1 - Seja X uma variável aleatória do tipo contínuo tal que $F_X(q_{0,75}) = P(X \le q_{0,75}) = 0,75$.
Consideremos uma amostra aleatória de tamanho n de X.

a) qual a probabilidade de que todos os valores X_i, $i = 1, 2, ..., n$ sejam maiores do que $q_{0,75}$?

b) Se $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são as estatísticas de ordem mínimo e máximo da amostra, respectivamente, calcule $P\left(X_{(1)} \le q_{0,75} \le X_{(n)}\right)$.

c) para um valor de n suficientemente grande explique o significado das probabilidades calculadas em (a) e (b).

Solução:
Observe as regiões A, B e C no gráfico abaixo:

a) $P\left(X_1 \ge q_{0,75}; X_2 \ge q_{0,75}; ...; X_n \ge q_{0,75}\right) = P\left(X_{(1)} \ge q_{0,75}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n = P(B)$

b) Para calcular

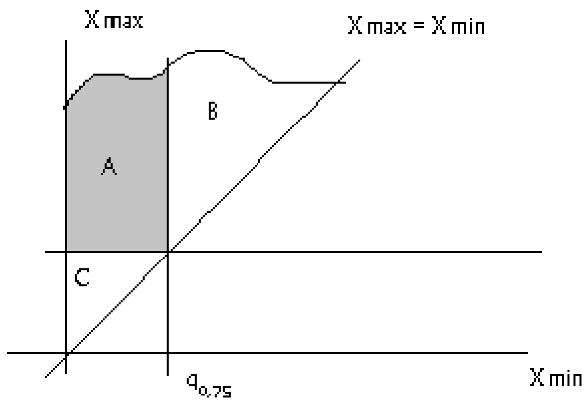
$$P\left(X_{(1)} \le q_{0,75} \le X_{(n)}\right) = P(A)$$

calculemos primeiramente

$$P\left(X_1 \le q_{0,75}; X_2 \le q_{0,75}; ...; X_n \le q_{0,75}\right) = P\left(X_{(n)} \le q_{0,75}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^n = P(C)$$

Como $X_{(1)} \le X_{(n)}$, a densidade de da variável aleatória bidimensional $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ está definida na metade superior do primeiro quadrante do gráfico abaixo, e, portanto P(A) = 1 - P(B) - P(C) .

$$P\left\{X_{(1)} \le q_{0,75} \le X_{(n)}\right\} = 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{3^n}{4^n}$$



c) $\lim_{n\to\infty} P\left(X_{(1)} \ge q_{0,75}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} P\left(X_{(1)} \le q_{0,75} \le X_{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{4^n} - \frac{3^n}{4^n}\right) = 1$

Analisando os resultados, vemos que a probabilidade do mínimo assumir um valor maior do que o terceiro quartil para n grande é ZERO, enquanto que a probabilidade do intervalo compreendido entre o mínimo e o máximo valores observados em uma amostra - suficientemente grande -, conter o terceiro quartil é igual a 1.

2 - Seja $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com distribuição N(0, σ^2). Seja $M_2^{'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ a estatística chamada **momento central de segunda ordem da amostra** . Mostre que M_2' e $\overline{X}$ são variáveis aleatórias independentes e determine a distribuição de M_2' .

Solução:

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, a função característica da bidimensional (X,Y) é dada por $\varphi_{X,Y}\left(t_1, t_2\right) = E\left[e^{it_1X + it_2Y}\right] = E\left(e^{it_1X}\right) \times E\left(e^{it_2Y}\right) = \varphi_X\left(t_1\right) \times \varphi_Y\left(t_2\right)$.

Se W =cY, a função característica de (X,W) é

$\varphi_{X,W}\left(t_1, t_2\right) = E\left[e^{it_1X + it_2W}\right] = E\left[e^{it_1X + it_2cY}\right] = \varphi_{X,Y}\left(t_1, ct_2\right)$.
Assim, $\varphi_{X,W}\left(t_1, t_2\right) = \varphi_{X,Y}\left(t_1, ct_2\right) = \varphi_X\left(t_1\right) \times \varphi_Y\left(ct_2\right) = \varphi_X\left(t_1\right) \times \varphi_W\left(t_2\right)$.

Segundo o Teorema 3.2 (Apostila, ENCE, Frederico Cavalcanti), as variáveis aleatórias $\overline{X}$ e S^2 e em conseqüência $\overline{X}$ e M_2' também o são, pois $M_2' = \left(\frac{n-1}{n}\right) S^2$ conforme visto anteriormente.

---

3. Seja X uma variável aleatória $N(\mu, \sigma)$ e seja $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ um amostra aleatória de X. Obtenha a função de densidade da estatística S^2 .

Solução:
Usando propriedades da funções características prova-se que se X tem distribuição Gama de parâmetros a e p, então a variável aleatória $Y = \frac{\alpha X}{\beta}$ tem distribuição Gama de parâmetros $\frac{\beta a}{\alpha}$ e p.

Ora, segundo o Teorema 3.2 (Apostila, Ence, Frederico Cavalcanti), a variável aleatória $\frac{\left(n-1\right)S^2}{\sigma^2}$ tem distribuição Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade, que por sua vez é uma Gama de parâmetros $\frac{1}{2}$ e $\frac{n-1}{2}$. Mas, $S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1}$ e, conforme visto anteriormente,
S^2 tem distribuição Gama de parâmetros $\frac{\left(n-1\right)}{2\sigma^2}$ e $\frac{\left(n-1\right)}{2}$.

---

4 - Sejam $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ e $\left(Y_1, Y_2, ..., Y_m\right)$ duas amostras aleatórias independentes e originárias de uma variável aleatória $N\left[\mu, \sigma^2 = 2\right]$. Qual a distribuição de $W = \overline{X} - \overline{Y}$? Qual a probabilidade do evento $\left(W > 0{,}1\right)$ quando m = n =100?

Solução:
a) distribuição de W = X + Y

$$E\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) = \mu - \mu = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)=\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right)+\mathrm{Var}\left(\overline{Y}\right)=\frac{2}{n}+\frac{2}{m}=\frac{2(n+m)}{nm}$$

Como W = X + Y é uma combinação de variáveis aleatórias normais e independentes, então W tem distribuição normal de média o e desvio padrão $\sqrt{\frac{2(n+m)}{nm}}$.

b) Se n = m = 100 então $\mathrm{Var}(W)=\frac{2\times 200}{10000}=0,04$ e então X tem distribuição $N(0;0,2)$.

De forma que,

$$P\left(W>0,1\right)=P\left(\frac{W-0}{0,2}>\frac{0,1-0}{0,2}\right)=P1-F_Z\left(0,5\right)=1-0,6915=0,3085$$

5 - Considere uma variável aleatória $N(\theta,2)$. Seja $\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ uma amostra aleatória de X. Qual deve ser o valor de n de forma que $E\left(\left|\overline{X}_n-\theta\right|^2\right)\leq 0,1$, para todo valor possível de θ ?

Solução:

Se X é $N\left(\theta;2\right)\ \rightarrow\ \overline{X}$ é $N\left(\theta;\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$.

$$E\left(\left|\overline{X}_n-\theta\right|^2\right)=E\left(\overline{X}_n-\theta\right)^2=\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right)=\frac{4}{n}\leq 0,1\rightarrow n\geq\frac{4}{0,1}\quad n\geq 40$$

---

6 - Suponha que $\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ seja uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com distribuição $N(\mu,\sigma)$. Qual a distribuição da estatística $n\left(\overline{X}-\mu\right)^2/\sigma^2$?

Solução:

Se X é $N(\mu,\sigma)\ \rightarrow\ \overline{X}$ é $N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Daí temos que:

$$Z=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{\sigma}$$ tem distribuição N(0,10).

Elevando-se ao quadrado,

$$Z^2=\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}$$ tem distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

7- Suponha que $\left(X_1,X_2,...,X_n\right)$ seja uma amostra aleatória de uma variável aleatória X com distribuição $N(\mu,\sigma)$. Qual a distribuição da estatística $n\left(\overline{X}-\mu\right)^2/S^2$?

Solução:

Se X é $N(\mu,\sigma)\ \rightarrow\ X$ é $N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ e $Z=\frac{\left(\overline{X}-\mu\right)\sqrt{n}}{\sigma}$ $Z^2=\frac{n\left(\overline{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}$ é χ^2_1.

Por outro lado, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ tem distribuição χ^2_{n-1} .

Recordemos que:

$$F_{n;m} = \frac{\chi^2_1 \big/ 1 \quad /1}{\chi^2_{n-1} \big/ n-1}$$ tem distribuição de sEndecor com 1 e n-1 graus de liberdade.

Assim,

$$\frac{\frac{n\left(\bar{X}-\mu\right)^2}{\sigma^2}}{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}} = \frac{n\left(\bar{X}-\mu\right)^2}{S^2}$$ tem distribuição de Snedecor com 1 e n-1 g.l.

---

8 - Suponha que $\left(X_1, X_2, \ldots, X_{16}\right)$ seja uma amostra de um distribuição $N(\mu, \sigma)$. Determina as seguintes probabilidades:

a) $P\left[\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \mu\right)^2 \leq 2\sigma^2\right]$

b) $P\left[\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \leq 2\sigma^2\right]$

Solução:

a)

$$P\left[\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \mu\right)^2 \leq 2\sigma^2\right] = P\left[8 \leq \sum_{i=1}^{16}\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \leq 32\right] = P\left[8 \leq \chi^2_{16} \leq 32\right] \cong 0{,}938866^*$$

b)

$$P\left[\frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \leq 2\sigma^2\right] = P\left[8 \leq \sum_{i=1}^{16}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \leq 32\right] = P\left[8 \leq \chi^2_{15} \leq 32\right] = 0{,}917344^*$$

(*) calculo realizado pelo processador MAPLE VS3

9- Suponha que $\left(X_1, X_2, \ldots, X_{10}\right)$ seja uma amostra de uma variável aleatória $N(0, \sigma)$. Determine o valor de c de tal forma que a variável aleatória $c\left(X_1 + X_2\right) / \left(\sum_{i=3}^{10} X_i^2\right)^{1/2}$ tenha distribuição de Student.

Quantos graus de liberdade tem T?

Solução:

Se X_i é $N(0, \sigma)$, então,

$$E\left(X_1 + X_2\right) = 0$$

$$Var\left(X_1 + X_2\right) = 2\sigma^2 \quad \rightarrow \quad DP\left(X_1 + X_2\right) = \sigma\sqrt{2}$$

Segue daí que,

$$Z = \frac{\left(X_1 + X_2\right)}{\sigma\sqrt{2}} \quad \text{é} \quad N(0,1)$$

Por outro lado,

$$\frac{X_i}{\sigma} \text{ é } N(0,1) \;\rightarrow\; \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \text{ é } \chi_1^2 \;\rightarrow\; \sum_{i=3}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \text{ é } \chi_8^2$$

De forma que,

$$T_8 = \frac{\dfrac{(X_1+X_2)}{\sigma\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{8}\sum_{i=3}^{10}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2}}$$ tem distribuição de Student com 8 graus de liberdade, e

$$T_8 = \frac{\dfrac{(X_1+X_2)}{\sigma\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{8}\sum_{i=3}^{10}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2}} = \frac{(X_1+X_2)}{\sigma\sqrt{2}} \times \frac{\sigma\sqrt{8}}{\sqrt{\sum_{i=3}^{10} X_i^2}} = 2 \times \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{\sum_{i=3}^{10} X_i^2}}$$

Logo, c = 2.

10- (DeGroot - 397) Suponha que $(X_1, X_2, ..., X_{10})$ seja uma amostra de uma variável aleatória $N(0,1)$. Determine o valor de c de tal forma que a variável aleatória $c(X_1+X_2)/\left(\sum_{i=3}^{5} X_i^2\right)^{1/2}$ tenha distribuição de Student. Quantos graus de liberdade tem T?

Solução:

$$E(X_1+X_2)=0$$

$$Var(X_1+X_2)=2 \;\rightarrow\; DP(X_1+X_2)=\sqrt{2}$$

Logo,

$$Z = \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{2}}$$ tem distribuição N(0,1)

Por outro lado,

$$\sum_{i=3}^{5} X_i$$ tem distribuição qui quadrado com 3 grausl de liberdade.

E, então:

$$T_3 = \frac{\dfrac{(X_1+X_2)}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=3}^{5} X_i}{3}}} \quad\rightarrow\quad T_3 = \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sum_{i=3}^{5} X_i}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{(X_1+X_2)}{\sqrt{\sum_{i=3}^{5} X_i}}$$