

# MODELAGEM DE CHEGADAS EM FILAS GI[X]/M/C/K VIA NÚCLEO-ESTIMADORES

**F. R. B. Cruz, A. R. Duarte, N. L. C. Brito**

Universidade Federal de Minas Gerais, fcruz@est.ufmg.br, Universidade Federal de Ouro Preto, anderson@iceb.ufop.br, Universidade Estadual de Montes Claros, nilson.brito@unimontes.br

## Resumo

A incorporação da estimação estatística na análise de filas finitas é uma ideia interessante e promissora como área de pesquisa. Neste artigo exploramos a ideia de utilizar um conhecido método não-paramétrico (o núcleo-estimador), na modelagem de chegadas gerais em bloco. Apresentamos uma implementação na linguagem R dos métodos discutidos, bem como resultados preliminares da avaliação dos algoritmos em função do tipo de núcleo-estimador utilizado, do tamanho da janela de suavização, da intensidade de tráfego e do tamanho do sistema. Os resultados são animadores.

**Palavras-Chave:** *estatística, sistemas de filas, núcleo-estimador, avaliação de desempenho*

## 1. Introdução

Abordamos neste trabalho filas multiservidoras (ver Figura 1) do tipo  $GI^{[X]}/M/c/N$ . Na conhecida notação de Kendall (1953),  $GI$  representa tempos entre chegadas (em grupos) independentes e com distribuição geral,  $M$  representa tempos de serviços exponencialmente distribuídos,  $c$  representa o número de servidores em paralelo e  $N$  é o número máximo de usuários que são permitidos simultaneamente no sistema. Finalmente,  $X$  é uma variável aleatória que representa o número de usuários na chegada, que pode ser em grupos. Este tipo de fila tem grande interesse prático, principalmente em situações em que temos controle relativo sobre os servidores, mas não sabemos de antemão como, e em grupos de quantos, os clientes chegam ao sistema.

Os métodos mais utilizados para modelar o processo de chegada são paramétricos. No entanto, dados reais raramente se encaixam bem em modelos paramétricos ou, quando se encaixam, produzem modelos matematicamente ou computacionalmente intratáveis. Resultados exatos da avaliação de desempenho de sistemas markovianos e de alguns sistemas de filas simples mais gerais são conhecidos (GROSS et al., 2009), mas esses sistemas, por vezes, ainda estão muito longe de problemas da vida real. Por isso, adotamos aqui uma abordagem alternativa, via métodos não-paramétricos.

Dentre os métodos não-paramétricos, encontramos os métodos baseados em núcleo-estimadores. Atualmente tais métodos têm recebido uma atenção crescente (LIMA & ATUNCAR, 2011). De fato, núcleo-estimadores fornecem uma maneira simples de encontrar estrutura em conjuntos de dados sem impor um modelo paramétrico específico (WAND & JONES, 1985). Isto nos dá flexibilidade para lidar com praticamente qualquer conjunto de dados. Existe uma extensa literatura discutindo filas de espera (ALLEN, 1990) e núcleo estimadores (WAND & JONES, 1985), como conceitos separados, mas são poucos os estudos que trazem os dois conceitos combinados.

Neste artigo apresentamos uma implementação na linguagem R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010) de algoritmos para calcular as medidas de desempenho de filas  $GI^{[X]}/M/c/N$ , em que a função densidade de probabilidade do tempo entre-chegadas é determinada por núcleo-estimadores. Apresentamos também resultados da avaliação dos algoritmos em função do tipo de núcleo-estimador utilizado, do tamanho da janela de suavização, da intensidade de tráfego e do tamanho do sistema.

Organizamos o restante deste artigo como se segue. Primeiro, apresentamos uma breve revisão da literatura sobre sistemas de filas e núcleo-estimadores. Apresentamos então resultados comparativos preliminares de simulações, para diferentes métodos de núcleo-estimadores.

## 2. Materiais e Métodos

### 2.1 Filas com Chegadas em Grupo

Vijaya Laxmi & Gupta (2000) descreveram a fila  $GI^{[X]}/M/c/N$  em que clientes chegam em grupos de tamanho  $X$ , com  $P(X = i) = g_i$ , para  $i \geq 1$  e  $E(X) = \bar{g}$ , e taxa da intensidade de tráfego  $\rho = \lambda\bar{g}/c\mu$ , em que  $\lambda$  é a taxa de chegada e  $\mu$  é a taxa de serviço. É mostrado que as probabilidades invariantes  $p$ , relativas ao número de pessoas que um observador externo encontra no sistema, em um momento *arbitrário*, são dadas por:

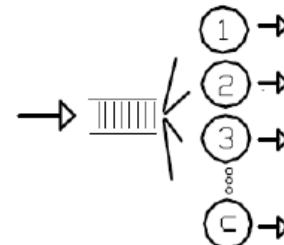


Figura 1 – Um fila com servidores múltiplos

$$p_k = \begin{cases} \frac{\rho}{\min\{k, c\} \bar{g}} \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \sum_{j=k-i}^{\infty} g_j, & 0 < k \leq N, \\ 1 - \sum_{i=1}^N p_i, & k = 0, \end{cases} \quad (1)$$

em que  $\pi_i$  é a distribuição de probabilidade invariante *pré-chegada* ( $\pi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ), associada ao número de pessoas que um cliente encontra ao chegar no sistema. Os valores de  $\pi_i$  são determinados em função das probabilidades de transição do estado  $j$  para o estado  $k$ ,  $p_{jk}$ , pelo sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} p_{0,0} - ) & p_{1,0} & \cdots & p_{N,0} \\ p_{0,1} & (p_{1,1} - ) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{0,N-} & \cdots & \cdots & (p_{N,N-} - ) \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ) \\ ) \\ \vdots \\ ) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2)$$

Tais probabilidades de transição  $p_{jk}$  são dadas por:

$$p_{jk} = \begin{cases} \sum_{i=\max\{0, k-j\}}^{N-j} \beta_{i+k} g_i + \beta_{-k} \sum_{k=N-j+1}^{\infty} g_i, & c \leq k \leq N, \\ \sum_{i=\max\{0, k-j\}}^{N-j} V_{j+i,k} g_i + V_{N,k} \sum_{k=N-j+1}^{\infty} g_i, & 0 < k < c, \\ 1 - \sum_{r=1}^N p_{jr}, & k = 0, \end{cases} \quad (3)$$

em que

$$V_{j,k} = \begin{cases} 0, & j < k < c, \\ \int_0^{\infty} \int_0^j \int_k^{\infty} e^{-k\mu} (-e^{-\mu})^{j-k} dA(z), & k \leq j \leq c, \\ \int_0^{\infty} \int_0^c \int_k^{\infty} e^{-k\mu} \frac{(-\mu)^{j-c}}{(j-c)!} c\mu (-\mu)^{c-k} dy dA(z), & k < c < j, \end{cases} \quad (4)$$

e

$$\beta_r = \int_0^{\infty} \frac{e^{-c\mu}}{r!} \frac{(-\mu)^r}{r!} dA(z), \quad r \geq 0, \quad (5)$$

sendo  $A(z)$  a função de distribuição (geral) dos tempos entre as chegadas (que podem ser em blocos de tamanho  $X$ ).

Conhecidas as probabilidades  $p_k$ , as principais medidas de desempenho podem ser então determinadas, tais como a probabilidade de bloqueio ( $p_N$ ), taxa de chegada efetiva ( $\theta$ ), tamanho médio da fila ( $L_q$ ) e tempo médio na fila ( $W_q$ , aqui dado pela lei de Little):

$$\theta = 1 - \gamma_N),$$

$$L_q = \sum_{i=1}^n - \gamma_i P_i$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{g}\theta}$$
(6)

## 2.2 Núcleo-estimadores

O processo de chegada é modelado por meio de núcleo-estimadores. O modelo clássico é o estimador de Parzen-Rosemblatt:

$$\hat{\tau}_{\cdot,1}(x, h) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)$$
(7)

em que  $K(y)$  é uma função de densidade simétrica em torno de zero e  $h$  é um parâmetro de suavização da função, também chamado de janela (WAND & JONES, 1995).

Consideraremos neste trabalho vários tipos de núcleos, conforme detalhado a seguir. Dentre os núcleos indicados para estimar funções no domínio dos reais, consideramos o núcleo Normal, o núcleo Epanechnikov,

$$K_E(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)I_{[-1,1]}$$
(8)

e o núcleo gama,

$$K_G\left(\frac{x}{h} + , h\right) X_j = \frac{X_j^{x/h} e^{-X_j/h}}{h^{(x/h)} \Gamma\left(\frac{x}{h} + 1\right)}$$
(9)

Também experimentamos o estimador proposto por Zhang et al. (1999), que é uma alternativa para corrigir o problema de estimar uma função com domínio estritamente positivo, como é o caso aqui tratado (tempos entre chegadas dos blocos), em que os dados passam por uma transformação  $g(X_i)$ , resultando:

$$\hat{\tau}_{\cdot,1}(x, h) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n \left\{ K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) + K\left(\frac{x + g(X_j)}{h}\right) \right\}$$
(10)

em que  $K(y)$  é um núcleo usual.

## 3. Resultados Experimentais Preliminares e Discussão

Todos os algoritmos foram codificados em R (R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010) e estão disponíveis a pedido, para fins de ensino e de pesquisa.

Lembramos que o bom desempenho do núcleo-estimador depende da escolha adequada do parâmetro de suavização  $h$ . Para os núcleos normal, Epanechnikov e Zhang, utilizaremos o método plug-in modificado (CHIU, 1991; WAND & JONES, 1995). Para o núcleo gama,

testaremos duas alternativas, o método de validação cruzada por mínimos quadrados (LSCV, do inglês, *least squares cross validation*), e o método da esperança do erro quadrático integrado assintótico (AMISE, do inglês, *asymptotic mean integrated square error*) (CHEN, 2000).

Na Figura 2, vemos resultados de estimativas para amostras de uma distribuição Weibull(2; 20), para os tamanhos 16, 64, 256 e 1024. Na Figura 3, apresentamos resultados de experimentos computacionais para amostras de uma distribuição Gama(10; 2).

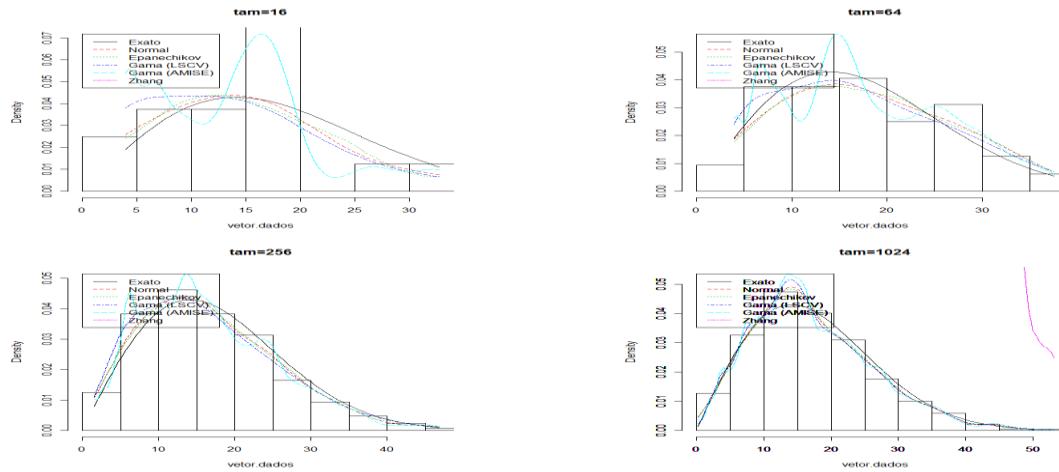


Figura 2 – Estimativas para amostras Weibull(2; 20)

Os resultados não diferem muito qualitativamente, isto é, nos dois casos testados notamos uma melhoria de estimativa, com aumento do tamanho da amostra, como era de se esperar. Também observamos que os núcleos Normal e Epanechnikov, apesar de não serem apropriados para o tipo de dado modelado (variável aleatória com domínio estritamente positivo), tiveram um desempenho superior ao estimador de Zhang, desenvolvido para resolver o problema de fronteira. Este é um resultado inesperado, possivelmente causado por uma convergência lenta do estimador de Zhang.

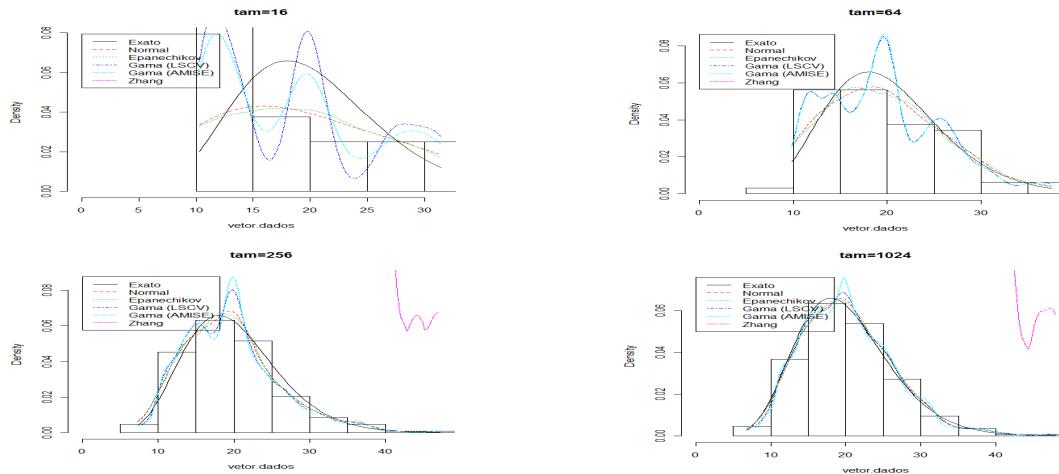


Figura 3 – Estimativas para amostras Gama(10; 2)

## Conclusões

Incorporamos ao estudo de filas a estimação estatística via um método não-paramétrico, o núcleo-estimador. Pelos resultados preliminares, o método pode representar bem o processo de entrada, mas pode estar sujeito a uma convergência lenta. Assim, mesmo para amostras de

tamanho consideravelmente grande ( $n = 1024$ ) a estimativa pode estar ainda longe do valor exato. Ainda que não apropriados para o tipo de dados que estamos modelando aqui (domínio estritamente positivo), os núcleos Normal, Epanechnikov e Gama tiveram um desempenho superior ao estimador de Zhang, desenvolvido especialmente para dados não negativos. Trabalhos futuros podem incluir a determinação das condições que garantem uma boa convergência e de como esta ferramenta pode ser aplicada a sistemas reais.

## Referências

- ALLEN, A. O. **Probability Statistics and Queuing Theory with Computer Science Applications**, Academic Press, San Diego, CA, 1990.
- CHEN, S. X. **Probability density function estimation using gamma kernels**, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, vol. 52, pp. 471-480, 2000.
- CHIU, S. T. **Bandwidth selection for kernel density estimation**. Annals of Statistics, vol. 33, pp. 1883-1905, 1991.
- DIMITRIOU, I.; LANGARIS, C. **A repairable queueing model with two-phase service, start-up times and retrial customers**. Computers & Operations Research, vol. 37, no. 7, pp. 1181-1190, 2010.
- GROSS, D.; SHORTLE, J. F.; THOMPSON, J. M.; HARRIS, C. M. **Fundamentals of queueing theory**. Wiley-Interscience, New York, 4a ed., 2009.
- KENDALL, D. G.. **Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of imbedded Markov chains**. Annals of Mathematical Statistics, vol. 24, p. 338-354, 1953.
- LIMA, M. S.; ATUNCAR, G. S. **A Bayesian method to estimate the optimal bandwidth for multivariate kernel estimator**. Journal of Nonparametric Statistics, vol. 23, no. 1, pp. 137-148, 2011.
- R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. URL <http://www.R-project.org>.
- VIJAYA LAXMI, P.; GUPTA, U.C. **Analysis of finite-buffer multi-server queues with group arrivals:  $GI^X/M/c/N$** . Queueing Systems, vol. 36, pp. 125-140, 2000.
- WAND, M. P.; JONES, M. C. **Kernel Smoothing**. Chapman and Hall/CRC; Boca Raton, FL, 1995.
- ZHANG, S., KARUNAMUNI, R. J. E JONES, M. C. **An improved estimator of density function at the boundary**. Journal of the American Statistical Association, vol. 94, pp. 1231-1241, 1999.