto é,

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(t, X_s)dW_s. \quad (4.55)$$

Na terminologia da Física, costuma-se chamar o forçante  $b$  que aparece em (4.54) e (4.55) de ruído aditivo caso  $b = b(t)$  i.e., ele não depende da variável espacial e de multiplicativo caso contrário.

Um processo  $X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ , satisfazendo a equação (4.55), para  $t_0 \leq t \leq T$ , será chamado de solução da equação (4.55). Para  $a$  e  $b$  fixados, cada solução  $X$  dependerá do valor inicial  $X_{t_0}$  e do processo de Wiener em consideração. Se existe solução para cada processo de Wiener, dizemos que a equação diferencial estocástica possui *solução forte*. A solução será chamada de *fraca* quando o processo de Wiener não for especificado, i.e., são incógnitas tanto  $X$  quanto  $W$ .

É possível provar que cada solução possui uma versão com trajetórias contínuas, por isto nos restringiremos, no que segue, a soluções deste tipo.

Como ocorre com a maior parte das equações diferenciais ordinárias, não podemos, em geral, encontrar fórmulas explícitas para as soluções da equação (4.54). Então precisamos usar métodos numéricos para determinar as soluções aproximadamente. Para fazer isto, devemos saber se realmente a equação tem solução e se é única. A unicidade além de ter interesse teórico, tem uma grande importância na prática. Geralmente usam-se métodos numéricos para simular as soluções correspondentes a determinadas situações reais. Se não tivermos unicidade, não poderíamos garantir que a solução que está sendo calculada de forma numérica, aproxima a solução na qual estamos interessados. O seguinte resultado fornece condições sob as quais obtemos existência e unicidade das soluções fortes da equação (4.54).

**Teorema 4.1.** *Suponha que:*

(1) *As funções  $a, b : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazem as seguintes condições:*

- *$a$  e  $b$  são contínuas;*
- *Condições de Lipschitz:*

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq K|x - y|;$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|;$$

*para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ ;*

- *Condição de crescimento linear:*

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq k\sqrt{1 + |x|^2},$$

*para todos  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .*

(2) *A variável aleatória  $X_0$  é tal que:*

- $X_0 \in \mathcal{F}_{t_0}$ ,
- $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$ .

*Então existe  $X : [t_0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , solução forte da equação (4.55), para a qual  $X_{t_0} = X_0$  quase certamente e tal que*

*i)  $X$  é única trajetória-a-trajetória, i.e., qualquer outra solução  $\tilde{X}$  deve satisfazer*

$$\mathbb{P} \left( \left\{ w : \sup_{t_0 \leq t \leq T} |X_t(w) - \tilde{X}_t(w)| > 0 \right\} \right) = 0;$$

*ii)  $X$  é adaptada à filtração  $\mathcal{F}^*$ ;*

*iii)  $\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ ,*

*iv)  $X$  possui trajetórias contínuas;*

*v)  $X$  é uma difusão com coeficientes  $a$  e  $b$ .*

Observe que a unicidade trajetória-a-trajetória que aparece na condição *i*), equivale a dizer que duas soluções  $X$  e  $\tilde{X}$ , como processos sobre  $\mathbb{T} = [t_0, t]$  são indistinguíveis.

A prova destes resultados se faz usando o método das aproximações sucessivas. É bom observar que as hipóteses consideradas aqui para os coeficientes podem ser enfraquecidas substancialmente. Em outras palavras, podemos garantir a existência e a unicidade das soluções fortes para muitos mais casos do que os contemplados no teorema acima.

Não trataremos aqui condições para a existência de soluções fracas. Salientamos no entanto, que algumas equações diferenciais estocásticas podem ter somente soluções fracas, como ilustra o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.2.** *A equação*

$$dX_t = \operatorname{sgn} X_t dt + dW_t,$$

*onde  $\operatorname{sgn} x = 1$ , se  $x \geq 0$  e  $\operatorname{sgn} x = -1$  se  $x < 0$ , tem soluções fracas mas nenhuma solução forte com valor inicial  $X_0 = 0$ . De fato, se  $X_t$  é solução para o processo de Wiener  $W$ , então  $-X_t$  será solução para o processo de Wiener  $-W$ . Estas soluções têm a mesma lei de probabilidade, mas não as mesmas trajetórias.*

Como ocorre para equações diferenciais ordinárias (ver (4.53)), também existem fórmulas fechadas para as soluções de equações diferenciais estocásticas lineares. A forma geral de uma equação diferencial estocástica linear é:

$$dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))dW_t, \quad (4.56)$$

onde os coeficientes  $a_1, a_2, b_1, b_2$  são funções do tempo  $t$  e são regulares o suficiente para garantir a existência e unicidade de soluções fortes em cada intervalo fechado. Observe que agora o ruído será aditivo se e somente se  $b_1 = 0$ .

A solução  $X$  de (4.56), com condição inicial  $X_{t_0}$ , tem a forma

$$X_t = \Phi_{t,t_0} \left( X_{t_0} + \int_{t_0}^t (a_2(s) - b_1(s)b_2(s))\Phi_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t b_2(s)\Phi_{s,t_0}^{-1} dW_s \right), \quad (4.57)$$

onde

$$\Phi_{t,t_0} = \exp \left( \int_{t_0}^t (a_1(s) - \frac{1}{2}b_1^2(s))ds + \int_{t_0}^t b_1(s)dW_s \right).$$

A obtenção desta fórmula, é inspirada no procedimento usado no caso de equações ordinárias lineares. No entanto, ela é um pouco mais complicada e, por esta razão, não a apresentaremos aqui. Para fins de ilustração veremos como ela funciona no caso de ruído aditivo através do seguinte exemplo.

**Exemplo 4.3.** *Queremos resolver a equação*

$$dX_t = \left( \frac{2}{1+t}X_t + b(1+t)^2 \right) dt + c(1+t)^2 dW_t, \quad X_0 = 1. \quad (4.58)$$

*Desconsiderando o termo aleatório obtemos a equação determinística,*

$$dX_t = \left( \frac{2}{1+t}X_t + b(1+t)^2 \right) dt, \quad (4.59)$$

*que é uma equação diferencial ordinária linear com equação homogênea associada, dada por:*

$$dX_t = \frac{2}{1+t}X_t dt. \quad (4.60)$$

*A solução de (4.60), com condição inicial  $X_0 = 1$  é a chamada solução fundamental  $\Phi(t) = (1+t)^2$ . Consideremos agora a função  $U(t, x) = \Phi^{-1}(t)x$  e usemos a fórmula de Itô para encontrar a equação diferencial estocástica satisfeita por  $Y_t = U(t, X_t)$ , onde  $X_t$  é solução de (4.58).*

*Temos que*

$$\begin{aligned} dY_t &= \left\{ \frac{d\Phi^{-1}(t)}{dt}X_t + \Phi^{-1}(t) \left( \frac{2}{1+t}X_t + b(1+t)^2 \right) \right\} dt + \Phi^{-1}(t)c(1+t)^2 dW_t \\ &= \left\{ -\Phi^{-1}(t)\frac{2}{1+t}X_t + \Phi^{-1}(t)\frac{2}{1+t}X_t + b(1+t)^2 \right\} dt + \Phi^{-1}(t)c(1+t)^2 dW_t \\ &= b(1+t)^2 dt + \Phi^{-1}(t)c(1+t)^2 dW_t, \end{aligned}$$



e, portanto,

$$Y_t = \Phi^{-1}(t)X_t = \Phi^{-1}(0)X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(1+s)^2 ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)c(1+s)^2 dW_s.$$

Sendo assim, obtemos

$$X_t = \Phi(t) \left( \Phi^{-1}(0)X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(1+s)^2 ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)c(1+s)^2 dW_s \right).$$

Substituindo a expressão:  $\Phi(t) = (1+t)^2$ , tem-se conseqüentemente que:

$$X_t = (1+t)^2(X_0 + bt + cW_t). \quad (4.61)$$

A seguir apresentamos uma trajetória deste processo, para  $X_0 = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = 12$ . Observe

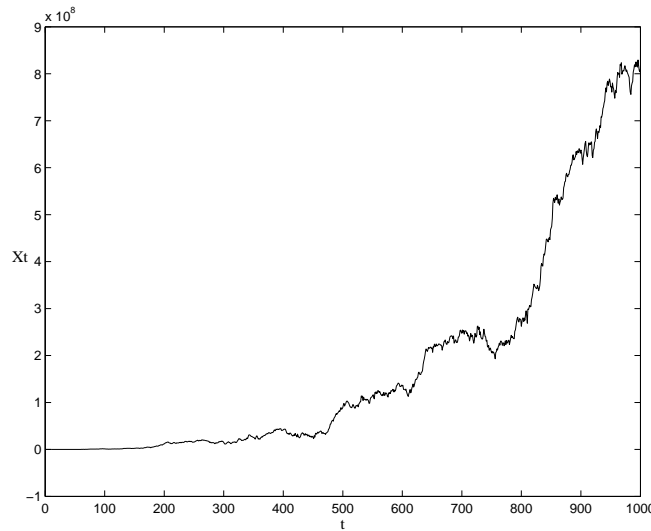


FIGURA 4. Trajetória de  $X_t$

que para estes valores, as trajetórias de  $X_t$  são perturbações estocásticas da curva  $y(t) = (1+t)^3$ .

**Exercício 4.4.** Verifique que o processo dado por (4.61) resolve (4.58) diretamente e usando a fórmula (4.57).

**Exemplo 4.5.** Usando a fórmula (4.56), encontramos que a solução da equação com ruído multiplicativo,

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dW_t,$$

está dada por  $X_t = X_0 e^{W_t}$ , resultado que já havíamos obtido usando a fórmula de Itô. (Ver exemplo 3.8).

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho fizemos uma rápida incursão ao cálculo estocástico e às equações diferenciais estocásticas. Numa próxima etapa, gostaríamos de aprofundar nos métodos de resolução destas equações, na formulação no sentido de Stratonovich e também na teoria correspondente ao processo de Wiener em várias dimensões. Com isto pensamos que estariam apresentadas as bases teóricas que nos permitirão abordar o estudo das simulações numéricas e de diferentes aplicações.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. Bachelier, *Théorie de la speculation* (Tese de doutorado), Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (1900) III-17, 21-86.
- [2] R. Brown, *Robert Brown on microscopical observations of active molecules (Brownian motion)*, <http://sciweb.nybg.org/science2/Profile8.asp>.
- [3] A. Einstein, *On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat.*, Annalen der Physik, **17** (1905), pp. 549-560.
- [4] K. Itô, *Stochastic Integral*, Proc. Imperial Acad. Tokyo **20** (1944), 519-524.
- [5] I. Karatzas e S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, 2000.
- [6] P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical solutions of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, 1992.
- [7] P. Langevin, *Sur la théorie du mouvement brownien*, C.R. Acad. Sci. Paris **146** (1908), 530-533.
- [8] E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967 ou <http://www.math.princeton.edu/nelson/books.html>
- [9] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, 1998.
- [10] A. N. Shiryaev, *Probability: v. 95 (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer Verlag, 1996.
- [11] N. Wiener, *Differential space*, J. Math. Phys. **2** (1923), 131-174.
- [12] N. Wiener, *Un problème de probabilités dénombrables*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 569-578.