

Estimação de Medidas de Desempenho em Filas Erlang

Eriky S. Gomes * Frederico R. B. Cruz * Roberto C. Quinino *

* Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais,
31270-901 - Belo Horizonte - MG, Brazil
E-mail: eriky-tn@ufmg.br, fcruz@est.ufmg.br, roberto@est.ufmg.br.

Abstract:

Estimation in queueing systems with Markovian arrivals, Erlang service times, and single servers is the focus of this article, specifically $M/E_r/1$ queues in Kendall notation. Statistical methods are proposed to estimate important parameters in this queueing model, based on finite samples of the number of customers who arrived during the service periods. The classical maximum likelihood estimator (MLE) is described, and a new Bayesian estimator based on a flexible prior distribution is developed. Results from Monte Carlo simulations are presented to demonstrate the effectiveness and efficiency of the estimators.

Resumo: Estimação em sistemas de filas com chegadas markovianas, tempos de serviço Erlang e servidores únicos são o foco deste artigo, ou seja, filas $M/E_r/1$ na notação de Kendall. Métodos estatísticos são propostos para estimar parâmetros importantes nesse tipo de fila, com base em amostras finitas do número de clientes que chegam durante os períodos de serviço. É apresentado o clássico estimador de máxima verossimilhança (EMV) e é desenvolvido um estimador bayesiano baseado em uma distribuição a priori flexível. São apresentados resultados de simulações Monte Carlo, para atestar a eficácia e eficiência dos estimadores.

Keywords: $M/E_r/1$ queue; MLE; Bayesian inference; performance measures.

Palavras-chaves: Fila $M/E_r/1$; EMV; inferência bayesiana; medidas de desempenho.

1. INTRODUÇÃO

A inferência em filas tem experimentado um crescimento contínuo, desde os trabalhos pioneiros de Clarke (1957), que introduziu estimativas pelo clássico método da máxima verossimilhança, e de Bagchi and Cunningham (1972), Muddapur (1972) e Reynolds (1973), que contribuíram significativamente para a estimação bayesiana. Embora os modelos de filas sejam essencialmente probabilísticos, o ajuste estatístico de seus parâmetros tem atraído a atenção de vários pesquisadores, incluindo Armero and Bayarri (1994), Insua et al. (1998). Inclusive, Singh et al. (2021, 2023, 2024) abordam problemas de estimação similares, mas para outros modelos de filas.

Neste artigo, descrevemos extensões significativas da pesquisa de Singh et al. (2020), pela proposição de novos estimadores para a intensidade de tráfego de filas markovianas com servidor único e tempo de serviço Erlang com r estágios, ou seja, filas $M/E_r/1$, na notação de Kendall. As amostras finitas são constituídas pelo número de clientes que chegam durante os tempos de serviço, o que é uma maneira prática e eficiente de coletar dados. Consideramos aqui o método da máxima verossimilhança e o método bayesiano, sob uma família de distribuições flexível.

Na Seção 2, constrói-se a função de verossimilhança e desenvolvem-se as estimativas de máxima verossimilhança e bayesianas para parâmetros importantes das filas $M/E_r/1$. Na Seção 3 são apresentados resultados de simulações Monte Carlo para comprovar a eficácia e eficiência dos estimadores. A Seção 4 encerra o artigo.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 Filas $M/E_r/1$

As filas $M/E_r/1$ têm chegadas Poisson, com parâmetro λ , e tempos de serviço Erlang com r estágios, ou seja, tempos de serviço são uma soma de r períodos de serviço exponenciais independentes e identicamente distribuídos, com parâmetros $r\mu$. Consequentemente, as funções de densidade de probabilidade (fdp) dos tempos entre chegadas e dos tempos de serviço são denotados por $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente,

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0, \quad (1)$$

e

$$b(t) = \frac{(r\mu)(r\mu t)^{r-1}e^{-r\mu t}}{(r-1)!}, t \geq 0, \quad (2)$$

em que $\lambda > 0$, $\mu > 0$ e r é um inteiro positivo.

Seja X_k o número de clientes que chegam durante o período de serviço S de r estágios do k -ésimo cliente.

* ESG agradece à CAPES, processo 88887.823719/2023-00, Programa de Demanda Social, UFMG. FRBC agradece ao CNPq, processo 305442/2022-8, e à FAPEMIG, processo CEX-PPM-00564-17, pelo apoio financeiro parcial.

Uma vez que as chegadas seguem um processo de Poisson, X_k são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e a variável aleatória comum, denotada por X , depende apenas de S , ou seja,

$$P(X = x) = \int_0^\infty P(X = x|S = t)dB(t), \quad x = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

dado em termos de uma integral de Stieltjes, em que

$$P(X = x|S = t) = \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

que segue diretamente de (1). Lembre-se que, nos casos em que a função de densidade cumulativa existe e é absolutamente contínua, $dB(t)$ pode ser substituído por $b(t)dt$, o que resulta em uma integral de Riemann, que é mais familiar,

$$P(X = x) = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}b(t)dt, \quad x = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Portanto, de (1) e (2), segue que

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^\infty \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \cdot \frac{(r\mu)(r\mu t)^{r-1}e^{-r\mu t}}{(r-1)!}dt \\ &= \binom{r+x-1}{x} \left(\frac{1}{1+\rho/r} \right)^r \left(\frac{\rho/r}{1+\rho/r} \right)^x, \quad x = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

em que $\rho = \lambda/\mu$ é a intensidade de tráfego, que precisa ser tal que $0 < \rho < 1$, para que a fila seja estável. Note-se que X segue uma distribuição binomial negativa, ou seja,

$$X \sim \text{NB} \left(m = r, p = \frac{1}{1+\rho/r} \right). \quad (7)$$

2.2 Estimador de Máxima Verossimilhança

Agora, suponha que uma amostra $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de tamanho n seja extraída da variável aleatória comum X . Então, a função de verossimilhança para este modelo é

$$\begin{aligned} L(\rho, \mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \alpha_i \frac{(\rho/r)^{x_i}}{(1+\rho/r)^{x_i+r}} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \{ \alpha_i \} \frac{(\rho/r)^y}{(1+\rho/r)^{y+nr}}, \end{aligned} \quad (8)$$

na qual α_i é um fator independente de ρ e $y = \sum_{i=1}^n x_i$ é o número total de chegadas de clientes observado na amostra.

Tomando a derivada de (8) e igualando-a a zero, podemos deduzir a seguinte estimativa de máxima verossimilhança:

$$\frac{dL(\rho, \mathbf{x})}{d\rho} = 0 \Rightarrow$$

$$y(\rho/r)^{y-1}(1+\rho/r)^{y+nr} - (\rho/r)^y(y+nr)(1+\rho/r)^{y+nr-1} = 0 \Rightarrow$$

$$y(1+\rho/r) - (\rho/r)(y+nr) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{(1+\rho/r)}{\rho/r} &= \frac{y+nr}{y} \Rightarrow r/\rho + 1 = 1 + nr/y \Rightarrow \\ \hat{\rho}_{\text{MLE}} &= \begin{cases} \frac{y}{n}, & \text{if } y/n < 1, \\ 1^-, & \text{if } y/n \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Uma vez que as estimativas de máxima verossimilhança são invariantes (Tan and Drossos, 1975), podemos usar conhecidas expressões (Gross et al., 2009), para o comprimento médio da fila, $L_q = \rho^2/(1-\rho)$, e para o número esperado de clientes no sistema, $L_s = \rho/(1-\rho)$, para deduzir seus respectivos estimadores de máxima verossimilhança:

$$\hat{L}_{q\text{MLE}} = \frac{(\hat{\rho}_{\text{MLE}})^2}{1 - \hat{\rho}_{\text{MLE}}} \quad (10)$$

e

$$\hat{L}_{s\text{MLE}} = \frac{\hat{\rho}_{\text{MLE}}}{1 - \hat{\rho}_{\text{MLE}}}. \quad (11)$$

2.3 Inferência Bayesiana

Priori Gaussiana Hipergeométrica

A distribuição gaussiana hipergeométrica (veja Armero and Bayarri, 1994, p. 144) é proposta como uma distribuição a priori flexível para a intensidade de tráfego ρ ,

$$\pi_G(\rho|a, b, c, -1/r) = \frac{\rho^{b-1}(1-\rho)^{c-b-1}(1+\rho/r)^{-a}}{\mathcal{B}(b, c-b) {}_2F_1(a, b, c, -1/r)}, \quad (12)$$

para $0 < \rho < 1$, em que $a > 0$, $c > b > 0$ são os hiperparâmetros e r é um inteiro positivo. Nessa notação, ${}_2F_1(a, b, c, z)$ e $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ representam a função gaussiana hipergeométrica e a função beta, respectivamente (consulte Abramowitz and Stegun, 1964, cap. 15), que são expressas na forma integral como sendo:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) &= \\ \frac{1}{\mathcal{B}(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 \rho^{\beta-1} (1-\rho)^{\gamma-\beta-1} (1-\zeta\rho)^{-\alpha} d\rho \end{aligned} \quad (13)$$

e

$$\mathcal{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 \rho^{\alpha-1} (1-\rho)^{\beta-1} d\rho, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (14)$$

Distribuição a Posteriori e Estimação de ρ , L_q e L_s

Dada uma da amostra aleatória de tamanho n , $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, a função de verossimilhança (8), $L(\rho, \mathbf{x})$, e a distribuição a priori (12), $\pi_G(\rho|a, b, c, -1/r)$, tem-se a seguinte distribuição a posteriori para ρ :

$$\begin{aligned}
p_G(\rho|a, b, c, -1/r) &= \frac{L(\rho, \mathbf{x}) \cdot \pi_G(\rho|a, b, c, -1/r)}{\int_0^1 L(\rho, \mathbf{x}) \cdot \pi_G(\rho|a, b, c, -1/r) d\rho} \\
&= \frac{\rho^{b-1+y}(1-\rho)^{c-b-1}(1+\rho/r)^{-a-y-nr}}{\mathcal{B}(b+y, c-b) {}_2F_1(a+y+nr, b+y, c+y, -1/r)}. \quad (15)
\end{aligned}$$

Portanto, as estimativas bayesianas de ρ baseadas na priori gaussiana hipergeométrica (denotadas por $\hat{\rho}_G$) podem ser deduzidas por meio de esperanças com respeito à distribuição a posteriori (15), $p_G(\rho|a, b, c, -1/r)$:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_G &= \mathbb{E}(\rho|\mathbf{x}, a, b, c, -1/r) \\
&= \int_0^1 \rho \cdot p_G(\rho|a, b, c, -1/r) d\rho \\
&= \frac{(b+y) {}_2F_1(a+y+nr, b+y+1, c+y+1, -1/r)}{(c+y) {}_2F_1(a+y+nr, b+y, c+y, -1/r)}. \quad (16)
\end{aligned}$$

A estimativa bayesiana para o comprimento médio da fila (denotada por $\hat{L}_{qG}$) é dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{qG} &= \mathbb{E}(L_q|\mathbf{x}, a, b, c, -1/r) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right) \middle| \mathbf{x}, a, b, c, -1/r\right] \\
&= \int_0^1 \rho^2(1-\rho)^{-1} \cdot p_G(\rho|a, b, c, -1/r) d\rho \\
&= \frac{(b+y+1)(a+y-1)}{(c+y)(c-b-1)} \times \\
&\quad \frac{{}_2F_1(a+y+nr, b+y+2, c+y+1, -1/r)}{{}_2F_1(a+y+nr, b+y, c+y, -1/r)}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Da mesma forma, a estimativa bayesiana para o número esperado de clientes no sistema (denotada por $\hat{L}_{sG}$) é dada por:

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{sG} &= \mathbb{E}(L_s|\mathbf{x}, a, b, c, -1/r) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) \middle| \mathbf{x}, a, b, c, -1/r\right] \\
&= \int_0^1 \rho(1-\rho)^{-1} \cdot p_G(\rho|a, b, a+b, -1/r) d\rho \\
&= \frac{(b+y)}{(a-1)} \frac{{}_2F_1(a+y+nr, b+y+1, c+y, -1/r)}{{}_2F_1(a+y+nr, b+y, c+y, -1/r)}. \quad (18)
\end{aligned}$$

3. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nessa seção são apresentados os resultados das simulações numéricas de Monte Carlo realizadas para validação dos estimadores propostos nesse trabalho. As simulações foram realizadas por meio de algoritmos codificados em R (R Core Team, 2023), que estão disponíveis por solicitação aos autores, executados em um computador com as seguintes especificações: Microsoft Windows^(C) 10 Home, Intel^(R) Core^(TM) i5-7200U CPU @ 2.50GHz, 12 GB de RAM, SSD de 256 GB, Intel^(R) HD Graphics 620, tela Full HD de 15.6”(1920x1080), bateria de íons de lítio de 3 células, 1

porta USB 3.0, 2 portas USB 2.0, 1 porta HDMI, 1 porta Ethernet, Wi-Fi integrado 802.11ac.

Foram considerados tamanhos de amostra $n \in \{10, 20, 50, 100, 200\}$, valores de intensidade de tráfego $\rho \in \{0, 01; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 0, 99\}$ e número de estágios $r \in \{1, 2\}$. Não serão apresentados resultados para os estimadores de L_q e L_s devido a particularidades que serão melhor discutidas em trabalhos futuros; apenas os resultados para ρ serão apresentados. As simulações de Monte Carlo foram executadas com 1000 replicações para cada combinação de tamanho de amostra, estimador e intensidade de tráfego, utilizando-se a semente 2023. Avaliou-se o desempenho do estimador clássico de máxima verossimilhança em comparação ao estimador bayesiano sob a priori gaussiana hipergeométrica com parâmetros $a = 3$, $b = 2$ e $c = 5$.

A Figura 1 apresenta alguns exemplos de distribuições a priori gaussianas hipergeométricas, que modelam diferentes configurações de sistemas de filas com 1 ou 2 estágios.

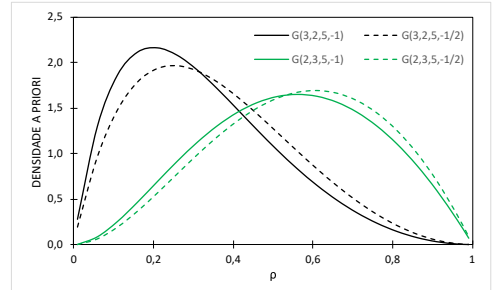


Figura 1. Distribuição a priori gaussiana hipergeométrica

Os resultados numéricos obtidos das simulações de Monte Carlo são apresentados na Tabela 1 em termos das estimativas médias e suas respectivas variâncias, para cada combinação de estimador, tamanho de amostra, valor verdadeiro da intensidade de tráfego e número de estágios. É possível observar que as estimativas de máxima verossimilhança e bayesianas têm menor viés e menor variância quanto maior o tamanho da amostra, o que indica consistência dos estimadores propostos, uma propriedade desejável. Além disso, é possível perceber que as estimativas de máxima verossimilhança são mais próximas do valor verdadeiro, porém apresentam variabilidade maior em comparação às estimativas do estimador bayesiano sob a priori gaussiana hipergeométrica.

O desempenho desses estimadores pode ser também analisado por meio das Figuras 2 e 3, que resumem os resultados da Tabela 1. Especificamente, nota-se pela Figura 2 que as estimativas de máxima verossimilhança apresentam viés próximo a zero em quase todo o espaço paramétrico, com exceção dos valores de $\rho > 0,8$, nos quais as estimativas apresentam viés negativo, possivelmente devido às restrições do espaço paramétrico (ou seja, $0 < \rho < 1$). As estimativas bayesianas superestimam o parâmetro para valores de $\rho < 0,4$ e subestimam o parâmetro para valores de $\rho \geq 0,4$, aproximadamente.

Da análise da Figura 3 observa-se que o estimador clássico apresenta variância superior ao estimador bayesiano em todo espaço paramétrico, sendo que a sua variabilidade atinge o máximo em valores de $\rho \approx 0,7$, o que indica maior instabilidade das estimativas de máxima verossimilhança

Tabela 1. Estimativas médias e variâncias (entre parênteses) para ρ .

r	Estimator	ρ	n				
			10	20	50	100	200
1	MLE	0.01	0.0096 (0.0010)	0.0095 (0.0005)	0.0100 (0.0002)	0.0101 (0.0001)	0.0100 (0.0001)
		0.1	0.0978 (0.0112)	0.1014 (0.0057)	0.1004 (0.0023)	0.1012 (0.0011)	0.1010 (0.0006)
		0.2	0.1960 (0.0249)	0.2008 (0.0124)	0.1989 (0.0051)	0.2004 (0.0024)	0.2010 (0.0012)
		0.3	0.2949 (0.0392)	0.2992 (0.0199)	0.2983 (0.0081)	0.3010 (0.0039)	0.3009 (0.0020)
		0.4	0.3895 (0.0514)	0.3972 (0.0276)	0.3983 (0.0114)	0.4014 (0.0056)	0.4012 (0.0029)
		0.5	0.4806 (0.0635)	0.4961 (0.0367)	0.4985 (0.0154)	0.5027 (0.0076)	0.5022 (0.0039)
		0.6	0.5635 (0.0694)	0.5886 (0.0421)	0.5960 (0.0193)	0.6019 (0.0096)	0.6025 (0.0049)
		0.7	0.6420 (0.0725)	0.6758 (0.0442)	0.6939 (0.0216)	0.7011 (0.0113)	0.7023 (0.0058)
		0.8	0.7098 (0.0685)	0.7531 (0.0417)	0.7831 (0.0217)	0.7976 (0.0123)	0.8020 (0.0070)
		0.9	0.7654 (0.0609)	0.8158 (0.0362)	0.8598 (0.0180)	0.8831 (0.0103)	0.8942 (0.0064)
		0.99	0.8119 (0.0529)	0.8610 (0.0304)	0.9127 (0.0126)	0.9411 (0.0062)	0.9562 (0.0035)
	$GH(3; 2; 5, -1)$	0.01	0.1554 (0.0004)	0.0962 (0.0004)	0.0478 (0.0002)	0.0294 (0.0001)	0.0198 (0.0001)
		0.1	0.2100 (0.0039)	0.1716 (0.0036)	0.1328 (0.0020)	0.1181 (0.0010)	0.1096 (0.0006)
		0.2	0.2650 (0.0070)	0.2476 (0.0067)	0.2230 (0.0041)	0.2134 (0.0021)	0.2077 (0.0012)
		0.3	0.3153 (0.0092)	0.3167 (0.0090)	0.3107 (0.0059)	0.3083 (0.0034)	0.3049 (0.0019)
		0.4	0.3598 (0.0106)	0.3793 (0.0102)	0.3940 (0.0074)	0.4005 (0.0046)	0.4013 (0.0026)
		0.5	0.3999 (0.0120)	0.4361 (0.0112)	0.4714 (0.0084)	0.4895 (0.0055)	0.4963 (0.0033)
		0.6	0.4352 (0.0125)	0.4857 (0.0112)	0.5396 (0.0085)	0.5709 (0.0059)	0.5871 (0.0038)
		0.7	0.4683 (0.0129)	0.5304 (0.0111)	0.6017 (0.0078)	0.6445 (0.0055)	0.6716 (0.0038)
		0.8	0.4986 (0.0129)	0.5702 (0.0107)	0.6542 (0.0071)	0.7081 (0.0049)	0.7463 (0.0034)
		0.9	0.5266 (0.0128)	0.6050 (0.0101)	0.6998 (0.0062)	0.7611 (0.0039)	0.8074 (0.0026)
		0.99	0.5498 (0.0122)	0.6326 (0.0098)	0.7348 (0.0052)	0.8005 (0.0030)	0.8505 (0.0018)
2	MLE	0.01	0.0104 (0.0011)	0.0099 (0.0005)	0.0102 (0.0002)	0.0101 (0.0001)	0.0100 (0.0001)
		0.1	0.1006 (0.0107)	0.1052 (0.0054)	0.1022 (0.0023)	0.1025 (0.0012)	0.1006 (0.0005)
		0.2	0.2051 (0.0233)	0.2073 (0.0107)	0.2020 (0.0046)	0.2026 (0.0023)	0.2003 (0.0011)
		0.3	0.2997 (0.0349)	0.3048 (0.0171)	0.3016 (0.0073)	0.3025 (0.0037)	0.3009 (0.0017)
		0.4	0.4037 (0.0490)	0.4090 (0.0237)	0.4027 (0.0102)	0.4039 (0.0051)	0.4011 (0.0023)
		0.5	0.4953 (0.0595)	0.5075 (0.0310)	0.5009 (0.0135)	0.5034 (0.0067)	0.5011 (0.0032)
		0.6	0.5861 (0.0634)	0.6048 (0.0367)	0.6007 (0.0165)	0.6029 (0.0082)	0.6000 (0.0041)
		0.7	0.6660 (0.0632)	0.6956 (0.0383)	0.6999 (0.0191)	0.7036 (0.0100)	0.7001 (0.0050)
		0.8	0.7401 (0.0577)	0.7797 (0.0356)	0.7949 (0.0191)	0.8023 (0.0107)	0.8004 (0.0057)
		0.9	0.7978 (0.0517)	0.8461 (0.0299)	0.8734 (0.0154)	0.8909 (0.0091)	0.8961 (0.0054)
		0.99	0.8441 (0.0435)	0.8914 (0.0225)	0.9257 (0.0098)	0.9485 (0.0052)	0.9605 (0.0027)
	$GH(3; 2; 5, -1)$	0.01	0.1604 (0.0005)	0.0974 (0.0004)	0.0480 (0.0002)	0.0295 (0.0001)	0.0198 (0.0000)
		0.1	0.2197 (0.0043)	0.1776 (0.0036)	0.1351 (0.0020)	0.1195 (0.0011)	0.1092 (0.0005)
		0.2	0.2824 (0.0077)	0.2589 (0.0063)	0.2276 (0.0039)	0.2162 (0.0022)	0.2074 (0.0011)
		0.3	0.3342 (0.0096)	0.3309 (0.0087)	0.3172 (0.0057)	0.3114 (0.0033)	0.3057 (0.0016)
		0.4	0.3859 (0.0114)	0.4015 (0.0100)	0.4043 (0.0071)	0.4059 (0.0043)	0.4027 (0.0022)
		0.5	0.4282 (0.0124)	0.4617 (0.0109)	0.4835 (0.0081)	0.4957 (0.0052)	0.4980 (0.0028)
		0.6	0.4693 (0.0123)	0.5159 (0.0110)	0.5574 (0.0082)	0.5806 (0.0055)	0.5895 (0.0034)
		0.7	0.5051 (0.0124)	0.5637 (0.0104)	0.6235 (0.0078)	0.6590 (0.0054)	0.6775 (0.0035)
		0.8	0.5395 (0.0118)	0.6077 (0.0095)	0.6812 (0.0067)	0.7272 (0.0046)	0.7569 (0.0031)
		0.9	0.5690 (0.0117)	0.6457 (0.0088)	0.7288 (0.0055)	0.7832 (0.0036)	0.8222 (0.0023)
		0.99	0.5936 (0.0109)	0.6752 (0.0078)	0.7654 (0.0044)	0.8237 (0.0026)	0.8673 (0.0014)

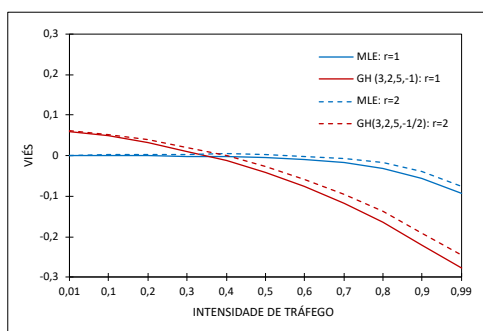


Figura 2. Viés médio das estimativas em função de ρ

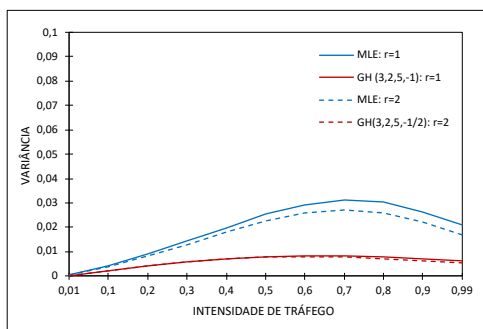


Figura 3. Variância média em função de ρ

quando a intensidade de tráfego é próxima desse valor. Logo, a análise das estimativas obtidas indica que o estimador de máxima verossimilhança é preferível quando se analisa apenas o viés como métrica de desempenho, mas o estimador bayesiano é preferível quando se analisa somente a variância como métrica de desempenho.

Entretanto, resultados não apresentados revelam que, de acordo com a métrica amplamente utilizada do erro quadrático médio (EQM), o novo estimador bayesiano demonstra valores inferiores de EQM na faixa de intensidade de tráfego de 0,1 a 0,7. Portanto, eles podem ser considerados superiores e preferíveis ao tradicional estimador de máxima verossimilhança nessa faixa de valores.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo, foram desenvolvidos estimadores bayesianos para a intensidade de tráfego, o comprimento médio da fila e o número esperado de clientes no sistema, em filas de serviço Erlang com servidor único. A singularidade dos resultados apresentados reside no método de coleta de dados, que se baseia na observação do número de clientes que chegam durante o período de serviço de cada cliente. Além disso, o clássico estimador de máxima verossimilhança (EMV) foi confrontado com novos estimadores bayesianos, derivados aqui sob a distribuição a priori gaussiana hipergeométrica. Utilizando simulações numéricas de Monte Carlo, foram analisados tanto o viés quanto a variância das estimativas obtidas por meio de cada um desses métodos.

Os resultados obtidos indicam que o EMV exibe um viés inferior ao estimador bayesiano em todo o espaço paramétrico. Por outro lado, o estimador bayesiano demonstra uma variância inferior ao EMV em todo o mesmo espaço paramétrico. Dessa forma, podemos concluir que o estimador clássico é menos enviesado, enquanto o estimador bayesiano é mais estável. Entretanto, ao combinar o qua-

drado do viés com a variância, obtemos o erro quadrático médio (EQM), que indica que o novo estimador bayesiano é superior e preferível, exceto nas extremidades do espaço paramétrico ($\rho \leq 0,1$ e $\rho \geq 0,7$).

Trabalhos futuros relacionados a essa área de pesquisa incluem a utilização de outras distribuições a priori, como a distribuição de Jeffreys ou a distribuição Beta, e a extensão da metodologia para outras configurações de sistemas de filas, tais como filas markovianas finitas ($M/M/1/k$).

REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, NY.
- Armero, C. and Bayarri, M.J. (1994). Prior assessments for prediction in queues. *Journal of the Royal Statistical Society. Series D (The Statistician)*, 43(1), 139–153.
- Bagchi, T.P. and Cunningham, A.A. (1972). Bayesian approach to the design of queueing systems. *INFORMS*, 10, 36–46.
- Clarke, A.B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(4), 1036–1040.
- Gross, D., Shortle, J.F., Thompson, J.M., and Harris, C.M. (2009). *Fundamentals of queueing theory*. Wiley-Interscience, New York, NY, 4th edition.
- Insua, D.R., Wiper, M., and Ruggeri, F. (1998). Bayesian analysis of $M/E_r/1$ and $M/H_k/1$ queues. *Queueing Systems*, 30(3), 289–308.
- Muddapur, M.V. (1972). Bayesian estimates of parameters in some queueing models. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 24(1), 327–331.
- R Core Team (2023). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Reynolds, J.F. (1973). On estimating the parameters of a birth-death process. *Australian Journal of Statistics*, 15(1), 35–43.
- Singh, S.K., Acharya, S.K., Cruz, F.R.B., and Quinino, R.C. (2021). Bayesian sample size determination in a single-server deterministic queueing system. *Mathematics and Computers in Simulation*, 187, 17–29.
- Singh, S.K., Acharya, S.K., Cruz, F.R.B., and Quinino, R.C. (2023). Bayesian inference and prediction in an $M/D/1$ queueing system. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 52(24), 8844–8864.
- Singh, S.K., Cruz, F.R.B., Gomes, E.S., and Banik, A.D. (2024). Classical and bayesian estimations of performance measures in a single server markovian queueing system based on arrivals during service times. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 53(10), 3517–3546.
- Singh, S.K., Cruz, F.R.B., and Quinino, R.C. (2020). Bayesian inference in Erlang single server queueing model based on queue length. *Unpublished Manuscript (submitted)*, 1–30. URL <http://www.est.ufmg.br/ftp/fcruz/publics/bayesmer1.pdf>.
- Tan, P. and Drossos, C. (1975). Invariance properties of maximum likelihood estimators. *Mathematics Magazine*, 48(1), 37–41.