

Lista de Exercícios 2 - Análise de Dados Longitudinais

1. Considere uma amostra de N indivíduos observados em $n = 5$ ocasiões $t = -2, -1, 0, 1, 2$. Considere o modelo linear $E(Y_{ij}) = \beta_0 + \beta_1 t_j$ e que a verdadeira matriz de variância-covariância de $Y_i; i = 1, \dots, N$ é a de simetria composta, ou seja,

$$\text{Var}(Y_i) = V_0 = \sigma^2((1 - \rho)I_5 + \rho 11'),$$

em que $1' = (1, 1, 1, 1, 1)$.

- (a) Encontre os estimadores de mínimos quadrados ordinários e generalizados para o vetor β .
- (b) Encontre as variâncias dos estimadores da letra (a).
2. Um estudo longitudinal foi conduzido de forma que cada indivíduo foi avaliado nas mesmas n ocasiões. Considere o modelo linear marginal para dados longitudinais tal que:

$$Y_i \sim N_n(X_i\beta, \sigma^2 V_0(\alpha)) \quad i = 1, \dots, N.$$

- (a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança para β dado que σ^2 e α são conhecidos.
- (b) Encontre o estimador máxima verossimilhança para σ^2 após o resultado de (a) e dado que α é conhecido.
- (c) A partir dos resultados de (a) e (b) mostre o sistema iterativo para encontrar o estimador de α .
3. Um estudo longitudinal foi conduzido de forma que cada indivíduo foi avaliado nas mesmas n ocasiões. Considere o modelo linear marginal para dados longitudinais tal que:

$$Y_i \sim N_n(X_i\beta, \sigma^2 V_0(\alpha)) \quad i = 1, \dots, N.$$

- (a) Na situação transversal, ou seja tomando uma única ocasião de avaliação, com μ desconhecido,

$$Y_i \sim N_1(\mu, \sigma^2) \quad i = 1, \dots, N.$$

mostre que o estimador de máxima verossimilhança para σ^2 é viciado e encontre o viés.

- (b) Mostre que o estimador de máxima verossimilhança restrita para σ^2 é não viciado.
- (c) Refaça as letras (a), (b) e (c) do Exercício 2 encontrando o estimador de máxima verossimilhança restrita.

4. Faça uma análise exploratória do dados referentes aos ratos em terapia hormonal. Os 50 ratos foram divididos em três grupos (controle, dose baixa e dose alta) e foram avaliados em 7 ocasiões (50, 60, 70, 80, 90, 100 e 110 dias). A resposta medida foi a distância cranio-facial no raio-x (em pixels) e os objetivos são: (1) comparar os grupos e (2) avaliar as mudanças temporais. O banco de dados está disponível em <http://www.est.ufmg.br/~enricoc/>.
5. No Exercício (4) foi realizada uma análise exploratória dos dados referentes aos ratos em terapia hormonal. A partir dos resultados exploratórios proponha um ou mais modelos para estes dados. Ajuste os modelos e interprete os resultados. Existem diferenças entre os grupos?
6. No exercício (1), utilizando a matriz de trabalho $W = I_5$, encontre a variância robusta para o estimador $\hat{\beta}_I$.