

**Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística**

**Um Planejamento com
Medidas Repetidas para A
Comparação de Algoritmos**

F. R. B. Cruz, E. A. Colosimo e
G. R. Mateus

Relatório Técnico RTP-01/98

**Relatório Técnico
Série Pesquisa**

UM PLANEJAMENTO COM MEDIDAS REPETIDAS PARA A COMPARAÇÃO DE ALGORITMOS

Frederico R. B. da Cruz, Enrico A. Colosimo

*Departamento de Estatística – UFMG
Caixa Postal 702
30123-970 - Belo Horizonte - MG.*

Geraldo R. Mateus

*Departamento de Ciência da Computação – UFMG
Caixa Postal 702
30123-970 - Belo Horizonte - MG*

RESUMO

Neste texto, demonstramos como utilizar o planejamento com medidas repetidas em um dos fatores, para fazer comparações estatísticas de algoritmos em problemas de otimização, que é um dos assuntos mais recorrentes na área de desenvolvimento de algoritmos. Apresentamos o modelo sob consideração, bem como um método de solução original. Apresentamos também uma descrição detalhada do planejamento com medidas repetidas e ilustramos o seu uso através de um exemplo completo, no qual demonstramos que o novo algoritmo tem um desempenho superior aos demais.

ABSTRACT

In this paper, we demonstrate how to use the two-factor experiment design with repeated measures on one factor to compare statistically algorithms for optimization problems, which is one of the most recurrent issue in the field of algorithm development. We present the optimization model under consideration and a new solution proposal. We also present a detailed description of the two-factor experiment design and illustrate its use through a comprehensive example in which we demonstrate that the proposed algorithm performs over the others.

1 INTRODUÇÃO

Algoritmos são utilizados em vários contextos, para atingir diferentes objetivos. Neste trabalho, algoritmos representam seqüências de comandos a serem executados pelo computador, com o objetivo de resolver um modelo matemático de otimização. Um dos problemas mais recorrentes na área de desenvolvimento de algoritmos para problemas de otimização é o de compará-los, classificando-os adequadamente. A medida de desempenho de interesse (*e.g.* tempo de processamento, requisito de memória, número de iterações, *etc.*), para um dado algoritmo, não se apresenta inequivocamente diferente das dos demais, surgindo aí a necessidade do uso de alguma ferramenta estatística. O nosso interesse se concentra especificamente em comparar algoritmos para problemas de otimização em *redes*, para os quais certamente tal dificuldade não poderia deixar de ocorrer.

Os problemas de otimização em redes representam uma grande classe dentre os problemas de otimização. Como característica fundamental, os problemas de otimização em redes são definidos em grafos, $G=(N,E)$, onde N representa o conjunto de nós e E , o conjunto de arestas, ou pares de nós. Representamos na Figura 1 um pequeno grafo. Neste caso, as arestas estão direcionadas e são denominadas *arcos*. Este tipo de grafo é denominado *dígrafo*. Podemos observar a presença de quatro nós, $N=\{i,j,k,l\}$, e sete arcos, $E=\{(i,j),(j,i),(i,k),(j,k),(k,j),(k,l),(l,k)\}$. No dígrafo $G=(N,E)$, os nós poderiam estar representando quatro regiões de uma cidade e os arcos, as principais vias de acesso entre as localidades.

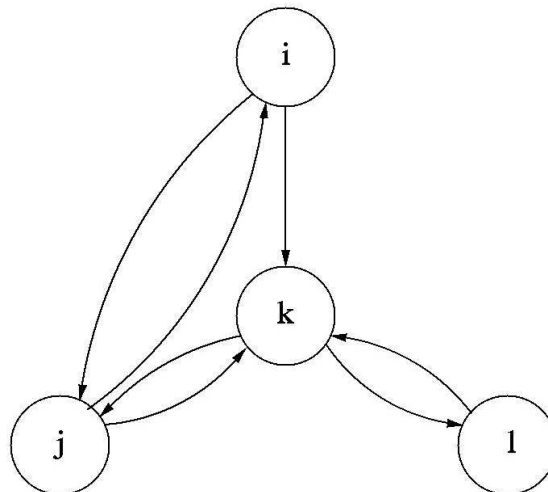


Figura 1 Grafo $G=(N=\{i,j,k,l\}, sE=\{(i,j),(j,i),(i,k),(j,k),(k,j),(k,l),(l,k)\})$

O problema para o qual pretendemos comparar algoritmos é o chamado problema **não capacitado de fluxos com custos fixos nos arcos (NCFCF)**. O problema NCFCF pertence à grande classe de problemas de otimização em redes, formando ele próprio uma subclasse de modelos, bem peculiar, com muitas aplicações práticas de interesse. Para citar apenas alguns poucos exemplos, esse modelo genérico tem aplicações em problemas de planejamento de redes de distribuição, redes de transportes e de telecomunicações. Leitores interessados podem encontrar maiores detalhes em Cruz *et al.* (1994) e em Cruz *et al.* (1998). No problema NCFCF, estão envolvidos custos de utilização dos arcos e custos dependentes do montante de fluxo suportado pelo arco. O objetivo é determinar uma combinação de arcos, a custo total mínimo (custos de utilização mais custos dependentes), que conduza os fluxos, dos nós de oferta a todos os nós de demanda, possivelmente passando por nós intermediários de transbordo, também conhecidos como nós de *Steiner*.

Um problema NCFCF definido sobre o dígrafo da Figura 1 poderia ter o seguinte enunciado. *Quais seriam as estradas (arcos) a serem recuperadas, para escoar a produção da região i até os centros consumidores representados pelas regiões j e l, gastando o mínimo possível?* Supomos existir um custo fixo associado à escolha da estrada, representando obras de infra-estrutura, e um custo variável de utilização da estrada, representando obras de manutenção. A Figura 2 ilustra uma solução para o problema, que pode ser a *ótima*, dependendo dos custos fixos e variáveis considerados.

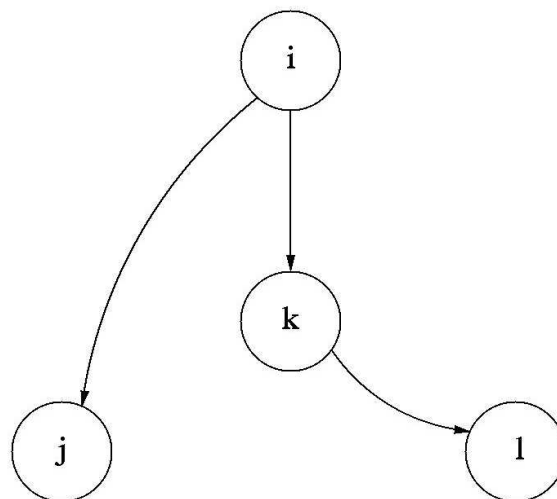


Figura 2: Uma Solução para o Problema NCFCF

A comparação de vários tratamentos, ou no nosso caso em particular de vários algoritmos, com relação a uma resposta ou medida de desempenho, envolve um estudo experimental e a análise estatística dos dados resultantes. Em estudos envolvendo algoritmos é razoável que o mesmo problema venha a ser resolvido por todos os algoritmos sob estudo. Esta situação é conhecida como

um planejamento experimental com medidas repetidas e vem sendo utilizado com frequência em várias áreas, como biologia, engenharia e ciências sociais. No nosso problema, iremos tratar de um estudo experimental com dois fatores (problema e algoritmo) com medidas repetidas em um deles (algoritmo).

Este artigo está organizado do seguinte modo. Na Seção 2, apresentamos mais detalhadamente o problema NCFCF, formalizando-o como um modelo de programação matemática inteira mista, e apresentamos também os algoritmos para a sua resolução. A Seção 3 é dedicada à apresentação do modelo estatístico para o planejamento com medidas repetidas, que é uma técnica adequada para a comparação dos desempenhos dos algoritmos propostos. Os dados são então apresentados, analisados e discutidos nas Seções 4 e 5. Finalmente, a Seção 6 é dedicada às conclusões gerais.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS

É muito importante formalizar matematicamente o problema NCFCF, pois os algoritmos de resolução são derivados diretamente da sua formulação. Um modelo de programação matemática inteira mista típica para o problema (Rardin e Wolsey, 1993), definida sobre o grafo direcionado $G=(N,E)$, é apresentado a seguir.

Modelo (M):

$$\min \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij} x_{ij} + f_{ij} y_{ij}) \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = \begin{cases} -\sum_{k \in D} d_k, & \forall i \in S, \\ 0, & \forall i \in T, \\ d_i, & \forall i \in D, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq \left(\sum_{k \in D} d_k \right) y_{ij}, \forall (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \forall (i, j) \in A, \quad (5)$$

onde c_{ij} é o custo variável por unidade de fluxo no arco (i,j) , x_{ij} é a quantidade de fluxo no arco, f_{ij} é o custo fixo pelo uso do arco (i,j) para transmissão do fluxo, y_{ij} é uma variável binária de decisão que assume o valor 0 se o arco (i,j) não está sendo usado e 1, caso contrário, $\delta^+(i) = \{j / (i,j) \in A\}$, δ^-

$(i)=\{j \mid (j,i) \in A\}$, d_i é a quantidade demandada pelo nó i , S é o conjunto de nós de oferta, T é o conjunto de nós de *Steiner* ou transbordo e D é o conjunto de nós de demanda.

A função objetivo (1) minimiza o custo total variável, associado aos fluxos, e o custo total fixo, associado ao uso dos arcos. As restrições (2) garantem a conservação dos fluxos nos diversos nós. Para os nós de oferta, a quantidade de fluxo que chega menos a que sai deve ser igual ao somatório das demandas, com o sinal trocado. Essa restrição é redundante. Nos nós de transbordo, a quantidade de fluxo que chega deve ser igual à que sai. Finalmente, nos nós de demanda, a quantidade de fluxo que chega menos a que sai deve ser igual à demanda interna do nó, d_i . As restrições (3) asseguram que não haja fluxo através do arco (i,j) , a menos que ele tenha sido selecionado na função objetivo.

Assumimos que o custo fixo f_{ij} seja não negativo, pois caso contrário, a variável y_{ij} poderia ser feita igual a 1 e simplesmente eliminada do problema. A variável c_{ij} é irrestrita, mas para garantir que a função objetivo seja limitada por baixo, assumimos que não existam *circuitos* com custo negativo.

2.1 Algoritmos Anteriores

Vários trabalhos já foram publicados anteriormente descrevendo algoritmos exatos e aproximados para o problema NCFCF e alguns casos particulares. No artigo de Rothfarb *et al.* (1970), modelando o problema de coleta de gás natural de estações em alto mar para locais de armazenamento em terra, foi desenvolvido um algoritmo para resolver um caso particular, onde era considerada uma estrutura de custos mais simples, sem custos variáveis nos arcos. Em Luna *et al.* (1987), foi estudado um modelo um pouco mais complexo, usado para modelar o problema de planejamento de redes locais em telefonia. No artigo de Luna *et al.* (1987) foram apresentados algoritmos heurísticos (não exatos) e algumas técnicas de otimização local. O caso especial sem nós de transbordo, foi tratado por Magnanti *et al.* (1986) e por Hochbaum e Segev (1989), usando algoritmos do tipo separação e avaliação associados à técnica de decomposição de Benders e à relaxação lagrangeana. Maiores detalhes sobre a técnica de relaxação lagrangeana, a ser mencionada mais vezes neste artigo, podem ser encontrados em Fisher (1985).

Considerando o problema geral NCFCF, notamos contribuições tanto em algoritmos exatos, quanto em algoritmos aproximados. Em Mateus *et al.* (1994), procedimentos heurísticos (ou aproximados) do tipo *ADD* e *DROP*, conhecidos na área, foram estudados. Em Cruz *et al.* (1994), uma heurística baseada em relaxação lagrangeana foi proposta. No artigo recente de Cruz *et al.* (1998), um

algoritmo exato, do tipo separação e avaliação, foi desenvolvido, baseado na técnica da relaxação lagrangeana, com um desempenho prático satisfatório.

2.2 Algoritmo Proposto

Nossa proposta se baseia no algoritmo do tipo separação e avaliação, desenvolvido recentemente por Cruz *et al.* (1998). Neste algoritmo, tenta-se resolver o modelo gerando limites superiores, ou soluções *viáveis* (*i.e.* que atendam a todas as restrições), e limites inferiores. Estes últimos usualmente são determinados por alguma *relaxação* do problema original. Neste artigo, usamos a relaxação lagrangeana para esse fim (vide Fisher, 1985, para maiores detalhes). Se os limites superior e inferior são coincidentes, significa que o problema está resolvido, sendo que a solução viável é também uma solução *ótima*. Caso contrário, usa-se algum critério para escolher uma variável y_{ij} , *e.g.* o critério desenvolvido por Cruz *et al.* (1998), que será então fixada nos dois valores possíveis, 0 e 1, gerando subproblemas menores que terão seus limites inferior e superior novamente computados. O algoritmo fixa variáveis do problema original tantas vezes quanto necessárias, até resolvê-lo. O algoritmo é ilustrado na Figura 3.

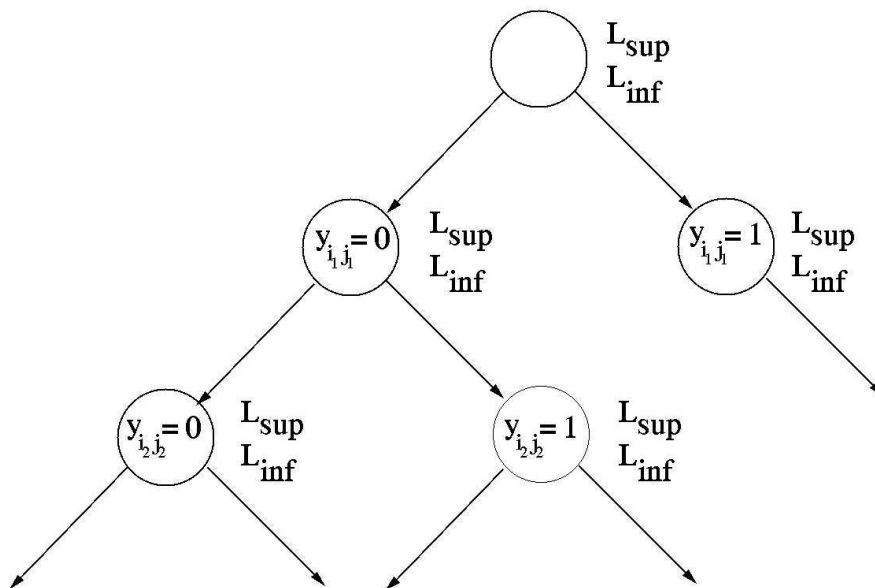


Figura 3: Algoritmo de Separação e Avaliação

Conforme notado por Cruz *et al.* (1998), os limites inferiores gerados pela relaxação lagrangeana obtida diretamente do modelo (M) são usualmente *fracos*, *i.e.* são muito distantes do valor ótimo. Pretendemos, então, apresentar resultados nos quais é usada uma formulação modificada que consiste em acrescentar ao modelo (M) a restrição adicional:

$$|Y| \geq \beta, \quad (6)$$

onde Y é o conjunto de arcos presentes na solução, ou seja $Y = \{(i,j) \mid y_{ij} = 1\}$, $|Y|$ é a cardinalidade de Y e β é o limite inferior para a cardinalidade de Y .

Pode ser mostrado que para *pequenos* valores de β , a restrição acrescida é *redundante*, o que significa que a sua inclusão ou exclusão não altera a solução ótima do modelo original. Entretanto, é sabido que o problema com essa restrição adicional é computacionalmente mais complexo, demandando um tempo maior de processamento. Uma questão importante é descobrir se essa restrição adicional, mesmo aumentando a dificuldade do modelo, é capaz de aumentar os limites inferiores gerados pela relaxação lagrangeana, o suficiente para conseguir melhorar o desempenho global do algoritmo de separação e avaliação. Em outras palavras, é de grande interesse saber se o novo algoritmo derivado do modelo (M), com a restrição (6) incluída, resolve mais rapidamente o problema.

3 EXPERIMENTOS FATORIAIS COM MEDIDAS REPETIDAS

Experimentos com medidas repetidas utilizam o mesmo sujeito (pessoa, planta, programa, *etc.*) nos tratamentos sob estudo. As medidas repetidas podem ocorrer em vários tratamentos ou somente em um único que é desenvolvido em diferentes ocasiões ao longo do tempo. Nesta seção, vamos apresentar experimentos fatoriais com dois fatores e com medidas repetidas em somente um deles. Esta é a situação do problema experimental que é apresentado na Seção 4. Em Neter *et al.* (1990), o tema é apresentado em abrangência, sendo, portanto, uma fonte de consulta recomendada para outras situações envolvendo outros planejamentos fatoriais com medidas repetidas.

Duas aleatorizações são necessárias em um experimento fatorial a dois fatores, com medidas repetidas em um deles. Inicialmente, uma amostra aleatória do fator que não é repetido, o qual denotaremos por A , é obtida para cada um dos seus níveis. Em seguida, a ordem dos níveis do fator sujeito a medidas repetidas, o qual denotaremos por B , precisa ser aleatorizada, para todos os problemas. A Tabela 1 mostra esta situação, retratando o caso experimental em que os fatores A e B têm somente dois níveis.

O modelo para este delineamento experimental, supondo o fator A com a níveis e o B com b níveis, pode ser escrito como:

$$Y_{ijk} = \mu_{...} + \rho_{i(j)} + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{(ijk)} \quad (7)$$

onde $\mu_{...}$ é o efeito geral da média, $\rho_{i(j)}$ são componentes de variância independentes com distribuição $N(0, \sigma_p^2)$, α_j é o efeito do fator A , sujeito à restrição $\sum \alpha_j = 0$, β_k é o efeito do fator B , sujeito à restrição $\sum \beta_k = 0$, $(\alpha\beta)_{jk}$ é o efeito da interação entre os dois fatores, sujeito à restrição $\sum (\alpha\beta)_{jk} = 0$, tanto em relação a j quanto em relação a k , $\varepsilon_{(ijk)}$ é o erro aleatório, com distribuição $N(0, \sigma^2)$ e independente de $\rho_{i(j)}$, para $i=1, \dots, n; j=1, \dots, a; k=1, \dots, b$.

Tabela 1: Representação de um Experimento Fatorial com Fatores A e B , com Medidas Repetidas em B

| Fator A | Problema | Fator B | |
|---------|----------|----------|----------|
| | | 1 | 2 |
| A_1 | 1 | A_1B_1 | A_1B_2 |
| | . | . | . |
| | . | . | . |
| | n | A_1B_1 | A_1B_2 |
| A_2 | $n+1$ | A_2B_1 | A_2B_2 |
| | . | . | . |
| | . | . | . |
| | $2n$ | A_2B_1 | A_2B_2 |

A soma de quadrados (SQ) na tabela de análise de variância (ANOVA) e seus respectivos graus de liberdade podem ser obtidas da forma usual (Neter *et al.*, 1990). As esperanças dos quadrados médios necessários para testar as hipóteses de interesse estão mostradas na Tabela 2.

Tabela 2: Esperança dos Quadrados Médios para o Planejamento Fatorial com Dois Fatores A e B e Medidas Repetidas em B

| Fonte de Variação | Quadrado Médio (QM) | E(QM) |
|--------------------|---------------------|--|
| Fator A | QMA | $\sigma^2 + b\sigma_p^2 + bn \frac{\sum \alpha_j^2}{(a-1)}$ |
| Fator B | QMB | $\sigma^2 + an \frac{\sum \beta_k^2}{(b-1)}$ |
| Interação AB | $QMAB$ | $\sigma^2 + n \frac{\sum \sum (\alpha\beta)_{jk}^2}{(a-1)(b-1)}$ |
| Problema (Fator A) | $QMS(A)$ | $\sigma^2 + b\sigma_p^2$ |
| Erro | QME | σ^2 |

A partir das esperanças dos quadrados médios mostradas na Tabela 2, é possível testar as hipóteses de interesse. Inicialmente, devemos testar a existência do efeito de interação entre os fatores A e B . Ou seja, para testar as hipóteses:

$$H_0: \text{ todos } (\alpha\beta)_{jk} = 0, \text{ contra}$$

$$H_1: \text{ pelo menos um } (\alpha\beta)_{jk} \neq 0,$$

para $j=1, \dots, a; k=1, \dots, b$, usamos a estatística:

$$F_{AB} = \frac{QMAB}{QME},$$

que sob H_0 tem uma distribuição com F com $(a-1)(b-1)$ e $a(n-1)(b-1)$ graus de liberdade.

O teste para o efeito do fator A ou seja,

H_0 : todos $\alpha_j = 0$, contra

H_1 : pelo menos um $\alpha_j \neq 0$,

para $j=1, \dots, a$; é feito usando a estatística:

$$F_A = \frac{QMA}{QMS(A)},$$

que sob H_0 tem uma distribuição com F com $(a-1)$ e $a(n-1)$ graus de liberdade.

O teste para o efeito do fator B ,

H_0 : todos $\beta_k = 0$, contra

H_1 : pelo menos um $\beta_k \neq 0$,

para $k=1, \dots, b$, é executado usando a estatística:

$$F_B = \frac{QMB}{QME},$$

que sob H_0 tem uma distribuição com F com $(b-1)$ e $a(n-1)(b-1)$ graus de liberdade.

Existindo efeito dos fatores principais, comparações múltiplas devem ser realizadas para que possamos identificar os níveis dos fatores que se diferem. Vários métodos de comparações múltiplas existem na literatura, como Tukey, LSD, e Duncan, entre outros (ver Neter *et al.*, 1990, para maiores detalhes). As suposições feitas sobre os componentes do modelo (7) devem ser verificadas para validarem os testes descritos. Técnicas usuais, especialmente envolvendo resíduos, devem ser utilizadas para esta finalidade (Neter *et al.*, 1990).

4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Uma versão dos vários algoritmos foi codificada e é disponibilizada pelos autores aos interessados, sob pedido. Todos os testes foram executados no Laboratório de Pesquisa Operacional (LaPO) do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, utilizando-se uma estação de trabalho *Sun Ultra 1*, Modelo 140, com 128 MBytes de RAM, rodando o sistema operacional SunOS, *Release 5.5.1*. Todos os problemas de teste são derivados de grafos euclidianos gerados aleatoriamente, segundo procedimento apresentado no trabalho de Aneja (1980) e já consagrado na área. De acordo com tal procedimento, as posições dos nós, as extremidades dos arcos, os seus pesos, o nó de oferta (consideramos apenas problemas com fonte única, por questão de simplicidade) e os nós de demanda são escolhidos aleatoriamente, segundo a distribuição uniforme. Leitores interessados em maiores detalhes são encorajados a consultar o trabalho de Aneja (1980).

A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos. Para cada um dos vinte e cinco problemas testados, mostramos a razão f_{ij}/c_{ij} e o número de arcos presentes na solução ótima, denotado por $|Y|^*$. Apresentamos também, para cada um dos quatro algoritmos testados, o número total de separações e avaliações (coluna *Nós*) e o tempo total, em segundos, gasto para processamento. Os problemas foram divididos em classes. A primeira corresponde àqueles problemas com razão $f_{ij}/c_{ij}=100$. Esses são problemas próximos ao problema de *Steiner* em grafos, muito difíceis de serem resolvidos, usualmente necessitando de um tempo de processamento maior. Por outro lado, a última classe corresponde àqueles problemas com razão $f_{ij}/c_{ij}=0,01$, que são próximos ao problema linear de fluxos, computacionalmente mais fáceis, necessitando de tempos de processamento menores. A classe de problemas é o correspondente ao fator *A* da Tabela 2. O algoritmo, que inclui medidas repetidas, é o correspondente ao fator *B* da Tabela 2.

Os quatro algoritmos considerados para resolver cada um dos problemas testes são descritos a seguir. O primeiro corresponde a resolver o problema usando o modelo sem a restrição adicional, significando que a cardinalidade do conjunto *Y* foi deixada livre, *i.e.* não havia um limite para o número mínimo de arcos presentes na solução do problema. O segundo algoritmo também deixa a cardinalidade do conjunto livre, mas considera a restrição adicional. Esses dois casos foram considerados unicamente com o objetivo de verificar empiricamente o impacto da inclusão da restrição adicional na dificuldade computacional do modelo. Os demais casos fixam a cardinalidade em dois valores. O primeiro é uma cardinalidade mínima óbvia, imediata pela consideração de que deve haver pelo menos um arco entrando em cada um dos nós de demanda, o que significa que $|Y|=|D|$. Entretanto, conforme mostraremos na próxima seção na análise dos dados, esse limite não

é eficaz, pois não consegue reduzir substancialmente o número de separações e avaliações nem o tempo de processamento. O segundo, usa o limite mais justo possível. Sobre a determinação desse limite justo, é importante ressaltar que, infelizmente, no estágio atual da nossa pesquisa, somente conseguimos calculá-los pela resolução completa do problema NCFCF, através do primeiro algoritmo.

Tabela 3: Resultados Computacionais ($|N|=16$, $|A|=60$ e $|D|=6$)

| Classe | f_{ij}/c_{ij} | Problema | $ Y ^*$ | Modelo (M) com a Restrição Adicional (6) | | | | | | | |
|--------|-----------------|----------|---------|--|---------|-----------|---------|-------------|---------|---------------|---------|
| | | | | Modelo (M) | | $\beta=0$ | | $\beta= D $ | | $\beta= Y ^*$ | |
| | | | | Nós | UCP (s) | Nós | UCP (s) | Nós | UCP (s) | Nós | UCP (s) |
| 100 | B01 | 10 | 3.875 | 110,00 | 3.875 | 170,00 | 6.053 | 270,00 | 2.231 | 110,00 | |
| | B02 | 9 | 201 | 8,10 | 201 | 12,00 | 215 | 14,00 | 65 | 5,00 | |
| | B03 | 7 | 157 | 6,70 | 157 | 11,00 | 283 | 17,00 | 135 | 7,70 | |
| | B04 | 7 | 359 | 12,00 | 359 | 17,00 | 255 | 12,00 | 55 | 3,40 | |
| | B05 | 8 | 683 | 21,00 | 683 | 33,00 | 831 | 41,00 | 519 | 25,00 | |
| 10 | B06 | 10 | 2.533 | 71,00 | 2.533 | 110,00 | 4.201 | 180,00 | 1.431 | 69,00 | |
| | B07 | 9 | 183 | 7,00 | 183 | 10,00 | 183 | 11,00 | 49 | 3,40 | |
| | B08 | 7 | 97 | 4,40 | 97 | 6,90 | 263 | 15,00 | 131 | 7,30 | |
| | B09 | 7 | 119 | 4,20 | 119 | 6,40 | 63 | 3,40 | 15 | 1,10 | |
| | B10 | 8 | 497 | 15,00 | 497 | 23,00 | 565 | 26,00 | 347 | 17,00 | |
| 1 | B11 | 10 | 245 | 7,70 | 245 | 12,00 | 369 | 18,00 | 147 | 7,00 | |
| | B12 | 9 | 59 | 2,50 | 59 | 3,90 | 133 | 8,30 | 31 | 2,20 | |
| | B13 | 8 | 25 | 1,60 | 25 | 2,50 | 45 | 2,90 | 3 | 0,48 | |
| | B14 | 7 | 33 | 1,10 | 33 | 1,70 | 29 | 1,30 | 9 | 0,73 | |
| | B15 | 8 | 77 | 2,90 | 77 | 4,50 | 77 | 4,20 | 49 | 2,40 | |
| 0,1 | B16 | 10 | 7 | 0,52 | 7 | 0,77 | 11 | 0,96 | 5 | 0,55 | |
| | B17 | 9 | 61 | 1,70 | 61 | 2,70 | 71 | 3,10 | 25 | 1,30 | |
| | B18 | 8 | 1 | 0,20 | 1 | 0,29 | 1 | 0,28 | 1 | 0,27 | |
| | B19 | 7 | 9 | 0,46 | 9 | 0,70 | 9 | 0,66 | 9 | 0,70 | |
| | B20 | 8 | 1 | 0,22 | 1 | 0,32 | 13 | 0,82 | 1 | 0,35 | |
| 0,01 | B21 | 10 | 1 | 0,20 | 1 | 0,28 | 1 | 0,28 | 1 | 0,31 | |
| | B22 | 8 | 25 | 0,73 | 25 | 1,10 | 25 | 1,10 | 1 | 0,31 | |
| | B23 | 8 | 1 | 0,20 | 1 | 0,29 | 1 | 0,28 | 1 | 0,27 | |
| | B24 | 7 | 1 | 0,19 | 1 | 0,26 | 1 | 0,26 | 1 | 0,26 | |
| | B25 | 8 | 1 | 0,20 | 1 | 0,29 | 1 | 0,28 | 1 | 0,28 | |

5 ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, foram gerados de forma aleatória cinco problemas de cada uma das cinco classes de problemas ($f_{ij}/c_{ij} = 100, 10, 1, 0,1$ e $0,01$). Cada problema foi resolvido pelos quatro algoritmos em uma ordem aleatória de execução. É imediato o reconhecimento do planejamento de um experimento com dois fatores (classe de problemas e algoritmo) e medidas repetidas em um deles (algoritmo). Na análise de variância, ambos os fatores são de interesse, bem como a possível interação entre eles. Por questão de simplicidade, consideramos apenas o tempo de processamento como variável resposta de interesse, mas ressaltamos que poderíamos estar interessados também em comparar os algoritmos por outros critérios de desempenho, como, por exemplo, quanto ao número

total de separações e avaliações (coluna *Nós*, da Tabela 3). A transformação logarítmica é uma das mais utilizadas em situações cuja resposta é o tempo até a ocorrência de um evento de interesse (Lawless, 1982), para tornar simétrica a sua distribuição. Esta foi a transformação usada na nossa análise. Considerando o logaritmo natural dos tempos de UCP como variável resposta, ajustamos o modelo (7). Todas as suposições associadas ao modelo utilizado foram verificadas e confirmadas. Na Tabela 4, apresentamos os resultados, obtidos usando o *MINITAB*[®] para *WINDOWS*[®]. Pela coluna de *p*-valores, notamos que tanto as classes de problemas quanto os algoritmos têm um efeito significativo na variável resposta. Por outro lado, não há evidência de que exista interação entre os fatores, classe de problemas e algoritmo. Podemos observar uma grande variabilidade entre os problemas da mesma classe.

Tabela 4: Análise de Variâncias (planejamento balanceado)

| Fonte de Variação | Graus de Liberdade | Soma de Quadrados | Quadrado Médio | F | p-valor |
|----------------------------------|--------------------|-------------------|----------------|-------|---------|
| Classes de Problemas | 4 | 268.195 | 67.049 | 17.45 | 0.000 |
| Problemas (Classes de Problemas) | 20 | 76.835 | 3.842 | 42.37 | 0.000 |
| Algoritmos | 3 | 8.261 | 2.754 | 30.37 | 0.000 |
| Classe de Problemas x Algoritmo | 12 | 1.494 | 0.125 | 1.37 | 0.204 |
| Erro | 60 | 5.440 | 0.091 | - | - |
| Total | 99 | 360.226 | - | - | - |

Prosseguindo, usamos o método de Duncan para comparação múltipla das médias e formamos seus respectivos intervalos de confiança de 90%, apresentados na Figura 4. Os dados mostram alguma evidência de que o quarto algoritmo tem um desempenho melhor que os demais. Os dados também confirmam a nossa suspeita de que problemas com uma razão f_{ij}/c_{ij} alta são significativamente mais difíceis de tratar, não importando qual algoritmo esteja sendo usado.

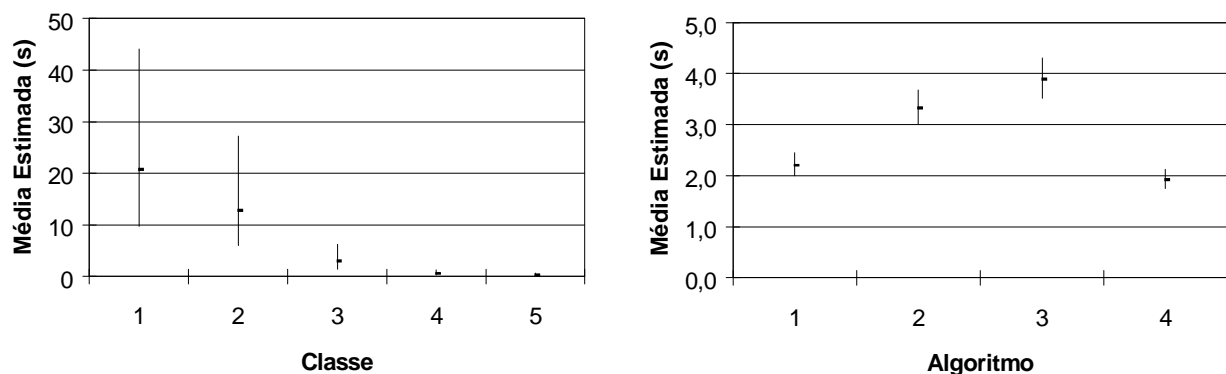


Figura 4: Intervalos de Confiança (90%)

6 CONCLUSÕES

Utilizamos o planejamento com medidas repetidas para comparar quatro algoritmos para resolução de um importante problema de otimização em redes, o problema não capacitado de fluxos com custos fixos nos arcos (NCFCF). Formulamos o problema NCFCF como um modelo de programação matemática inteira mista, para uma apresentação conveniente dos quatro algoritmos que pretendíamos comparar estatisticamente. Este é um problema recorrente na área de desenvolvimento de algoritmos. A metodologia apresentada neste artigo é geral e pode ser aplicada a qualquer outro experimento que envolva comparações múltiplas de natureza semelhante.

Trabalhos futuros poderiam envolver a comparação dos algoritmos descritos segundo outros critérios de desempenho, como por exemplo, o número de nós explorados no algoritmo de separação e avaliação. Também poderiam incluir a investigação de outros tipos de planejamentos, para verificação da sua adequação ao problema de comparação múltipla de algoritmos.

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de deixar expressos os nossos agradecimentos aos Professores Emílio Suyama (ICEx-UFMG) e Rinaldo Artes (IME-USP), pelas valiosas críticas e sugestões, bem como ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, e à Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais, FAPEMIG, pelo apoio financeiro à nossa pesquisa.

BIBLIOGRAFIA

- ANEJA, Y. P. An Integer Linear Programming Approach to Steiner Problem in Graphs. *Networks*, v. 10, p. 167-178, 1980.
- CRUZ, F. R. B., ALMEIDA, J. A., MATEUS, G. R. Análise do Problema de Planejamento de Redes Telefônicas de Alimentação. In: *Congresso Brasileiro de Automática*, 10, 1994. Rio de Janeiro. *Anais ... Rio de Janeiro: SBA*, 1994, p. 572-577.
- CRUZ, F. R. B., MACGREGOR SMITH, J., MATEUS, G. R. Solving to Optimality the Uncapacitated Fixed-Charge Network Flow Problem. *Computers and Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 67-81, 1998.
- FISHER, M. L. An Application Oriented Guide to Lagrangean Relaxation. *Interfaces*, v. 15, p. 10-21, 1985.
- HOCHBAUM, D. S., SEGEV, A. Analysis of a Flow Problem with Fixed Charges. *Networks*, v. 19, p. 291-312, 1989.
- LAWLESS, J. F. *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- LUNA, H. P. L., ZIVIANNI, N., CABRAL, R. M. B. The Telephonic Switching Centre Network Problem: Formalization and Computational Experience. *Discrete Applied Mathematics*, v. 18, p. 199-210, 1987.
- MAGNANTI, T. L., MIREAULT, P., WONG, R. T. Tailoring Benders Decomposition for Uncapacitated Network Design. *Mathematical Programming Study*, v. 26, p. 112-154, 1986.
- MATEUS, G. R., CRUZ, F. R. B., LUNA, H. P. L. An Algorithm for Hierarchical Network Design. *Location Science*, v. 2, n. 3, p. 149-164, 1994
- NETER, J., WASSERMAN, W., KUTNER, M. H. *Applied Linear Statistical Models: Regression, Analysis of Variance, and Experimental Designs*. Illinois: Homewood, 3.ed., 1990.
- RARDIN, R. L., WOLSEY, L. A. Valid Inequalities and Projecting the Multicommodity Extended Formulation for Uncapacitated Fixed Charge Network Flow Problems. *European Journal of Operational Research*, v. 71, p. 95-109, 1993.
- ROTHFARB, B., FRANK, H., ROSEMBAUN, D. M., STEIGLITZ, K. Optimal Design of Offshore Natural-Gas Pipeline Systems. *Operations Research*, v. 18, p. 992-1020, 1970.