

## **MOMENTOS ANALÍTICOS PARA A INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS ERLANG**

**Eriky S. Gomes**

Departamento de Estatística, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais  
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil  
eriky-tn@ufmg.br

**Frederico R. B. Cruz**

Departamento de Estatística, ICEx, Universidade Federal de Minas Gerais  
31270-901 – Belo Horizonte – MG, Brasil  
fcruz@est.ufmg.br

### **RESUMO**

Sistemas de filas Erlang são uma importante generalização das filas markovianas de servidor único. São aplicáveis a situações em que os tempos de serviço ocorrem em estágios sucessivos. Um conveniente esquema amostral para estimação estatística de parâmetros desses sistemas consiste em observar o número de clientes que chegam durante os tempos de serviço. Entretanto, o estimador clássico de máxima verossimilhança desse modelo é enviesado, sobretudo quando a intensidade de tráfego é alta. Nesse sentido, esse trabalho tem como objetivo a obtenção original de expressões analíticas para o viés e a variância do estimador de máxima verossimilhança para filas Erlang sob esse esquema amostral. As expressões analíticas obtidas foram também avaliadas em termos de eficiência numérica com as simulações de Monte Carlo tradicionais. Os resultados indicam significativa redução no tempo de computação do viés e da variância do estimador ao se utilizar as expressões analíticas.

**PALAVRAS CHAVE.** Teoria das filas, filas Erlang, inferência.

**Tópicos:** EST&MP - Estatística e Modelos Probabilísticos; SIM - Simulação

### **ABSTRACT**

Erlang single-server queueing systems generalize the Markovian single-server queues and are applicable in situations where the service times occur in multiple stages. A convenient sampling scheme for statistical estimation of parameters in these systems consists of observing the number of customers arriving during service times. However, the maximum likelihood estimator in these models is biased, especially for higher traffic intensities. In this context, this paper develops theoretical expressions for the bias and variance of the maximum likelihood estimator in Erlang queueing systems under this sampling scheme. The theoretical expressions were also analyzed in terms of numerical efficiency using classical Monte Carlo simulations. The results showed a significant reduction in computation time for the bias and variance when using the theoretical expressions.

**KEYWORDS.** Queueing theory, Erlang queues, inference.

**Paper topics:** EST&MP - Statistics and Probabilistic Models; SIM - Simulation

## 1. Introdução

A teoria das filas é uma área de pesquisa tradicional, com trabalhos majoritariamente focados no desenvolvimento de modelos probabilísticos e dedução de medidas de desempenho para sistemas em que os clientes precisam esperar para serem atendidos [Choudhury e Basak, 2018]. Por outro lado, a inferência estatística em filas é mais recente e, na vertente clássica, estimadores de máxima verossimilhança foram desenvolvidos para vários modelos de filas.

Estes desenvolvimentos iniciaram-se com o trabalho de Clarke [1957] para as filas markovianas de servidor único, referidas como filas  $M/M/1$  na notação de Kendall, um dos mais simples modelos de filas. Avanços posteriores são creditados, por exemplo, a Wolff [1965], Basawa e Prabhu [1981], Basawa e Prabhu [1988] e, mais recentemente, a Srinivas e Udupa [2014], Quinino e Cruz [2017], Choudhury e Basak [2018], Singh e Acharya [2019] e Basak e Choudhury [2021].

Nesses trabalhos, vários esquemas amostrais são empregados, tais como observar todas as alterações do sistema até um critério de parada pré-definido ou observar o tamanho da fila em tempos aleatórios suficientemente espaçados ou em tempos de partidas suficientemente espaçados. Uma recente alternativa a esses esquemas amostrais tradicionais, que é de interesse deste artigo, foi proposta por Srinivas et al. [2011], que consiste em contar o número de clientes que chegam durante os tempos de atendimento. Dessa forma, é possível obter amostras *iid* de maneira eficiente, pois não há correlação entre observações sucessivas do sistema de filas.

Poucas análises sobre tal esquema amostral estão disponíveis na literatura, menos ainda para as filas Erlang de servidor único, referidas como filas  $M/E_r/1$ , uma importante generalização das filas markovianas e foco deste artigo. De fato, um exemplo prático de uma fila  $M/E_r/1$  pode ser encontrado na área da saúde, especificamente no processamento de pacientes em Pronto Socorro (PS). Os pacientes chegam de forma aleatória e requerem diferentes serviços médicos, o que pode ser modelado por um processo de Poisson. O processo de atendimento pode ser modelado como uma distribuição de Erlang, que é apropriada quando um único serviço (como um procedimento médico) consiste em várias fases (ou  $r$  estágios) que precisam ser concluídas em sequência. Por exemplo, um paciente pode ser inicialmente avaliado por um enfermeiro, depois examinado por um médico, seguido por vários exames (como exames de sangue ou de imagem) e, finalmente, receber o tratamento. Cada uma dessas fases pode ser modelada como uma distribuição exponencial e a soma dessas fases exponenciais forma uma distribuição de Erlang. Esta abordagem de modelagem proporciona uma representação mais realista do fluxo de pacientes e dos tempos de serviço em um PS.

Dessa forma, este artigo é motivado pela limitação das análises presentes na literatura acerca dos estimadores de máxima verossimilhança da intensidade de tráfego nas filas Erlang (veja, por exemplo, Harishchandra e Subba Rao [1988], que apresenta apenas resultados assintóticos para os estimadores). Especificamente, busca-se determinar a esperança e a variância exatas dos estimadores de máxima verossimilhança para filas Erlang, que valem para amostras finitas e, como caso limite, devem convergir aos resultados assintóticos. A determinação desses momentos depende da distribuição dos estimadores. Portanto, a determinação da distribuição exata do estimador de máxima verossimilhança também é escopo deste trabalho.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 são definidos o modelo probabilístico das filas  $M/E_r/1$  e o estimador de máxima verossimilhança para a sua intensidade de tráfego, bem como são deduzidos os momentos dos estimadores de máxima verossimilhança de filas Erlang. A Seção 3 apresenta resultados de simulações Monte Carlo para validação das expressões desenvolvidas para os momentos. Finalmente, algumas conclusões e observações finais são apresentadas na Seção 4, com sugestão de tópicos para pesquisas futuras na área.

## 2. Materiais e Métodos

Nesta seção são deduzidos, de maneira original, o viés e a variância do estimador de máxima verossimilhança (EMV) para a intensidade de tráfego  $\rho$  de filas Erlang de servidor único. Os poucos trabalhos existentes na literatura sob esse esquema amostral apenas consideram distribuições assintóticas do EMV (veja o texto clássico de Harishchandra e Subba Rao [1988] e, mais recentemente, o artigo de Choudhury e Basak [2018]). Essas distribuições assintóticas são imprecisas para amostras finitas, de interesse prático, e não consideram o truncamento do espaço paramétrico.

### 2.1. Filas Erlang de Servidor Único

As filas Erlang de servidor único são denotadas por filas  $M/E_r/1$  na notação de Kendall. Nesse sistema de filas, os tempos entre chegadas são independentes entre si e seguem uma distribuição exponencial com função densidade de probabilidade (f.d.p.)  $a(t)$  com taxa  $\lambda$ . Os tempos de serviço também são independentes entre si e seguem uma distribuição Erlang com f.d.p.  $b(t)$  com taxa global  $\mu$ . Em outras palavras, os tempos entre serviços ocorrem em  $r$  etapas exponencialmente distribuídas com taxa  $r\mu$  cada. Algebricamente, as densidades dos tempos entre chegadas e tempos de serviços são dadas respectivamente por

$$\begin{cases} a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0, \\ b(t) = \frac{(r\mu)^r t^{r-1} e^{-r\mu t}}{(r-1)!}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Seja  $X$  uma variável aleatória representando o número de chegadas durante um tempo de serviço de uma fila  $M/E_r/1$ . A função massa de probabilidade de  $X$  é dada por

$$\Pr(X = x) = \binom{x+r-1}{x} \left( \frac{\rho}{\rho+r} \right)^x \left( \frac{r}{\rho+r} \right)^r, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

em que a razão  $\rho = \lambda/\mu$  é a intensidade de tráfego.

Considere  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  uma amostra aleatória de  $X$ . A função de verossimilhança  $L(\rho|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i)$  satisfaz a seguinte relação:

$$L(\rho|\mathbf{x}) \propto \rho^y (\rho+r)^{-(nr+y)}. \quad (3)$$

em que  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ .

Então, derivando a expressão (3) com respeito a  $\rho$  e igualando a função obtida a 0, sob a restrição do espaço paramétrico  $0 \leq \rho < 1$ , obtém-se o estimador de máxima verossimilhança para a intensidade de tráfego em filas  $M/E_r/1$ , a saber:

$$\hat{\rho} = \begin{cases} \frac{y}{n}, & \text{se } y < n, \\ 1^-, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4)$$

em que a notação  $1^-$  é utilizada para indicar que o valor do estimador  $\hat{\rho}$  se aproxima de 1 pelo lado esquerdo, ou seja,  $\hat{\rho}$  é um valor infinitesimalmente menor que 1. Isso é necessário porque, na prática, o estimador não pode ser exatamente igual a 1 devido à restrição  $0 \leq \rho < 1$  no espaço paramétrico.

## 2.2. Dedução do Viés do Estimador de Máxima Verossimilhança

Considere  $\text{Viés}[\hat{\rho}] = E[\hat{\rho} - \rho] = E[\hat{\rho}] - \rho$ , o viés do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\rho}$ . Logo, deduzir o viés de  $\hat{\rho}$  é equivalente a deduzir o valor esperado desse estimador. Nesse sentido, o desenvolvimento que se segue passa pela dedução do valor esperado de  $\hat{\rho}$ .

Primeiramente, condicione a esperança de  $\hat{\rho}$  ao evento  $\{Y < n\}$ :

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\rho}] &= E \left[ \hat{\rho} \left[ I(Y < n) + I(Y \geq n) \right] \right] \\
 &= E[\hat{\rho} | Y < n] \Pr(Y < n) + E[\hat{\rho} | Y \geq n] \Pr(Y \geq n) \\
 &= \frac{1}{n} E[Y | Y < n] \Pr(Y < n) + 1 - \Pr(Y \geq n),
 \end{aligned}$$

em que  $I(\bullet)$  é a função indicadora, definida por

$$I(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorre,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como  $X$  é uma variável aleatória com distribuição binomial negativa, ou seja,  $X \sim \text{BN}(r, r/(\rho + r))$ , segue então que  $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{BN}(nr, r/(\rho + r))$ . Portanto,  $Y^* = \{Y | Y \leq n\}$  tem a distribuição de uma variável aleatória binomial negativa truncada à direita.

Uma fórmula para a esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à direita pode ser derivada a partir da expressão da esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à esquerda. A expressão proposta por Geyer [2007] no caso de um truncamento à esquerda é

$$E[Y | Y > k] = \mu + \frac{k+1}{p(1+\beta)}, \quad (5)$$

em que  $\beta = \Pr(Y > k+1) / \Pr(Y = k+1)$ ,  $\mu$  é a média da distribuição binomial negativa (não truncada) e  $p$  é a probabilidade de sucesso.

Relacione  $E[Y | Y \leq k]$ ,  $E[Y | Y > k]$  e  $E[Y] = \mu$  para obter

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= E \left[ Y \left[ I(Y \leq k) + I(Y > k) \right] \right] \\
 &= E[Y | Y \leq k] \Pr(Y \leq k) + E[Y | Y > k] \Pr(Y > k).
 \end{aligned} \quad (6)$$

Então, substituindo  $E[Y] = \mu$  e a Eq (5), obtém-se

$$\begin{aligned}
 E[Y | Y \leq k] &= \frac{\mu - E[Y | Y > k][1 - \Pr(Y \leq k)]}{\Pr(Y \leq k)} \\
 &= \frac{\mu - \left( \mu + \frac{k+1}{p(1+\beta)} \right) [1 - \Pr(Y \leq k)]}{\Pr(Y \leq k)} \\
 &= \mu - \frac{(k+1)[1 - \Pr(Y \leq k)] \Pr(Y = k+1)}{p \Pr(Y > k) \Pr(Y \leq k)} \\
 &= \mu - \frac{k+1}{p} \frac{\Pr(Y = k+1)}{\Pr(Y \leq k)}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Defina  $\gamma_{k+1} = \Pr(Y \leq k) / \Pr(Y = k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Então, a esperança de uma distribuição binomial negativa truncada à direita no ponto  $k + 1$  é dada por

$$E[Y | Y \leq k] = \mu - \frac{k + 1}{\gamma_{k+1}p}. \quad (8)$$

Logo, a esperança do EMV pode ser expressa como

$$E[\hat{\rho}] = \frac{1}{n} \left( \mu - \frac{n}{\gamma_{np}} \right) \Pr(Y < n) + 1 - \left[ 1 - \Pr(Y < n) \right]. \quad (9)$$

Finalmente, o viés do estimador de máxima verossimilhança da intensidade de tráfego em filas  $M/E_r/1$  sob o esquema amostral de observar o número de clientes que chegam durante os tempos de serviço é dado por

$$\text{Viés}[\hat{\rho}] = \frac{1}{n} \left( \mu - \frac{n}{\gamma_{np}} \right) \Pr(Y < n) + 1 - \left[ 1 - \Pr(Y < n) \right] - \rho. \quad (10)$$

### 2.3. Dedução da Variância do Estimador de Máxima Verossimilhança

A obtenção da variância do EMV não é tão elementar quanto a do valor esperado. Um procedimento mais direto envolve as propriedades da família exponencial que podem ser consultadas em Casella e Berger [2024]. Por isso a representação funcional que caracteriza a família exponencial em sua forma canônica é reproduzida a seguir:

$$f_{\alpha}(y|\theta) = h(y)c(\theta)e^{\theta y}. \quad (11)$$

Considere inicialmente uma distribuição binomial negativa sem truncamento. Uma conveniente parametrização é dada por

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(y|p(\theta)) &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^{\alpha} (1 - p)^y \\ &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^{\alpha} e^{y \log(1-p)}, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

em que  $\alpha$  é o parâmetro de forma e  $p = \mu/(\mu + \alpha)$  é a probabilidade de sucesso (não confundir com  $\rho$ ) de uma distribuição binomial negativa com valor esperado  $\mu$ .

Comparando a expressão (12) com a família exponencial, expressão (11), obtém-se  $\theta = \log(1 - p)$ ,  $\mu = \alpha e^{\theta}/(1 - e^{\theta})$  e  $c(\theta) = p(\theta)^{\alpha} = (1 - e^{\theta})^{\alpha}$ . Logo, a função cumulante é  $\psi(\theta) = -\log c(\theta) = -\alpha \log(1 - e^{\theta})$ .

Derivando a função cumulante com respeito a  $\theta$ , obtém-se  $\psi'(\theta) = \alpha e^{\theta}/(1 - e^{\theta}) = \mu$  e  $\psi''(\theta) = \alpha e^{\theta}/(1 - e^{\theta})^2 = \mu/p = \sigma^2$ . Esses são os resultados tradicionais de uma distribuição binomial negativa sem truncamento.

Considere agora a distribuição binomial negativa truncada à direita no ponto  $k + 1$  e reescreva-a, em termos da função indicadora, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_{\alpha}(y|p(\theta)) &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^{\alpha} (1 - p)^y / F_{\alpha,p}(k), \quad y = 0, 1, 2, \dots, k, \\ &= \frac{\Gamma(y + \alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} I(y \leq k) p^{\alpha} (1 - p)^y / F_{\alpha,p}(k), \quad y = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

em que  $F_{\alpha,p}(k) = \Pr(Y \leq k)$  é a função distribuição acumulada da distribuição binomial negativa sem truncamento avaliada no ponto  $k$ .

Perceba que tanto  $I(y \leq k)$  como  $F_{\alpha,p}(k)$  são individualmente funções de  $\theta$  ou  $y$ , mas não de ambos. Isso significa que a distribuição binomial negativa truncada à direita pertence à família exponencial e tem o mesmo parâmetro canônico  $\theta = \log(1 - p)$ , que será utilizado para obtenção da variância.

Um importante teorema da família exponencial [Casella e Berger, 2024] garante que a primeira derivada da função cumulante com respeito ao parâmetro canônico é a esperança da distribuição, e que a segunda derivada é a variância. Entretanto, a esperança da distribuição binomial negativa truncada à direita já foi obtida, equação (8), então

$$\phi'(\theta) = \mu(\theta) - \frac{k+1}{\gamma_{k+1}p(\theta)}.$$

Consequentemente, a segunda derivada de  $\phi(\theta)$  com respeito ao parâmetro canônico  $\theta$  corresponde à variância da distribuição binomial negativa truncada à direita. Com efeito,

$$\begin{aligned} \phi''(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \mu(\theta) - \frac{d}{d\theta} \frac{k+1}{\gamma_{k+1}p(\theta)} \\ &= \frac{d\mu}{d\theta} - \left[ \frac{k+1}{p^2 \gamma_{k+1}^2} \left( \frac{dp}{d\theta} \gamma_{k+1} + \frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} p \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Sejam  $\frac{d\mu}{d\theta} = \psi''(\theta) = \sigma^2$  e  $\frac{dp}{d\theta} = -e^\theta = -(1-p)$ . Resta determinar  $\frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta}$ , a saber:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} p^\alpha (1-p)^y \left[ \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} p^\alpha (1-p)^{k+1} \right]^{-1} \\ &= \frac{d}{d\theta} \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} (1-p)^{y-(k+1)} \left[ \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Como o somatório possui apenas uma quantidade finita e fixa de termos, a derivada do somatório é o somatório das derivadas. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} \left[ \frac{d}{d\theta} e^{[y-(k+1)]\theta} \right] \left[ \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} \right]^{-1} \\ &= \sum_{y=0}^k \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)y!} [y-(k+1)] p^\alpha (1-p)^y \left[ \frac{\Gamma(k+1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(k+1)!} p^\alpha (1-p)^{k+1} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Esse somatório é uma esperança condicional, a saber:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\gamma_{k+1}}{d\theta} &= \frac{E[Y - (k+1)|Y \leq k]F_{\alpha,p}(k)}{\Pr(Y = k+1)} \\
 &= [E(Y|Y \leq k) - (k+1)]\gamma_{k+1} \\
 &= \left[ \alpha \frac{1-p}{p} - \frac{k+1}{\gamma_{k+1}p} - (k+1) \right] \gamma_{k+1} \\
 &= \alpha \frac{(1-p)\gamma_{k+1}}{p} - \frac{k+1}{p} - (k+1)\gamma_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas deduzidas na equação (14) obtém-se uma expressão para a variância da distribuição binomial negativa truncada à direita:

$$\begin{aligned}
 \phi''(\theta) &= \sigma^2 + \frac{k+1}{p^2\gamma_{k+1}^2} \left[ -(1-p)\gamma_{k+1} + \left[ \alpha \frac{(1-p)\gamma_{k+1}}{p} - \frac{k+1}{p} - (k+1)\gamma_{k+1} \right] p \right] \\
 &= \sigma^2 + \frac{k+1}{p^2\gamma_{k+1}^2} \left[ (1-p)(\alpha-1)\gamma_{k+1} - (k+1)(1+p\gamma_{k+1}) \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Finalmente, note que  $\text{Var}[\hat{\rho}] = E[\hat{\rho}^2] - E[\hat{\rho}]^2$ . Logo, a variância do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\rho}$  é dada por

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\hat{\rho}] &= \left[ E[\hat{\rho}^2|Y < n] \Pr(Y < n) + E[\hat{\rho}^2|Y \geq n] \Pr(Y \geq n) \right] - E[\hat{\rho}]^2 \\
 &= E \left[ Y^2/n^2 | Y < n \right] \Pr(Y < n) + E \left[ 1^- | Y \geq n \right] \Pr(Y \geq n) - E[\hat{\rho}]^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} E \left[ Y^2 | Y < n \right] \Pr(Y < n) + 1^- \Pr(Y \geq n) - E[\hat{\rho}]^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} \left[ \mu_{n-1}^2 + \sigma_{n-1}^2 \right] \Pr(Y < n) + 1^- \Pr(Y \geq n) - E[\hat{\rho}]^2. \quad (16)
 \end{aligned}$$

em que  $\mu_{n-1} = E[Y|Y \leq n-1]$  e  $\sigma_{n-1}^2 = \text{Var}[Y|Y \leq n-1]$ , dados pelas expressões (8) e (15), respectivamente.

### 3. Resultados Computacionais

A dedução matemática realizada na Seção 2 é suficiente para demonstrar a exatidão das expressões analíticas apresentadas. Adicionalmente, foram realizadas simulações Monte Carlo com o objetivo de atestar a eficiência da obtenção analítica do viés e variância do EMV, comparativamente à abordagem numérica, tradicional.

Para as simulações, consideraram-se tamanhos de amostra  $n \in \{10, 20, 50, 100, 200\}$ , valores de intensidade de tráfego  $\rho \in \{0,01; 0,10; 0,20; 0,50; 0,70; 0,90; 0,99\}$  e número de estágios  $r \in \{1, 2, 3\}$ . Foram avaliadas a esperança e a variância de 10.000 replicações de amostras para cada combinação de  $\rho, r$  e  $n$  e os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1. Nota-se que os vieses e variâncias obtidas pelas simulações Monte Carlo são próximos dos valores teóricos obtidos por meio das expressões analíticas. Esse resultado confirma, complementarmente, a correção das expressões analíticas.

As Figuras 1 e 2 sintetizam os resultados da Tabela 1 relativos ao viés e a variância do EMV, respectivamente. Da Figura 1 nota-se que o EMV apresenta maior viés (em valor absoluto) quando a intensidade de tráfego é alta (sistemas carregados, *i.e.*,  $\rho \rightarrow 1$ ). Esse comportamento motiva a derivação analítica apresentada neste trabalho, pois demonstra que o truncamento do espaço

Tabela 1: Esperanças e variâncias (entre parênteses) obtidas por simulação Monte Carlo e pelas expressões analíticas

| $r$ | Método    | $\rho$ | $n$   |          |       |          |       |          |       |          |       |          |
|-----|-----------|--------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|-------|----------|
|     |           |        | 10    |          | 20    |          | 50    |          | 100   |          | 200   |          |
| 1   | Simulação | 0,01   | 0,010 | (0,0010) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,100 | (0,0110) | 0,100 | (0,0056) | 0,100 | (0,0022) | 0,100 | (0,0011) | 0,100 | (0,0006) |
|     |           | 0,20   | 0,197 | (0,0233) | 0,199 | (0,0118) | 0,200 | (0,0047) | 0,200 | (0,0024) | 0,200 | (0,0012) |
|     |           | 0,50   | 0,488 | (0,0630) | 0,497 | (0,0363) | 0,500 | (0,0147) | 0,499 | (0,0074) | 0,500 | (0,0038) |
|     |           | 0,70   | 0,652 | (0,0701) | 0,680 | (0,0443) | 0,698 | (0,0218) | 0,699 | (0,0117) | 0,700 | (0,0059) |
|     |           | 0,90   | 0,776 | (0,0597) | 0,821 | (0,0357) | 0,865 | (0,0176) | 0,882 | (0,0106) | 0,893 | (0,0064) |
|     |           | 0,99   | 0,818 | (0,0517) | 0,868 | (0,0288) | 0,916 | (0,0124) | 0,938 | (0,0066) | 0,955 | (0,0035) |
|     | Analítico | 0,01   | 0,010 | (0,0010) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,100 | (0,0110) | 0,100 | (0,0055) | 0,100 | (0,0022) | 0,100 | (0,0011) | 0,100 | (0,0006) |
|     |           | 0,20   | 0,200 | (0,0240) | 0,200 | (0,0120) | 0,200 | (0,0048) | 0,200 | (0,0024) | 0,200 | (0,0012) |
|     |           | 0,50   | 0,492 | (0,0638) | 0,499 | (0,0361) | 0,500 | (0,0150) | 0,500 | (0,0075) | 0,500 | (0,0038) |
|     |           | 0,70   | 0,655 | (0,0702) | 0,683 | (0,0442) | 0,697 | (0,0219) | 0,700 | (0,0117) | 0,700 | (0,0059) |
|     |           | 0,90   | 0,778 | (0,0593) | 0,824 | (0,0354) | 0,864 | (0,0178) | 0,882 | (0,0107) | 0,893 | (0,0064) |
|     |           | 0,99   | 0,819 | (0,0520) | 0,870 | (0,0286) | 0,915 | (0,0126) | 0,938 | (0,0067) | 0,955 | (0,0035) |
| 2   | Simulação | 0,01   | 0,010 | (0,0011) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,100 | (0,0106) | 0,099 | (0,0052) | 0,099 | (0,0021) | 0,100 | (0,0010) | 0,100 | (0,0005) |
|     |           | 0,20   | 0,201 | (0,0221) | 0,199 | (0,0110) | 0,200 | (0,0044) | 0,200 | (0,0022) | 0,200 | (0,0011) |
|     |           | 0,50   | 0,493 | (0,0564) | 0,496 | (0,0306) | 0,499 | (0,0125) | 0,499 | (0,0062) | 0,500 | (0,0031) |
|     |           | 0,70   | 0,665 | (0,0626) | 0,685 | (0,0377) | 0,698 | (0,0178) | 0,699 | (0,0094) | 0,700 | (0,0047) |
|     |           | 0,90   | 0,796 | (0,0511) | 0,836 | (0,0297) | 0,872 | (0,0146) | 0,887 | (0,0089) | 0,895 | (0,0053) |
|     |           | 0,99   | 0,840 | (0,0440) | 0,884 | (0,0231) | 0,925 | (0,0097) | 0,945 | (0,0052) | 0,960 | (0,0027) |
|     | Analítico | 0,01   | 0,010 | (0,0010) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,100 | (0,0105) | 0,100 | (0,0053) | 0,100 | (0,0021) | 0,100 | (0,0011) | 0,100 | (0,0005) |
|     |           | 0,20   | 0,200 | (0,0220) | 0,200 | (0,0110) | 0,200 | (0,0044) | 0,200 | (0,0022) | 0,200 | (0,0011) |
|     |           | 0,50   | 0,495 | (0,0561) | 0,499 | (0,0307) | 0,500 | (0,0125) | 0,500 | (0,0062) | 0,500 | (0,0031) |
|     |           | 0,70   | 0,667 | (0,0617) | 0,689 | (0,0379) | 0,699 | (0,0180) | 0,700 | (0,0094) | 0,700 | (0,0047) |
|     |           | 0,90   | 0,798 | (0,0498) | 0,838 | (0,0293) | 0,872 | (0,0147) | 0,887 | (0,0088) | 0,895 | (0,0052) |
|     |           | 0,99   | 0,842 | (0,0421) | 0,886 | (0,0227) | 0,926 | (0,0098) | 0,946 | (0,0052) | 0,960 | (0,0027) |
| 3   | Simulação | 0,01   | 0,010 | (0,0010) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,101 | (0,0101) | 0,100 | (0,0051) | 0,100 | (0,0021) | 0,100 | (0,0010) | 0,100 | (0,0005) |
|     |           | 0,20   | 0,200 | (0,0210) | 0,199 | (0,0106) | 0,200 | (0,0042) | 0,200 | (0,0021) | 0,200 | (0,0011) |
|     |           | 0,50   | 0,494 | (0,0532) | 0,497 | (0,0284) | 0,500 | (0,0116) | 0,499 | (0,0058) | 0,500 | (0,0029) |
|     |           | 0,70   | 0,668 | (0,0591) | 0,688 | (0,0356) | 0,699 | (0,0166) | 0,699 | (0,0087) | 0,699 | (0,0043) |
|     |           | 0,90   | 0,804 | (0,0471) | 0,841 | (0,0277) | 0,874 | (0,0137) | 0,888 | (0,0083) | 0,895 | (0,0048) |
|     |           | 0,99   | 0,849 | (0,0392) | 0,890 | (0,0210) | 0,930 | (0,0088) | 0,948 | (0,0047) | 0,962 | (0,0024) |
|     | Analítico | 0,01   | 0,010 | (0,0010) | 0,010 | (0,0005) | 0,010 | (0,0002) | 0,010 | (0,0001) | 0,010 | (0,0001) |
|     |           | 0,10   | 0,100 | (0,0103) | 0,100 | (0,0052) | 0,100 | (0,0021) | 0,100 | (0,0010) | 0,100 | (0,0005) |
|     |           | 0,20   | 0,200 | (0,0213) | 0,200 | (0,0107) | 0,200 | (0,0043) | 0,200 | (0,0021) | 0,200 | (0,0011) |
|     |           | 0,50   | 0,496 | (0,0533) | 0,500 | (0,0288) | 0,500 | (0,0117) | 0,500 | (0,0058) | 0,500 | (0,0029) |
|     |           | 0,70   | 0,671 | (0,0585) | 0,691 | (0,0356) | 0,699 | (0,0166) | 0,700 | (0,0086) | 0,700 | (0,0043) |
|     |           | 0,90   | 0,806 | (0,0464) | 0,843 | (0,0272) | 0,875 | (0,0136) | 0,889 | (0,0081) | 0,896 | (0,0048) |
|     |           | 0,99   | 0,851 | (0,0385) | 0,892 | (0,0206) | 0,930 | (0,0088) | 0,949 | (0,0046) | 0,962 | (0,0024) |

paramétrico é um fator relevante a ser considerado na estimação de  $\rho$  em filas Erlang de servidor único. A Figura 2 mostra que o EMV possui maior variância quando a intensidade de tráfego é moderada ( $0.4 \leq \rho \leq 0.8$ ). Esse resultado é esperado, uma vez que o EMV pode ser visto como um estimador de proporção, que possui maior variabilidade quando o parâmetro verdadeiro é 0.5. De fato, como os limites do espaço paramétrico impõem restrições à variabilidade de  $\rho$ , espera-se que a variância seja maior para filas com intensidades de tráfego moderadas.

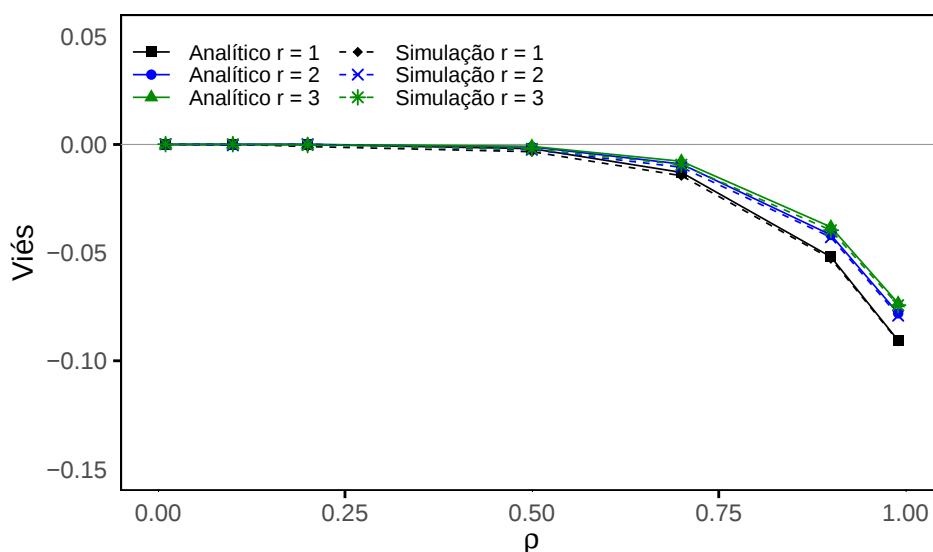


Figura 1: Esperança em função de  $\rho$

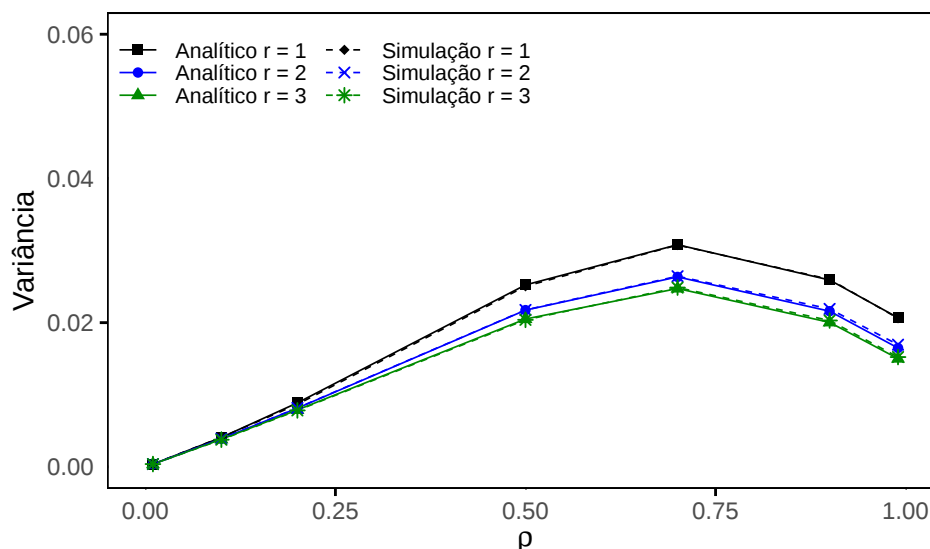


Figura 2: Variância em função de  $\rho$

As Figuras 3 e 4 apresentam os tempos de execução das simulações Monte Carlo com 10.000 replicações e da avaliação das expressões analíticas para o viés e variância. A Figura 3 sugere que o tempo de simulação é independente da intensidade de tráfego. De outro lado, a Figura 4 indica crescimento linear do tempo de execução das simulações Monte Carlo com o tamanho de

amostra. Além disso, resultados não apresentados confirmam o crescimento linear do tempo de execução das simulações Monte Carlo com o número de replicações, como é esperado. Nota-se que as expressões analíticas apresentam significativa vantagem em termos de eficiência computacional.

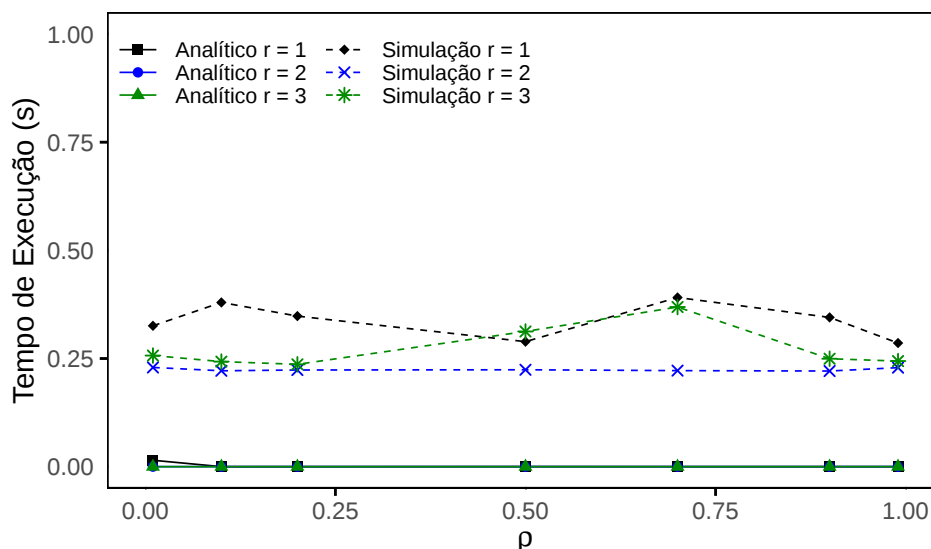


Figura 3: Tempo de execução dos algoritmos em função de  $\rho$

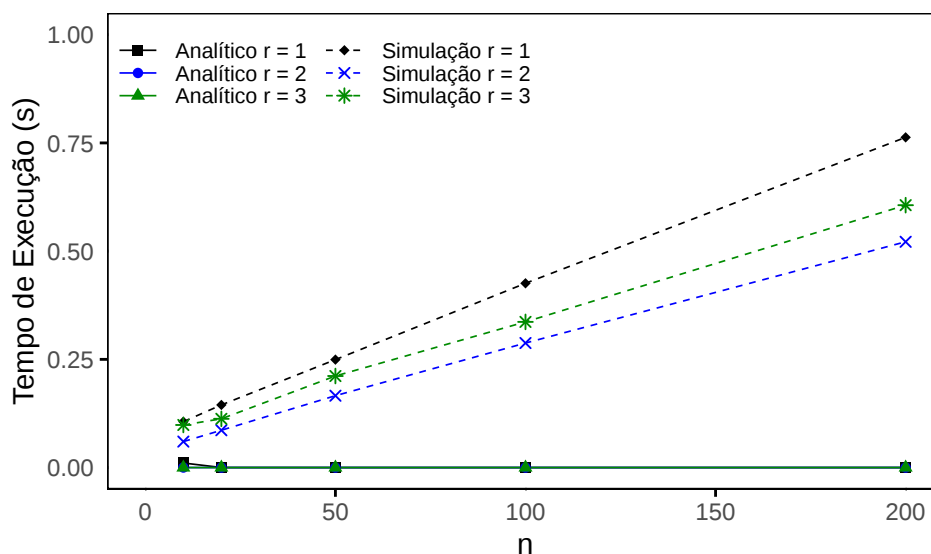


Figura 4: Tempo de execução dos algoritmos em função de  $n$

#### 4. Conclusões e Observações Finais

O objetivo deste trabalho foi determinar o viés e a variância do estimador de máxima verossimilhança para filas Erlang de servidor único. Como caso particular, os resultados também se aplicam às filas markovianas de servidor único. As expressões analíticas foram deduzidas em termos da distribuição acumulada de uma variável aleatória binomial negativa e comparadas, em

termos de eficiência, por meio de simulações Monte Carlo, que também comprovaram a exatidão dos resultados.

Expressões analíticas para o viés e a variância de estimadores são, por si só, um objeto de interesse nas pesquisas nessa área. Além disso, as expressões desenvolvidas neste artigo, juntamente com a distribuição do estimador de máxima verossimilhança, podem ser utilizadas em futuros trabalhos para a construção de intervalos de confiança, realização de testes de hipótese e correção de viés das estimativas de máxima verossimilhança nas filas Erlang de servidor único.

### Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES (*Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior*, processo 88887.823719/2023-00), à FAPEMIG (*Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais*, processo CEX-PPM-00564-17), e ao CNPq (*Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico*, processo 305515/2018-7), pelo apoio parcial a este trabalho.

### Referências

- Basak, A. e Choudhury, A. (2021). Bayesian inference and prediction in single server  $M/M/1$  queueing model based on queue length. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 50(6):1576–1588.
- Basawa, I. V. e Prabhu, N. U. (1981). Estimation in single server queues. *Naval Research Logistics Quarterly*, 28(3):475–487.
- Basawa, I. V. e Prabhu, N. U. (1988). Large sample inference from single server queues. *Queueing Systems*, 3(4):289–304.
- Casella, G. e Berger, R. L. (2024). *Statistical inference*. CRC Press, Boca Raton, FL. ISBN 9781032597942.
- Choudhury, A. e Basak, A. (2018). Statistical inference on traffic intensity in an  $M/M/1$  queueing system. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 13(4): 274–279.
- Clarke, A. B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue. *The Annals of Mathematical Statistics*, 28(4):1036–1040.
- Geyer, C. J. (2007). Lower-truncated Poisson and negative binomial distributions. Relatório técnico, University of Minnesota, Minnesota, MN. URL <https://cran.r-project.org/web/packages/aster/vignettes/trunc.pdf>. Acessado em Junho 2, 2024.
- Harishchandra, K. e Subba Rao, S. (1988). A note on statistical inference about the traffic intensity parameter in  $M/E_k/1$  queue. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B (1960-2002)*, 50(1):144–148.
- Quinino, R. C. e Cruz, F. R. B. (2017). Bayesian sample sizes in an  $M/M/1$  queueing systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 88(1):995–1002.
- Singh, S. K. e Acharya, S. K. (2019). Equivalence between bayes and the maximum likelihood estimator in  $M/M/1$  queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 48(19):4780–4793.
- Srinivas, V., Subba Rao, S., e Kale, B. K. (2011). Estimation of measures in  $M/M/1$  queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 40:18:3327–3336.

- Srinivas, V. e Udupa, H. J. (2014). Best unbiased estimation and CAN property in the stable  $M/M/1$  queue. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 43(2):321–327.
- Wolff, R. W. (1965). Problems of statistical inference for birth and death queuing models. *Operations Research*, 13(3):343–357.