

Aplicando a Geoestatística no Controle Estatístico de Processos

Sueli A. Mingoti - Ph.D. em Estatística

Departamento de Estatística - Universidade Federal de Minas Gerais

Marcela T. Fidelis - Bacharel em Estatística

Departamento de Estatística - Universidade Federal de Minas Gerais

RESUMO

O Controle Estatístico de Processos tem como objetivo detectar rapidamente alterações dos parâmetros do processo, para que os problemas possam ser corrigidos antes que muitos itens não conformes sejam produzidos. Os parâmetros que caracterizam a qualidade do processo são estimados com base em amostras constituídas de itens do processo. Em geral, os procedimentos estatísticos de estimação utilizados baseiam-se na suposição de independência entre as unidades amostrais do processo no que se refere a característica de qualidade avaliada, algo questionável especialmente para processos químicos. O desprezo das possíveis correlações reflete na precisão das estimativas, aumentando a ocorrência de "alarmes falsos" se a correlação entre as unidades for positiva. O objetivo deste artigo é mostrar como as correlações podem ser incorporadas na estimação da variabilidade de processos através da metodologia de Geoestatística. Neste caso, os Gráficos de Controle usuais de Shewhart ainda poderiam ser utilizados para o monitoramento da qualidade do processo.

Palavras-Chave: Variabilidade; Processos Industriais; Geoestatística; Semi-Variograma.

ABSTRACT

Statistical quality control is used to detect possible changes in the parameters values of the process so that problems could be corrected before many non-conforming items would be produced. The parameters of the process are estimated by using sampling procedures which are based on the assumption of independence of the sampling units with respect to the quality characteristic being evaluated. This assumption is very questionable specially for chemical processes. When the estimation is performed without taking into account the existing correlation structure of the process, the precision of the estimates decreases, and in the presence of positive correlation the occurrence of "false alarms" increases. The main objective of this paper is to show how the correlation structure can be incorporated in the estimation procedure by using Geostatistics methodology. In this case, the usual Shewhart's Control Charts still can be used to monitor the quality of the process.

Key Words: Variability; Industrial Processes; Geostatistics; Semi-Variogram.

1. Introdução

Dentre as metodologias utilizadas para monitorar a qualidade de processos está o Gráfico de Controle proposto por Shewhart (1939). Basicamente, ele é uma representação gráfica do comportamento da característica de qualidade medida em uma amostra ou em várias amostras do processo, em relação à ordem de coleta das várias amostras ou dos itens de uma mesma amostra. Este gráfico delimita uma região na qual os valores da característica de qualidade (X), ou da média da característica, devem permanecer enquanto o processo estiver sob a condição de "controle estatístico de qualidade". O gráfico para média, por exemplo (Figura 1), contém uma Linha Central (LC) que representa o valor médio da característica de qualidade e duas outras linhas horizontais chamadas respectivamente de Limite Superior de Controle (LSC) e Limite Inferior de Controle (LIC), determinados utilizando-se a suposição de que a característica de qualidade tem distribuição Normal. Pontos amostrais dentro dos limites de controle equivalem a não rejeitar a hipótese de que o processo está "sob controle estatístico" e pontos fora dos limites equivalem a rejeitar esta hipótese (Montgomery, 1996). Como existe uma probabilidade de rejeitar-se a hipótese de falta de "controle estatístico" erroneamente, existe sempre a possibilidade de ocorrência do chamado "alarme falso", ou seja pontos amostrais situam-se fora dos limites de controle devido a aleatoriedade da distribuição Normal e não devido ao fato de ocorrência de alteração nos parâmetros do processo. Sob a suposição de Normalidade, os limites de controle para a média do processo são dados pelas seguintes equações:

$$LSC = \mu + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \quad LC = \mu ; \quad LIC = \mu - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

onde μ é a média da característica de qualidade de interesse, σ é o desvio padrão do processo e k é a distância dos limites de controle em relação à linha central expressa em unidades de desvio padrão. No sistema de controle de qualidade usual utiliza-se $k = 3$. Nesse caso, a porcentagem de ocorrência de "alarme falso" é delimitada em 0,27%.

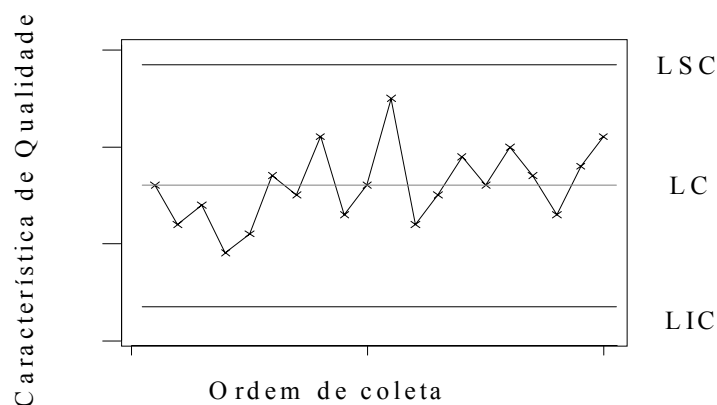


Figura 1. Forma Geral de um Gráfico de Controle para Média

Na prática os valores de μ e σ são estimados a partir de amostras do processo produtivo, quando este está apenas sob o efeito de "causas comuns" ou "aleatórias". Suponha que tenhamos $m \geq 2$ amostras independentes, do processo, cada uma de tamanho $n \geq 1$, e que para cada amostra tenha sido calculado a média amostral \bar{X}_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Neste caso, o parâmetro μ é estimado por:

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$$

Os estimadores do desvio padrão σ do processo usualmente utilizados são o estimador clássico de variabilidade ($\hat{\sigma}_1$) e o estimador de amplitude ($\hat{\sigma}_2$) definidos, respectivamente, por:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{\bar{s}}{c_4} \quad \text{onde} \quad \bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^m s_i}{m} \quad \text{e} \quad s_i = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 \right]^{1/2} \quad (1.1)$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \text{onde} \quad \bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m} \quad (1.2)$$

onde R_i é a amplitude da i -ésima amostra, s_i é o desvio padrão amostral da i -ésima amostra, $i = 1, 2, \dots, m$, e c_4 e d_2 constantes tabeladas em função do tamanho n das m amostras coletadas. No caso em que $n = 1$, o estimadores clássicos do desvio padrão utilizados são o do desvio padrão amostral e o da amplitude móvel, dados respectivamente por:

$$\hat{\sigma}_1 = \left[\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \right]^{1/2}, \quad \text{sendo} \quad \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (1.3)$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{\overline{AM}}{1,128}, \quad \text{onde} \quad \overline{AM} = \frac{\sum_{i=2}^m AM_i}{m} \quad \text{e} \quad AM_i = |X_i - X_{i-1}| \quad (1.4)$$

onde \overline{AM}_i é a amplitude média da i -ésima amostra, e 1,128 é o valor da constante d_2 para amostras de tamanho $n = 2$. Embora o estimador $\hat{\sigma}_2$ seja não viciado para σ , para amostras de tamanho maior que 10 ele apresenta uma precisão menor. Entretanto, por ser mais simples em termos de cálculo, este estimador é ainda utilizado por algumas empresas que não têm um controle estatístico computacionalmente automatizado.

Todos estes procedimentos de estimação estão fundamentados na suposição de independência entre as unidades amostrais do processo no que se refere a característica de qualidade avaliada, algo questionável especialmente para processos químicos (Zhang, 1998). No caso por exemplo, de um processo contínuo de produção, a correlação entre duas unidades amostrais consecutivas tende a 1 quando o intervalo de tempo entre elas se aproxima de 0 (Amorim e Costa, 1994).

O desprezo das possíveis correlações entre as unidades amostrais na construção de modelos estatísticos, pode deturpar as estimações feitas para a variabilidade do processo, aumentando assim a ocorrência de "alarmes falsos" se a correlação entre as unidades amostrais for positiva, pois por não considerar as correlações na estimação da variância os limites de controle calculados serão menores que os reais. Por outro lado, se a

correlação for sempre negativa, os limites de controle serão maiores que os reais, o que levaria a não percepção da condição de "falta de controle" em muitas situações nas quais ela estaria ocorrendo (Alwan e Roberts, 1995). Deste modo, é importante que correções sejam feitas nos procedimentos de estimação da variabilidade de processos quando as correlações entre unidades amostrais estão presentes e fazem parte intrínseca do processo. Correlações positivas ocorrem com mais frequência na prática (Zhang, 1998; Box e Luceno, 1997).

Este problema da existência de correlação tem sido abordado na literatura por vários autores que propõem formas alternativas para o monitoramento do processo dentro do contexto de Séries Temporais (ver Alwan e Roberts, 1989; Runger e Willemain, 1995). Uma destas alternativas é o monitoramento via a identificação e ajuste do modelo ARIMA (Box e Jenkins, 1976) mais apropriado para descrever o comportamento da série de observações do processo. Após o ajuste, os resíduos do modelo são obtidos e os Gráficos de Controle de Shewhart são aplicados à série de resíduos, uma vez que por hipótese estes seriam independentes e identicamente distribuídos com distribuição Normal. As mudanças que ocorrem na média do processo são refletidas no comportamento dos resíduos que portanto, serviriam para monitoramento do processo (Box e Luceno, 1997; Freitas e Castro, 1995). Embora interessante, esta alternativa é um pouco trabalhosa pois além da identificação de um modelo ARIMA exige também que os resíduos sejam calculados para cada nova amostra coletada. Se pensarmos que em geral, os processos são monitorados por várias características de qualidade simultaneamente, o uso desta alternativa consumiria um tempo considerável em situações práticas (Montgomery e Mastrangelo, 1991).

Uma outra alternativa ainda dentro deste contexto, é a monitoração do processo via a estatística *EWMA* (*Exponentially Weighted Moving Average*) proposta inicialmente por Roberts (1959) e discutida por vários autores, entre eles, Mastrangelo e Montgomery (1991), Hunter (1986, 1998) e Epprecht, Ninio e Souza (1998). A estatística *EWMA* (Derman e Ross, 1997) é definida por:

$$Z_t = \lambda X_t + (1 - \lambda) Z_{t-1} \quad (1.5)$$

onde $0 \leq \lambda \leq 1$ é uma constante que precisa ser determinada, e X_t é a característica de qualidade X observada na amostra t , $t = 1, 2, \dots, m$. Usando o modelo (1.5) os erros de previsão a um passo são obtidos e o processo passa a ser monitorado através do Gráfico de Controle de Shewhart aplicado à série dos erros de previsão a um passo que teoricamente seriam não correlacionados. A escolha da constante λ é discutida por vários autores entre eles Crowder (1989), Lucas e Saccucci (1990), Box e Luceno (1997) e Epprecht, Ninio e Souza (1998). Basicamente, busca-se a constante λ que minimiza a Soma de Quadrados dos erros de previsão a um passo do modelo. Hunter (1998) mostra que o gráfico de controle via a estatística *EWMA* pode ser eficiente e mais simples de ser implementado na rotina diária das empresas pelo fato de ser um procedimento mais automático do que o descrito anteriormente, que exige a identificação e ajuste de um modelo ARIMA.

Além do tratamento da correlação dentro do contexto de Séries Temporais há também a proposta de se resolver o problema através da escolha do intervalo ótimo de amostragem para se coletar as observações do processo. Neste caso, escolheria-se aquele intervalo de amostragem que eliminasse a correlação entre amostras no que se refere a característica de qualidade de interesse. Esta opção entretanto, pode ser problemática pois o intervalo ótimo para eliminação da correlação pode vir a ser muito grande, o que permitiria que muitos itens não-conformes fossem produzidos antes que as anomalias do processo fossem detectadas. Além disso, para vários processos contínuos de produção esta opção não seria possível de ser implementada.

O objetivo deste artigo é propor uma forma alternativa, automática e mais simples, para se monitorar o processo na presença de correlação, e que evitaria a identificação e ajuste de modelos ARIMA como também o cálculo de resíduos ou erros de predição a um passo. Nossa proposta é que o desvio padrão do processo seja estimado através de um procedimento que leve naturalmente em consideração a correlação existente entre as unidades do processo, no que se refere à característica de qualidade avaliada. Deste modo, o processo seria monitorado através dos Gráficos de Controle usuais de Shewhart aplicados à variável original de interesse, sendo que a correção dos gráficos devido a presença da correlação estaria automaticamente incorporada nos limites de controle LIC e LCS via a nova forma de estimação de σ .

A metodologia que estamos propondo para a construção de novos estimadores de σ é a Geoestatística (Cressie, 1993; Isaacs e Srivastava, 1990; Houlding, 2000). Na seção a seguir, vamos descrever brevemente os pontos principais desta metodologia e que fundamentarão o que será discutido neste artigo.

2. A Metodologia de Geoestatística

2.1 Breve Introdução

A metodologia de Geoestatística foi inicialmente formulada para tratamento de dados geológicos (Matheron, 1962, 1963b). Em linhas gerais, suponha que tenhamos uma amostra aleatória de uma variável de interesse X e que esta amostra tenha sido coletada em várias localizações distintas de uma determinada região. Neste caso, considerando-se o comportamento de variação da variável X em relação às coordenadas de localização da amostra, é possível construirmos um modelo estatístico para prever-se o valor de X para localizações que não foram amostradas previamente. Este modelo incorpora a informação da relação existente entre os valores de X para localizações diferentes via uma função chamada de Semi-Variograma e que tem um papel fundamental no procedimento de predição espacial chamado de Krigagem (Matheron 1963b; Krige, 1951). A krigagem permite que o valor de X para uma nova localização s_0 por exemplo, seja predito com base no comportamento dos valores de X de uma vizinhança de s_0 . Além da função de Semi-Variograma, outras funções de variabilidade espacial podem ser utilizadas como Madograma e Rodograma por exemplo (Mingoti, 1996).

Embora a metodologia de Geoestatística possa ser utilizada para localizações no espaço \mathfrak{R} , a maioria dos exemplos de aplicação estão relacionados com espaços \mathfrak{R}^d , $d \geq 2$. A título de ilustração poderíamos citar a indústria de mineração que usa rotineiramente a Geoestatística tanto na avaliação do potencial de jazidas como na planta de produção e no laboratório de análises para por exemplo, determinar os intervalos de amostragem mais adequados para a realização de uma amostragem sistemática do minério produzido. Algumas referências da aplicação de Geoestatística em mineração são Journell e Huijbregts (1997), e Bonato, Costa e Koppe (2000). Outras referências importantes e que tratam do uso da Geoestatística na engenharia e na amostragem de materiais de fluxo contínuo são Gy (1982, 1998). Vários exemplos aparecem também na hidrologia, no estudo de precipitação pluviométrica e na análise de dados atmosféricos (Ord e Rees, 1979; Thiebaux e Pedder, 1987; Kitanidis, 1997), no estudo da erosão (Cressie e Horton, 1987) e contaminação de lençóis de água (Cressie, 1992; Mingoti, 1995). Atualmente, a Geoestatística tem sido aplicada para variáveis que não são de natureza físico-química, como na avaliação de taxas de mortalidade infantil (Cressie e Chan, 1989), abundância de espécies (Ecker e Heltshe, 1994) e previsão de número de casos de doenças em determinadas áreas, como a Aids em Minas Gerais (Mingoti e Pantuzzo, 1998).

2.2 A Geoestatística no Domínio \mathfrak{R} - Conceitos Principais

A sequência de valores observados da característica de qualidade X pode ser tratada como uma trajetória de um processo estocástico, isto é, $\{X(t), t \in \mathfrak{R}\}$. A variabilidade do processo pode ser obtida por meio do conhecimento do Semi-Variograma teórico do processo. Duas suposições são necessárias sobre $\{X(t), t \in \mathfrak{R}\}$: a estacionariedade intrínseca e a isotropia. Brevemente, estas suposições podem ser descritas da seguinte forma:

A. Estacionariedade Intrínseca: o processo $\{X(t), t \in \mathfrak{R}\}$ deve ser tal que:

- (i) $E[X(t)] = \mu, \quad \forall t \in \mathfrak{R};$
- (ii) $Var[X(t_l) - X(t_k)] = 2\gamma(\|t_l - t_k\|), \quad \forall t_l \neq t_k, \in \mathfrak{R},$

isto é, o processo tem média constante em \mathfrak{R} , e para cada $t_l, t_k \in \mathfrak{R}$, $t_l \neq t_k$, a variância das diferenças $[X(t_l) - X(t_k)]$ é uma função apenas da diferença $(t_l - t_k)$, dependendo de sua magnitude e direção. As quantidades $2\gamma(\bullet)$ e $\gamma(\bullet)$ são chamadas, respectivamente, de Variograma e Semi - Variograma do processo.

B. Isotropia: quando $2\gamma(\bullet)$ for uma função apenas da distância entre as unidades amostrais, o processo é dito ser isotrópico.

No caso de processos industriais a suposição (i) é equivalente a dizer que o processo estaria "sob controle" em relação à média. A suposição (ii) indicaria que a variabilidade da diferença entre duas observações do processo seria uma função apenas da distância entre elas. A isotropia indicaria que a função de Variograma seria a mesma para valores que estão à direita do ponto amostral (o que representaria o futuro do processo) e para valores que estão à esquerda do ponto amostral (o que indicaria o passado do processo). Deste modo, na prática, as condições de estacionariedade intrínseca e isotropia são suposições razoáveis para os processos industriais quando estes estão sob a condição de "controle estatístico".

Como teoricamente é esperado que as correlações entre unidades amostrais muito afastadas seja aproximadamente igual a zero, a variabilidade σ^2 do processo pode ser expressa por:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \sigma^2 \quad (2.1)$$

Alguns modelos mais comuns de Semi-Variograma são: o esférico, linear, gaussiano, exponencial e o senoidal. Quando a função de Covariograma existe, há uma relação direta entre a função de semi-variograma e a função de autocorrelograma do processo (Box e Luceno, 1997). Também pode-se analisar a relação entre semi-variogramas e a função espectral dos processos estocásticos. Para maiores detalhes sugerimos a leitura de Cressie (1993). A título de ilustração apresentamos a forma geral do semi-variograma do tipo senoidal na Figura 2.

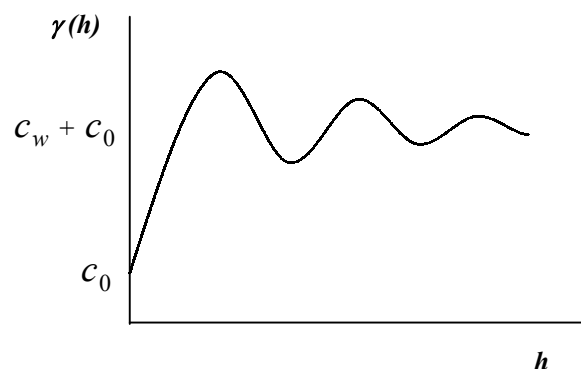


Figura 4. Semi-Variograma Senoidal:

$$\gamma(h) = c_0 + c_w \{1 - a_w \sin(\|h\| / a_w) / \|h\|\}, h \neq 0$$

onde $c_0 \geq 0$, $c_w \geq 0$ e $a_w \geq 0$; e é igual a zero para $h=0$

Na prática o semi-variograma $\gamma(\bullet)$ é estimado a partir de uma amostra do processo $\{X(t), t \in \mathfrak{R}\}$. Dentre os vários estimadores existentes (Cressie, 1993) destaca-se o estimador Clássico de Matheron (1963a), não viciado, obtido pelo método dos momentos. Dado uma amostra de tamanho n do processo, X_1, X_2, \dots, X_n , no caso em que o vetor de localização espacial é unidimensional, o estimador de Matheron é definido por:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{n-h} [X_i - X_{i+h}]^2}{n-h}, \quad \forall h \in T$$

6

onde X_i denota o valor da característica de qualidade de interesse medida no i -ésimo item amostrado, $i = 1, 2, \dots, n$, $T = \{1, 2, \dots, n - 1\}$, $(n - h)$ é o número de pares (X_i, X_j) que estão a uma distância de h unidades no período de amostragem. Para exemplificar, no caso em que $h = 3$ e $n = 100$ teríamos:

$$\hat{\gamma}(3) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{97} [X_i - X_{i+3}]^2}{97}$$

Este estimador é chamado de semi-variograma experimental. Em geral, representamos graficamente os valores do semi-variograma experimental em relação a h , identificamos o modelo do semi-variograma teórico gerador dos dados amostrais do processo e estimamos os seus parâmetros. Esta fase é chamada de ajuste do modelo de semi-variograma. Dentre os vários métodos de estimação de parâmetros de semi-variogramas existentes, destaca-se o de Mínimos Quadrados Ponderados (Cressie, 1985). Uma estimativa da variância do processo seria então, dada pela equação (2.1) considerando-se o semi-variograma ajustado.

Em termos computacionais existem vários softwares de análise de dados via Geostatística. O software Geo-Eas (Englund Sparks, 1991; Mingoti e Silva, 1996) é um dos mais simples de ser utilizado e permite que o usuário faça uma análise completa dos dados, desde do cálculo do semi-variograma experimental até a estimação, validação do modelo e a predição espacial. Um outro software interessante é o S-Plus no qual a análise geoestatística é feita nas rotinas geoS/geoR (Diggle e Ribeiro Jr, 2000).

No caso unidimensional, quando há correlação entre as unidades amostrais do processo é comum termos séries de observações que apresentam comportamento de semi-variograma senoidal. Estes modelos, entretanto, não são muito simples de serem ajustados (Mingoti e Neves (1999). Deste modo, torna-se interessante termos uma forma alternativa que facilite a estimação da variabilidade de processos via Geoestatística, sem que tenhamos que estimar os parâmetros teóricos do modelo de semi-variograma da série para utilizarmos a equação (2.1). Em Mingoti e Neves (1999) mostramos que no caso de séries temporais modeladas via Geoestatística sempre é possível obter-se previsões utilizando-se os dados do semi-variograma experimental, sem necessariamente termos que estimar os parâmetros do modelo de semi-variograma teórico do processo estocástico gerador dos dados. Na seção a seguir mostraremos como podemos implementar este procedimento de estimação para melhorar os limites do Gráfico de Controle de Shewhart para a média de processos industriais.

3. Estimadores da Variabilidade de Processos

Suponha que tenhamos uma amostra aleatória de n observações do processo, $n > 1$. Então, um estimador da variância da média amostral \bar{X} , pode ser obtido facilmente em termos do conhecimento da variância do processo, isto é:

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Deste modo, o estimador usual para a variância da média amostral é dado por:

$$\hat{Var}(\bar{X}) = \frac{s^2}{n} \quad (3.1)$$

sendo s^2 a variância amostral como definido na seção 1. No caso de processos estocásticos Gaussianos pode ser provado (Zhang, 1998) que a esperança matemática do estimador s^2 é dada por :

$$E [s^2] = \sigma^2 \left[1 - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{h=1}^{n-1} (n-h) \rho(h) \right] \quad (3.2)$$

onde $\rho(h) = \rho_h = \text{Corr}(X_i, X_{i+h}), \forall i$. A variância do estimador s^2 é dada por:

$$\text{Var}(s^2) = \frac{2 \sigma^4}{(n-1)^2} F(n, \rho_h) \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} F(n, \rho_h) = & \left[n + 2 \sum_{h=1}^{n-1} (n-h) \rho_h^2 \right] + \frac{1}{n^2} \left[n + 2 \sum_{h=1}^{n-1} (n-h) \rho_h^2 \right]^2 \\ & - \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-j} (n-j-h) \rho_j \rho_h \end{aligned}$$

Portanto, percebe-se claramente que no caso de processos que apresentam correlações, o estimador s^2 é sempre viciado para a variância do processo sendo que para correlações positivas a variância estimada é menor que a variância real do processo. Em termos dos limites do Gráfico de Controle de Shewhart usual para a média, isto significaria dizer que os limites estariam menores que os reais, e portanto o número de "alarmes falsos" aumentaria, dependendo da magnitude das correlações existentes entre as unidades amostrais. Também é importante ressaltar que no caso de processos autocorrelacionados estacionários, a variância da média amostral é expressa por:

$$\text{Var} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \rho(j-i) \right] \quad (3.4)$$

e a aproximação $\hat{\text{Var}}(\bar{X}) = \frac{s^2}{n}$ só seria viável se todas as correlações fossem próximas de zero, ou se o valor de n for grande o suficiente para que o termo referente às correlações em (3.4) pudesse ser negligenciado.

Estimadores alternativos podem ser obtidos se considerarmos a metodologia de Geostatística introduzida na seção 2. Pela definição de semi-variograma, no caso de estacionariedade intrínseca e isotropia tem-se que:

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= \text{Var}[X(t+h) - X(t)] = \text{Var}[X(t+h)] + \text{Var}[X(t)] - \\ & 2 \text{Cov}[X(t), X(t+h)] = 2\sigma^2 - 2\sigma^2 \text{Corr}[X(t), X(t+h)] \\ &= 2\sigma^2 [1 - \rho(h)] \quad , \quad \forall h \end{aligned}$$

Portanto, no caso em que as correlações entre as unidades amostrais são iguais a zero, o semi-variograma de ordem h ($\gamma(h)$) é igual a variância do processo e um estimador não viciado para a variância do processo seria então o semi-variograma amostral de ordem h de Matheron definido na seção 2. Este seria um estimador alternativo à variância amostral s^2 usada no caso clássico de controle de qualidade. Um outro estimador com maior precisão seria aquele que congregasse a informação de semi-variograma em vários lags h do processo. Várias poderiam ser as propostas mas neste artigo, estamos propondo o uso do seguinte estimador para σ^2 (Mingoti, 2000):

$$\gamma^* = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \hat{\gamma}(h) \quad (3.4)$$

onde $\hat{\gamma}(h)$ é o estimador de semi-variograma de Matheron e M é uma constante que pertence ao conjunto $\{1, 2, \dots, (n-1)\}$. Embora a escolha de M seja arbitrária, a melhor sugestão é considerar M na vizinhança de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ denota o maior inteiro menor ou igual a x , pelo fato de que há uma perda de qualidade na estimação do semi-variograma do processo a partir de lags h muito grandes em relação ao valor de n , devido ao pequeno número de pares $(X(t), X(t+h))$ que entram para o cálculo do semi-variograma experimental do respectivo lag h . O mesmo vale para estimação de correlações em lags muito grandes em relação ao valor de n .

No que tange ao ajuste de semi-variogramas, valores próximos de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ são conhecidos como valores de referência aceitáveis para se obter-se um bom ajuste. Uma outra sugestão é que se escolha M de modo que o número de pares usados para o cálculo do semi-variograma experimental em cada lag h seja de no mínimo 30 (Cressie, 1992; Journel e Huijbregts, 1978, pag. 194). Entretanto, o uso deste último critério limitaria a utilização do semi-variograma em situações onde trabalha-se com séries de tamanhos menores.

Pode ser mostrado facilmente que a esperança matemática do estimador γ^* é dada por:

$$E[\gamma^*] = \frac{1}{M} E\left[\sum_{h=1}^M \hat{\gamma}(h)\right] = \sigma^2 \left[1 - \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \rho(h)\right] \quad (3.5)$$

e portanto, no caso em que não há correlações entre as unidades amostrais, γ^* é um estimador não viciado para a variância real do processo. No caso em que existem correlações positivas o estimador γ^* irá subestimar o verdadeiro valor de σ^2 . O vício do estimador γ^* e do estimador s^2 são muito próximos dependendo do tamanho n da amostra. Entretanto, há uma diferença significativa na precisão destes dois estimadores. Utilizando-se resultados gerais assintóticos demonstrados em Cressie (1985) e Cressie e Hawkins (1980) para distribuições de estimadores de semi-variogramas, pode ser mostrado que para qualquer lag h , a variância do estimador de Matheron para o semi-variograma é aproximada por:

$$Var(\hat{\gamma}(h)) \approx \frac{2}{n-h} [\gamma(h)]^2 \quad (3.6)$$

e que em termos práticos as correlações entre $\hat{\gamma}(j)$ e $\hat{\gamma}(i)$, $i \neq j$ são negligenciáveis (Cressie e Hawkins, 1980, pag.119). Deste modo a variância do estimador γ^* pode ser aproximada por:

$$Var(\gamma^*) \approx \frac{2\sigma^4}{M^2} \sum_{h=1}^M \frac{1}{n-h} [1 - \rho(h)]^2 \quad (3.7)$$

Quando as correlações entre as unidades amostrais são iguais a zero, a variância de γ^* torna-se:

$$Var(\gamma^*) \approx \frac{2\sigma^4}{(M)^2} \sum_{h=1}^M \frac{1}{n-h} \quad (3.8)$$

que é menor que a variância do estimador s^2 , a menos que $M=n-1=1$, valor no qual a variância dos dois estimadores coincidem. Na seção 5 mostramos algumas simulações que foram feitas com o intuito de comparar estes dois estimadores para variâncias no caso de processos autocorrelacionados.

Se ao invés de apenas uma amostra tivermos m amostras do processo, sendo cada amostra com tamanho $n>1$, podemos calcular a média amostral \bar{X}_i para cada amostra selecionada (subgrupo racional). Deste modo, temos uma amostra de tamanho m de valores da média amostral obtidas por amostras de tamanho n . Portanto, podemos pensar em calcular o semi-variograma experimental da variável "média amostral de amostras de tamanho n " tentando acessar deste modo a variabilidade da distribuição da "média amostral de tamanho n ". Para esta nova variável o semi-variograma experimental de Matheron seria dado por:

$$\hat{\gamma}_x^-(h) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{m-h} [\bar{X}_i - \bar{X}_{i+h}]^2}{m-h}, \quad \forall h \in T \quad (3.9)$$

$i = 1, 2, \dots, m$, $T = \{1, 2, \dots, m-1\}$, $(m-h)$ é o número de pares (\bar{X}_i, \bar{X}_j) que estão a uma distância de h unidades no período de amostragem. A esperança matemática do semi-variograma experimental de Matheron no lag h seria:

$$E[\hat{\gamma}_x^-(h)] = \sigma_x^2 [1 - \rho_x^-(h)] \quad , \quad \forall h$$

onde $\rho_x^-(h) = \text{corr}(\bar{X}_j, \bar{X}_{j+h})$, ou seja representa a correlação entre média de subgrupos racionais de tamanho n que estão afastados de h unidades no período de amostragem. Suponha que seja esperado uma correlação maior entre as unidades amostrais mais próximas ou seja, entre as unidades amostrais de uma mesma amostra, do que entre unidades amostrais de amostras diferentes. Neste caso, um estimador não viciado para a variância da média amostral seria o semi-variograma experimental da média amostral $\hat{\gamma}_x^-(h)$. Um estimador não viciado com maior precisão seria:

$$\gamma_x^* = \frac{1}{M} \sum_{h=1}^M \hat{\gamma}_x^-(h) \quad (3.10)$$

com variância aproximada por:

$$\text{Var}(\gamma_x^*) \approx \frac{2 \sigma_x^4}{M^2} \sum_{h=1}^M \frac{1}{m-h} \quad (3.11)$$

onde M é uma constante pertencente ao conjunto $\{1, 2, \dots, m-1\}$. As mesmas considerações feitas anteriormente valem aqui para a escolha de M . O interessante neste estimador γ_x^* é que ele é simples de ser calculado e serve automaticamente para processos autocorrelacionados sem a necessidade de correções mais trabalhosas. Na seção 4 a seguir apresentamos alguns exemplos práticos de utilização dos estimadores γ^* e γ_x^* .

4 Exemplos de Aplicação da Metodologia de Geoestatística na Estimação da Variabilidade de Processos Industriais Reais

Exemplo 1. A viscosidade de um produto químico é medido a cada dois minutos. Uma amostra de tamanho $n=100$ deste processo foi obtida e o gráfico de controle para a média construído com o objetivo de controlar e manter a qualidade do processo químico. Os estimadores usuais de desvio padrão foram calculados utilizando as expressões (1.3) e (1.4) da seção 1. Os resultados obtidos foram os seguintes: $\hat{\sigma}_1 = 3,2627$ e $\hat{\sigma}_2 = 2,5789$. Estas estimativas desprezam qualquer correlação que possa existir entre as unidades amostrais. Entretanto, se analisarmos a função de autocorrelação desta série (Figura 3) observamos a indicação de um modelo do tipo Média Móvel de ordem 1 para descrever a relação entre os valores da variável viscosidade, mostrando portanto que a suposição de independência dos itens amostrados em relação a característica de qualidade, não é válida neste caso. Estatisticamente, este modelo seria representado através da equação:

$$X_t = -\theta a_{t-1} + a_t$$

onde a_t é uma série ruído branco, com média zero e variância σ_a^2 e $|\theta| < 1$. Para maiores detalhes sobre funções de autocorrelação e identificação de modelos estatísticos ver Box e Jenkins (1976). Na Figura 4 apresentamos o semi-variograma experimental de Matheron desta série. Considerando-se $M = 50$, uma estimativa da variância do processo σ^2 e que não desprezaria a correlação entre as unidades amostrais seria:

$$\gamma^* = \frac{\sum_{h=1}^{50} \hat{\gamma}(h)}{50} = 10,859$$

o que levaria a uma estimativa de desvio padrão igual a $\hat{\sigma} = 3,2953$ que neste caso, é próximo da estimativa obtida através do uso de s^2 e bem maior do que a estimativa obtida usando o estimador de amplitude média. A proximidade numérica entre $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}$ já era esperada pois as correlações presentes no processo são pequenas. A correlação mais significativa é a de ordem 1, estimada em 0,32 (Figura 4). A título de ilustração apresentamos nas Figuras 5 e 6 os gráficos de controle para a média obtidos usando-se os estimadores de semi-variograma e o de amplitude média para a variabilidade do processo. Como pode ser observado a região de controle usando a estimativa de semi-variograma tem amplitude maior que quando utilizamos o estimador de amplitude média.

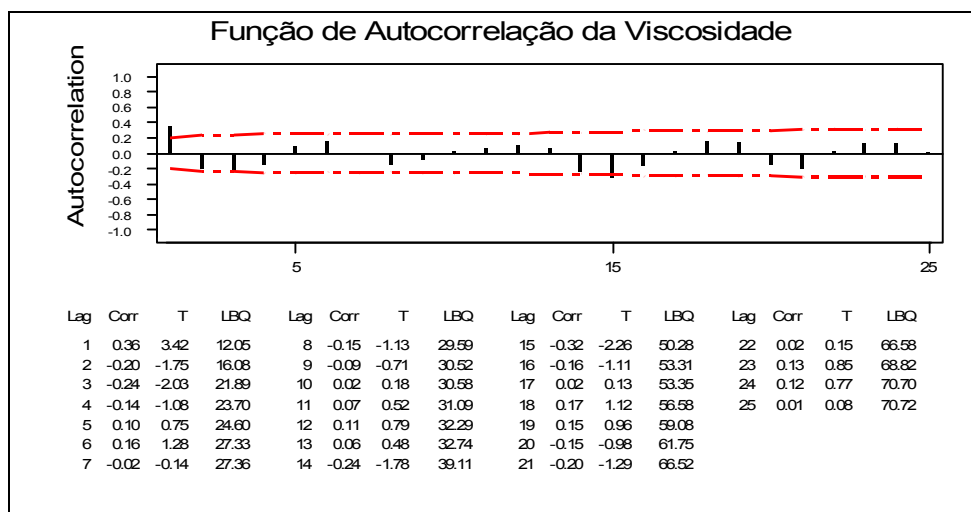


Figura 3. Função de autocorrelação amostral da viscosidade

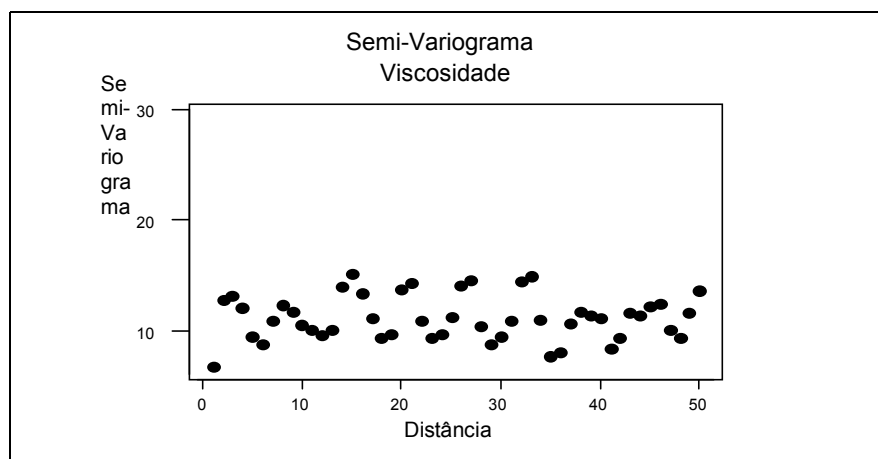


Figura 4. Semi-variograma experimental da viscosidade

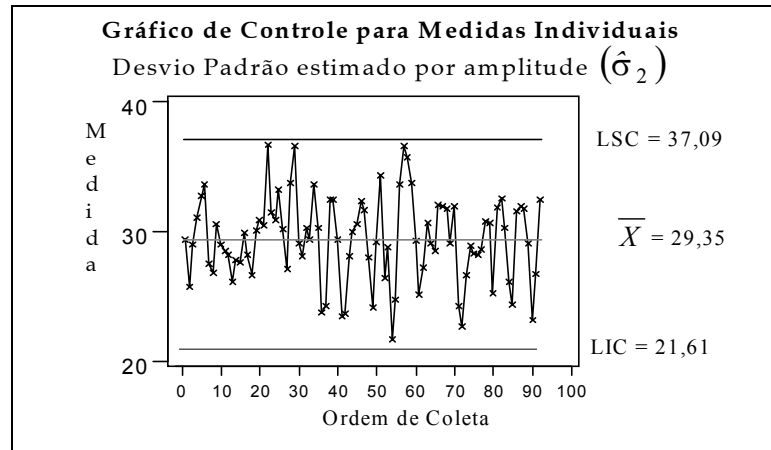


Figura 5. Gráfico de Controle de Shewhart para média utilizando o estimador de amplitude média para o desvio padrão do processo.

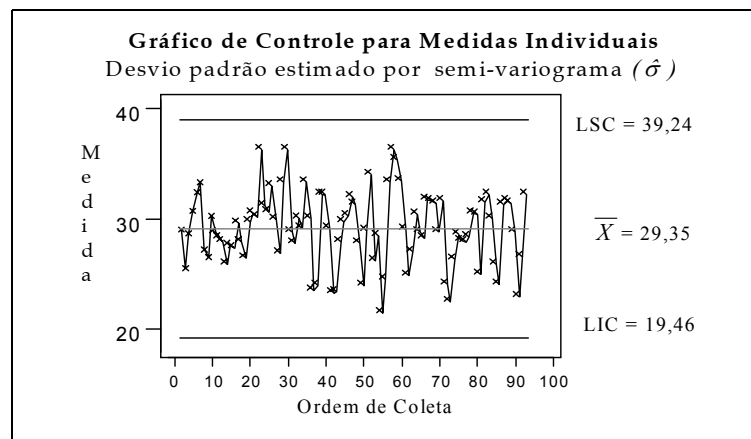


Figura 6. Gráfico de Controle de Shewhart para média utilizando o estimador de semi-variograma para o desvio padrão do processo.

Exemplo 2. Este exemplo refere-se a dados de uma empresa que fabrica um determinado componente eletrônico. O Quadro 1 apresenta as médias amostrais, de uma determinada característica de qualidade X , observadas em $m=34$ subgrupos racionais de tamanho $n=5$ na sequência em que foram amostrados. O gráfico destes dados está na Figura 7. A aleatoriedade das observações do semi-variograma experimental na Figura 8, indica que os subgrupos são não correlacionados em relação à característica avaliada. Os dados utilizados na construção deste semi-variograma estão na Tabela 1. Na Tabela 2 mostramos a estimativa do desvio padrão do processo de acordo com várias escolhas do valor de M utilizado no estimador $\gamma_{\bar{x}}^*$. Como pode ser observado, para estes dados há pouca alteração na estimativa de variabilidade para M no conjunto $\{3, 6, 7, \dots, 24\}$. Se considerarmos a regra de mantermos no cálculo de $\gamma_{\bar{x}}^*$ apenas os lags h para os quais tem-se pelo menos 30 pares, a estimativa de desvio padrão da média amostral neste exemplo seria 0,677, ao passo que se considerarmos os valores de h até $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ teríamos uma estimativa igual a 0,659. Se observarmos a Tabela 2 veremos que à medida que M cresce $\gamma_{\bar{x}}^*$ se mantém ao redor de 0,66.

Quadro 1. Dados amostrais – exemplo 2

Amostra	Média	Amostra	Média	Amostra	Média
1	16,5	13	15,2	25	16,8
2	17,2	14	16,1	26	16,6
3	16,6	15	17,3	27	16,0
4	15,0	16	15,8	28	16,6
5	15,2	17	16,8	29	15,5
6	16,5	18	17,2	30	16,6
7	15,5	19	16,2	31	15,9
8	15,7	20	16,9	32	16,5
9	17,6	21	15,6	33	16,1
10	16,3	22	16,9	34	16,2
11	15,6	23	15,8		
12	15,9	24	16,9		

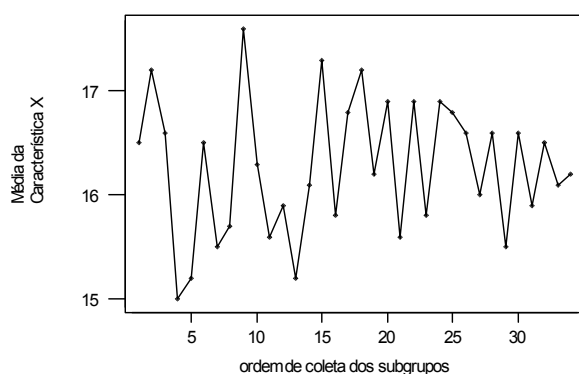


Figura 7. Dados amostrais do exemplo 2.

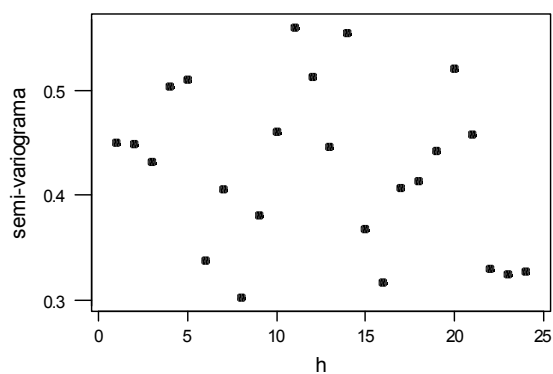


Figura 8. Semi-variograma experimental da média amostral - exemplo 2

Tabela 1. Dados para o cálculo do semi-variograma - exemplo 2.

Lag H	Número de Pares $m-h$	Estimativa $\hat{\gamma}(h)$	Lag h	Número de Pares $m-h$	Estimativa $\hat{\gamma}(h)$
1	33	0,450	13	21	0,446
2	32	0,449	14	20	0,555
3	31	0,432	15	19	0,368
4	30	0,503	16	18	0,316
5	29	0,510	17	17	0,407
6	28	0,337	18	16	0,413
7	27	0,406	19	15	0,442
8	26	0,302	20	14	0,520
9	25	0,381	21	13	0,458
10	24	0,461	22	12	0,330
11	23	0,560	23	11	0,325
12	22	0,513	24	10	0,327

Tabela 2: Estimativas de σ para
vários valores de M

M	$\gamma_{\bar{x}}^*$	$\hat{\sigma}$
3	0,4437	0,666
4	0,4585	0,677
5	0,4688	0,684
6	0,4468	0,647
10	0,4231	0,650
15	0,4449	0,667
17	0,4351	0,659
18	0,4338	0,658
24	0,4255	0,652

5 Simulações

Nesta seção apresentamos algumas simulações que foram feitas com o objetivo de entendermos melhor o comportamento dos estimadores de variabilidade propostos na seção 3. Foram simulados 3 grupos de séries de tamanho $n = 100$ com média constante, baseadas nos modelos ARMA (p, q) para $p = 0,1$ e $q = 0,1, 2$, estacionários e invertíveis. De um modo geral os modelos ARMA (p, q) estacionários podem ser descritos da seguinte forma:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t$$

onde X_t é a característica de interesse medida na amostra t (ou unidade amostral t), a_t é o erro aleatório com

distribuição normal de média zero e variância igual a σ_a^2 , e $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, c, \sigma_a^2)$ são os parâmetros do modelo. Foram geradas 50 séries para cada conjunto de valores escolhidos para os parâmetros do modelo. Num primeiro momento geramos as séries com uma variabilidade fixa σ_a^2 . Posteriormente esta variabilidade foi acrescida para $(2,25 \sigma_a^2)$ e $(4 \sigma_a^2)$. Para cada série simulada a variabilidade do processo foi estimada utilizando-se os dois estimadores clássicos (equações (1.3) e (1.4)) e o de semi-variograma γ^* , descritos anteriormente. A comparação entre as estimativas fornecidas pelos três métodos para o desvio padrão real do processo foi efetuada com base nos valores do Erro Médio (*EM*) e Erro Quadrático Médio (*EQM*) definidos por:

$$EM(\hat{\sigma}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i - \sigma_s)$$

$$EQM(\hat{\sigma}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\hat{\sigma}_i - \sigma_s)^2$$

onde $\hat{\sigma}_i$ é a estimativa de desvio padrão para a série simulada e σ_s é o valor verdadeiro da variabilidade do processo de acordo com os parâmetros do modelo simulado, e k é o número de séries geradas. Para os modelos ARMA(1,0) e ARMA(0,1) foram simuladas séries com ϕ variando de -0,8 a 0,8 e θ variando de -0,8 a 0,8, respectivamente. Para os modelos ARMA(0,2) escolhemos várias combinações dos parâmetros (θ_1, θ_2) na região de invertibilidade do processo, o mesmo ocorrendo para o modelo ARMA(1,1) onde várias combinações dos parâmetros (ϕ, θ) foram consideradas na região de invertibilidade e estacionariedade do processo. As Tabelas 3 a 5 a seguir, mostram os valores médios globais de *EM* e *EQM* observados para cada modelo simulado.

Tabela 3. Valores de *EM* e *EQM* – Médias Globais. Modelo ARMA(1,0)

Variância de a_t	Estimador	<i>EM</i> (σ_s)	<i>EQM</i> (σ_s)
$4 \sigma_a^2$	Clássico	0,0097	0,1948
	Amplitude	0,2320	1,8529
	Semi-Variograma	-0,0021	0,1542
$2,25 \sigma_a^2$	Clássico	0,0630	0,1845
	Amplitude	-0,1530	2,4878
	Semi- Variograma	0,0079	0,1674
σ_a^2	Clássico	0,0178	0,1485
	Amplitude	-0,0376	0,9834
	Semi- Variograma	-0,0045	0,1120

Tabela 4. Valores de EM e EQM – Médias Globais. Modelo ARMA (0,1)

Variância de a_t	Estimador	Arma (0,1)		Arma(0,2)	
		$EM (\sigma_s)$	$EQM (\sigma_s)$	$EM (\sigma_s)$	$EQM (\sigma_s)$
$4 \sigma_a^2$	Clássico	0,0675	0,1675	-0,0713	0,2239
	Amplitude	-0,0750	1,2678	-0,4900	0,5132
	Semi-Variograma	0,0495	0,1305	-0,0339	0,1639
$2,25 \sigma_a^2$	Clássico	0,0903	0,1420	0,0017	0,0788
	Amplitude	0,2475	0,8291	-0,3032	0,4372
	Semi-Variograma	0,0723	0,1038	0,0119	0,0671
σ_a^2	Clássico	0,0667	0,0815	-0,0155	0,1071
	Amplitude	0,1340	0,2758	-0,1837	0,2474
	Semi-Variograma	0,0501	0,0347	-0,0032	0,0646

Tabela 5. Valores de EM e EQM – Médias Globais. Modelo ARMA (1,1)

Variância de a_t	Estimador	$EM (\sigma_s)$	$EQM (\sigma_s)$
$4 \sigma_a^2$	Clássico	-0,0940	0,2948
	Amplitude	-2,1932	5,2686
	Semi-Variograma	0,0526	0,2503
$2,25 \sigma_a^2$	Clássico	0,0090	0,5614
	Amplitude	-1,6006	2,9495
	Semi- Variograma	0,0219	0,4858
σ_a^2	Clássico	0,0183	0,2041
	Amplitude	-1,0299	1,2312
	Semi- Variograma	0,0055	0,1768

Numa comparação global, observamos que em média o estimador de semi-variograma apresenta um erro médio e um erro quadrático médio inferior. O estimador por amplitude fornece em média erros médios e erros quadráticos médios muito altos. Um fato importante observado nas simulações foi que para cada valor de desvio padrão σ_a^2 escolhido, quando a autocorrelação de ordem 1 foi pequena, os três estimadores apresentaram *EM* e *EQM* aproximadamente semelhantes, sendo que o estimador de semi-variograma apresentou em média erros menores. No entanto, quando a correlação de ordem 1 é maior, o estimador de semi-variograma produz melhores resultados, principalmente para séries com autocorrelações positivas.

6 Comentários Finais

A metodologia de Geoestatística é usualmente utilizada para dados espacialmente distribuídos, mas neste artigo apresentamos uma ilustração de como podemos empregá-la na análise estatística de séries de processos produtivos, no que se refere à estimação da variabilidade do processo. Quando existe a correlação entre unidades amostrais no que se refere a característica de qualidade de interesse, o uso da Geoestatística na estimação da variabilidade permite que o monitoramento do processo possa ser feito via Gráficos de Controle usuais de Shewhart, sendo portanto, uma alternativa mais simples do que as propostas que tratam o problema da correlação dentro do contexto de Análise de Séries Temporais.

Os resultados das comparações feitas na seção 5 mostraram que em média, os estimadores construídos a partir da definição de semi-variograma experimental, produziram resultados melhores quando as autocorrelações no processo foram maiores, mesmo para amostras de tamanhos maiores. Para algumas séries simuladas do tipo auto-regressivo, a variância do processo foi estimada considerando-se também o ajuste, por Mínimos Quadrados Ponderados, do modelo de semi-variograma senoidal apresentado na seção 2. No global a dificuldade de se ajustar o modelo senoidal fez com que os valores de *EM* e *EQM* fossem maiores mesmo quando comparados com os valores observados para o estimador γ^* . Para melhorar a estimação do semi-variograma neste caso, seria necessário o ajuste de modelos senoidais parciais como discutido em Mingoti e Neves (1999).

Finalmente gostaríamos de ressaltar que o estimador γ^* tratado neste artigo é apenas um dos estimadores alternativos que podem ser construídos via Geoestatística (Mingoti, 2000).

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq e à FAPEMIG pelo auxílio que possibilitou a execução deste trabalho.

Referências Bibliográficas

- ALWAN, L. C. e ROBERTS, H. V. The Problem of Missplaced Control Limits. *Applied Statistics, JRSS, Series C*, v. 44, n. 3, 269-278, 1995.
- ALWAN, L. C. e ROBERTS, H. V. Time Series Modelling for Statistical Process Control. *Journal of Business & Economic Statistics*, n. 6, 87-95, 1988.
- AMORIM, S. e COSTA, A. F. B. *Detecção Rápida de Perturbações em um Processo Industrial*. Minicurso, 11o. SINAPE, Belo Horizonte: UFMG, 1994, 55 p.
- BONATO, F. S., COSTA, J. F. C. L. e KOPPE, J. C. Planejamento de Lavra baseado na Variabilidade de Atributos Geológicos. *Revista Escola de Minas*, v. 53, n. 4, 275-284, 2000.
- BOX, G.P. e JENKINS, G.M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New York: Holden Day, 1976, 575 p.
- BOX, G. P. e LUCENO, A. *Statistical Control by Monitoring and Feedback Adjustment*. New York: John Wiley & Sons, 1997, 327 p.

Publicado na Revista: *Produto & Produção*, v. 5, n. 2, 55-70, 2001

CRESSIE, N. *Statistics for Spatial Data*. New York: John Wiley & Sons, 1993, 900 p.

CRESSIE, N. The origins of kriging. *Mathematical Geology*, v. 22, n. 3, 239-252, 1990.

CRESSIE, N. Fitting variogram models by weighted least squares. *Mathematical Geology*, v. 17, n. 5, 563-585, 1985.

CRESSIE, N. e CHAN, N.H. Spatial Modelling of Regional Variables. *Journal of the American Statistical Association*, n. 84, 393-401, 1989.

CRESSIE, N. e HAWKINS, D. M. Robust estimation of the variogram: I. *Mathematical Geology*, v. 12, n. 2, p. 115-125, 1980.

CRESSIE, N. e HORTON, R. A Robust/ Resistant Spatial Analysis of Soil-Water Infiltration. *Water Resources Research*, n. 23, 911-917, 1987.

CROWDER, S. V. Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes. *Journal of Quality Technology*, n. 21, 155-162, 1989.

DERMAN, C. e ROSS, S. M. *Statistical Aspects of Quality Control*. New York: Academic Press, 1997, 200 p.

DIGGLE, P. J. e RIBEIRO JR., P. J. *Model Based Geostatistics*. Minicurso, 14o. SINAPE, Caxambu: ABE, 2000, 129 p.

ENGLUND, E., SPARTS, A. *GEO-EAS User's Guide*. Las Vegas: Environmental Monitoring Systems Laboratory, 1991, 120 p.

EPPERCHT, A. L. , NINIO, A. L. e SOUZA, M. O. Projeto Ótimo de Gráficos de Médias Móveis Ponderados Exponencialmente (EWMA) para Controle Estatístico de Processos. *Pesquisa Operacional*, v. 18, n. 2, 109-130, 1998.

FREITAS, M. A. e CASTRO, L. F. A. Controle Estatístico de Processos para Dados Autocorrelacionados: Aplicação a Dados Operacionais de um Alto Forno. In *ENESEP, 15, International Congress, 1, Anais*, São Paulo, 1153-1158, 1995.

GY, P. *Sampling for Analytical Purposes*. New York: John Wiley & Sons, 1998, 153 p.

GY, P. *Sampling of Particulate Materials*. New York: Elsevier Scientific Publishers, 1982, 431 p.

ECKER, M. D. e HELTSHE, J. F. Geostatistical Estimates of Scallop Abundance. *Case Studies in Biometry*. New York: Edited by John Wiley Sons, 107-124, 1994.

HOULDING, S. W. *Practical Geostatistics*. New York: Springer Verlag, 2000, 159 p.

HUNTER, J. S. The Box-Jenkins Bounded Manual Adjustment Chart: A Graphical Tool Designed for use on the Production Floor. *Quality Progress*, august, p. 129-137, 1998.

HUNTER, J. S. The Exponentially Weighted Moving Average. *Journal of Quality Technology*, n. 18, 202-209, 1986.

ISAAKS, E. H. e SRIVATAVA, R. M. *Applied Geostatistics*. New York: Oxford University Press, 1990, 561 p.

JOURNEL, A. G. e HUIJBREGTS, Ch. J. *Mining Geostatistics*. New York: Academic Press, 1978, 600 p.

KITANIDIS, P. K. Introduction to Geostatistics: Applications to Hydrogeology. Cambridge: Cambridge University Press, 1997, 350 p.

KRIGE, D. G. A Statistical Approach to Some Basic Mine Valuation Problems on the Witwatersrand. *Journal*

Publicado na Revista: *Produto & Produção*, v. 5, n. 2, 55-70, 2001

of

the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa, n. 52, 119-139, 1951.

LUCAS, J. M. e CACCUCCI, M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements (with discussion). *Technometrics*, n. 32, 1-129, 1990.

MATHERON, G. Principles of geostatistics. *Economic Geology*, v. 58, p. 1246-1266, 1963a.

MATHERON, G. Traite de Geostatistique Appliquee, Tome I. *Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minieres*, n. 14. Paris: Editions Technip, 1962.

MATHERON, G. Traite de Geostatistique Appliquee, Tome II.: Le Krigeage. *Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minieres*, n. 14. Paris: Editions Technip, 1963b.

MINGOTI, S. A. *Aplicação de Novas Ferramentas Estatísticas no Monitoramento do Controle de Qualidade de Processos de Produção*. Relatório Técnico de Pesquisa: CNPq. Belo Horizonte: EST/UFGM, 2000, 27 p.

MINGOTI, S. A. e NEVES, O. F. A metodologia de geoestatística como alternativa na análise de séries temporais. *Revista Escola de Minas*, v. 52, n. 3, p. 182-187, 1999.

MINGOTI, S. A. e PANTUZZO, A. E. Predição do Número Total de Casos Diagnosticados de Aids dos Municípios de Minas Gerais através de Técnicas de Estatística Espacial, *Revista de Matemática e Estatística da UNESP*, n. 16, 59-80, 1998.

MINGOTI, S. A. e SILVA, A. F. Uma introdução ao software GEO-EAS utilizado na análise de dados espacialmente distribuídos. *Relatório Técnico RTE 03/06*. Departamento de Estatística da UFGM, ICEx, 1996.

MINGOTI, S. A. As Funções de Madograma e Rodograma como Alternativas para Descrever a Variabilidade Espacial dos Dados. *Revista Escola de Minas*, v. 50, n. 2, 71-74, 1996.

MINGOTI, S. A. e SILVA, A. F. Um exemplo de aplicação das técnicas de Geoestatística: uma análise do nível piezométrico do aquífero de Wolfcamp (Estados Unidos). *Revista Escola de Minas*, v. 49, n. 2, 96-100, 1995.

MONTGOMERY, D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*. New York: J. Wiley, 1996, 752 p.

MONTOMERY, D. C. e MASTRANGELO, C. M. Some Statistical Process Control Methods for Autocorrelated Data. *Journal of Quality Technology*, v. 23, n. 3, 179-193, 1991.

ORD, J. K. e REES, M. Spatial Processes: Recent Developments with Applications to Hydrology. In: *Mathematics of Hydrology and Water Resources*. London: Academic Press, 95-118, 1979.

ROBERTS, S. W. Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages. *Technometrics*, n. 1, 239-251, 1959.

RUNGER, G. C. e WILLEMAIN, T. R. Model-Based and Model-Free Control of Autocorrelated Processes. *Journal of Quality Technology*, v. 27, n. 4, 283-292, 1995.

SHEWHART, W.A. Application of statistical method in mass production. In: *PROCEEDINGS OF THE INDUSTRIAL STATISTICS CONFERENCE*, Massachusetts Institute of Technology, september 8-9, 1938. New York: Pitman Publishing, 1939.

THIEBAUX, H. J. e PEDDER, M. A. *Spatial Objective Analysis with Applications in Atmosphere Science*. London: Academic Press, 1987.

ZHANG, N. F. Estimating process capability indexes for autocorrelated data. *Journal of Applied Statistics*, v. 25, n. 4, p. 559-574, 1998.