Probabilidade - aula II

Marcos Oliveira Prates

2012/02

1. Interpretações de Probabilidade
2. Regras da Adição
3. Probabilidade Condicional
   - Amostras Aleatórias e Probabilidade Condicional

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Calcular probabilidades de eventos conjuntos.
- Interpretar e calcular probabilidades condicionais de eventos.
- Determinar a independência de eventos e usá-la para calcular probabilidades.

Interpretações de Probabilidade

- Vamos introduzir probabilidades para espaços amostrais discretos.

Probabilidade

Quantifica a possibilidade de ocorrência de um resultado de um experimento aleatório.

- "A chance de chover é 30 %" $\rightarrow$ quantifica o nosso sentimento acerca da possibilidade de chuva.
- A possibilidade de um resultado é quantificada atribuindo-se um número no intervalo $[0, 1]$.
- Números maiores indicam que o resultado é mais provável.
- Probabilidade zero indica que o resultado não ocorrerá.
- Probabilidade um significa que irá ocorrer com certeza.

Interpretações da probabilidade:

- **Subjetiva:** grau de crença de que o resultado ocorrerá.
- **Frequentista:** valor limite da proporção de vezes que o resultado ocorre em n repetições do experimento aleatório.
  Exemplo:
  - Se dizemos que a probabilidade de um pulso estar corrompido em um sinal digital é 0,2.
  - Podemos interpretar que se analisarmos muitos pulsos 20% deles vão estar corrompidos.

- As probabilidades são escolhidas de forma que a soma resulte em um.
- Elas devem ser atribuídas com base em um modelo razoável para o sistema em estudo.
- Uma abordagem simples é basear no conceito de resultados igualmente prováveis.

Exemplo:

- Dentre 100 diodos a laser selecionamos um aleatoriamente.
- O espaço amostral é o conjunto dos 100 diodos.
- **Aleatoriamente** significa todos diodos têm a mesma probabilidade de serem selecionados.
- Como as probabilidades devem somar um, cada diodo tem probabilidade 0,01 de ser selecionado.

Resultados igualmente prováveis

- Considere que o espaço amostral é formado por N resultados possíveis.
- Suponha que todos resultados são igualmente prováveis.
- Cada resultado tem probabilidade $1/N$.

- Frequentemente precisamos atribuir probabilidades a eventos que consistem em vários resultados do espaço amostral.
- Para um espaço amostral discreto isso pode ser feito facilmente.

Probabilidade de um evento

Para um espaço amostral discreto, a probabilidade de um evento E, $P(E)$, é igual a soma dos resultados em E.

Exemplo:

- Considere novamente um conjunto de 100 diodos a laser.
- Considere que 30% deles satisfazem certos requisistos mínimos do consumidor.
- Um diodo é selecionado ao acaso (todos com mesma probabilidade).
- Intuitivamente: probabilidade dele satisfazer os requerimentos é 0,3.

- Vamos calcular essa probabilidade em termos de eventos.
- Seja E o evento em que o diodo satisfaz os requerimentos.
- E é um subconjunto de 30 diodos que satisfazem o requerimento mínimo.
- E contém 30 resultados e cada um deles com probabilidade 0,01, logo

$$P(E) = 30 \times (0,01) = 0,3$$

Exemplo:

- Suponha que temos quatro itens

$$\{a,\ b,\ c,\ d\}\,.$$

- Temos ainda que

$$P(a) = 0,1,\ \ P(b) = 0,3,\ \ P(c) = 0,5 \ \text{ e } \ P(d) = 0,1\,.$$

- Logo

$$P(\{a,b\}) = P(a) + P(b) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$P(\{b,c,d\}) = P(b) + P(c) + P(d) = 0,3 + 0,5 + 0,1 = 0,9$$

$$P(\{d\}) = P(d) = 0,1\,.$$

- Podemos ainda calcular outras probabilidades como

$$P(\{a,b\}') = P(\{c,d\}) = 0,5 + 0,1 = 0,6$$

$$P(\{b,c,d\}') = P(a) = 0,1$$

$$P(\{d\}') = P(\{a,b,c\}) = 0,1 + 0,3 + 0,5 = 0,9$$

$$P(\{a,b\} \cap \{b,c,d\}) = P(b) = 0,3$$

$$P(\{a,b\} \cup \{b,c,d\}) = P(\{a,b,c,d\}) = 1$$

$$P(\{a,b\} \cap \{d\}) = P(\emptyset) = 0$$

- Em alguns casos podemos seleciondar mais de um item de um conjunto de objetos.
- Nesse caso **aleatoriamente selecionado** significa que cada subconjunto possível de itens é igualmente provável.

Exemplo:

- Suponha que tenhamos agora seis items

$$\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}\ .$$

- Dois itens são selecionados aleatoriamente (todos com a mesma probabilidade) sem reposição.
- Suponha que f é defeituosos e todos demais são bons.
- Qual a probabilidade do item f aparecer na amostra?

- O espaço amostral consiste em todos os pares desordenados possíveis selecionados sem reposição.
- Sabemos que o total de pares possíveis é dado por

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15\,.$$

- Se E é o evento que o item f é selecionado

$$E = \{\{a,f\},\ \{b,f\},\ \{c,f\},\ \{d,f\},\{e,f\}\}\,.$$

- Como cada resultado é igualmente provável

$$P(E) = 5/15 = 1/3\,.$$

- Sempre que definimos probabilidades elas devem satisfazer alguns axiomas.
- Esses axiomas garantem que as atribuições sejam consistentes com o nosso entendimento intuitivo de frequencia relativa.
- Tais axiomas **não determinam as probabilidades.**
- As probabilidades são atribuídas baseadas no conhecimento do sistema de estudo.
- Porém, os axiomas nos capacitam calcular facilmente a probabilidade de alguns eventos.

Axiomas da Probabilidade

- Se S é o espaço amostral e E é um evento qualquer em um experimento aleatório
  1. $P(S) = 1$
  2. $0 \leq P(E) \leq 1$
  3. Para dois eventos E_1 e E_2, com $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Interpretações dos axiomas em termos de frequências relativas:

- $0 \leq P(E) \leq 1$ equivale ao requerimento que a frequência relativa deve estar entre 0 e 1.
- $P(S) = 1$ é consequência de que algum dos resultados do espaço amostral ocorre em cada rodada do experimento.
- Propriedade (3) significa que se E_1 e E_2 não tiverem resultados em comum:
  - frequência relativa de $E_1 \cup E_2$ é a soma das frequencias relativas de E_1 e E_2.

- Como consequência desses resultados temos que (mostrar como exercício)

$$P(\emptyset) = 0$$

e para qualquer evento E

$$P(E') = 1 - P(E)\,.$$

- Além disso, se $E_1 \subset E_2$

$$P(E_1) \leq P(E_2)\,.$$

Regras da Adição

- Eventos conjuntos são gerados pela aplicação de operações básicas de conjuntos a eventos individuais.
- Essas operações são: união, interseção, complemento.
- Nesta seção nosso foco será na união de eventos.

- Para calcularmos a probabilidade da união de dois eventos $A \cup B$ (A ou B) podemos usar o seguinte resultado.

Probabilidade de um união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,.$$

Exemplo:

- A tabela a seguir lista a história de 940 pastilhas em um processo de fabricação de condutores.

Table 2-1 Wafers in Semiconductor Manufacturing Classified by Contamination and Location

	Location in Sputtering Tool		
Contamination	Center	Edge	Total
Low	514	68	582
High	112	246	358
Total	626	314	

- Seja H o evento em que a pastilha contém altos níveis de contaminação.
- C o evento em que a pastilha está no centro da ferramenta de recobrimento.

$$P(H) = \frac{358}{940} \quad P(C) = \frac{626}{940} \quad P(H \cap C) = \frac{112}{940}$$

$$P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) = \frac{358 + 626 - 112}{940} = \frac{872}{940}$$

- Já vimos que dois eventos A e B são mutuamente exclusivos se $A \cap B = \emptyset$.
- Nesse caso então $P(A \cap B) = 0$ e o resultado anterior se simplifica para o terceiro axioma da probabilidade.

Se A e B são eventos mutuamente excludentes

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Três ou mais evento

- Probabilidades mais complicadas, como $P(A \cup B \cup C)$, podem ser determinadas pelo uso repetido do resultado anterior.

Probabilidade da união três eventos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ -P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- Um resultado análogo vale para um número arbitrário de eventos (não será apresentado aqui).
- Esse resultado para três ou mais eventos é simplificado consideravelmente se eles forem mutuamente excludentes.
- O eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ são ditos ser mutuamente excludentes se não houver superposição entre qualquer um deles.

Eventos mutuamente excludentes

Uma coleção de eventos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ é dita ser mutuamente excludente se para todos pares

$$E_i \cap E_j = \emptyset \, .$$

Para uma coleção de eventos mutuamente excludentes

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$$

Exemplo:

- Seja X o pH de uma amostra.
- Considere o evento X maior que 6,5 e menor ou igual a 7,8.
- A probabilidade desse evento pode ser calculada como a soma de eventos mutuamente excludentes

$$P(6,5 < X \leq 7,8) = P(6,5 < X \leq 7,0) + P(7,0 < X \leq 7,5)$$

$$+P(7,5 < X \leq 7,8)$$

ou

$$P(6,5 < X \leq 7,8) = P(6,5 < X \leq 6,6) + P(6,6 < X \leq 7,1)$$

$$+P(7,1 < X \leq 7,4) + P(7,4 < X \leq 7,8)$$

Probabilidade Condicional

- Algumas vezes as probabilidades precisam ser reavaliadas à medida que informaçõe adicionais se tornam disponíveis.
- Podemos considerar que o resultado gerado é um elemento de um dado evento.
- Esse evento, A por exemplo, define as condições em que se sabe que o resultado é satisfatório.
- A probabilidade de um evento B, sabendo qual será o resultado de um evento A, é denotada por

$$P(B|A)\,.$$

Exemplo:

- Em um processo de fabricação de um filme fino, 2% dos itens não são aceitos.
- O processo é sensível ao problema de contaminação que podem aumentar o a taxa de itens não aceitáveis.
- Se durante uma mudança tivesse havido um problema com os filtros que controlam a contaminação.
- Estimaríamos a probabilidade de um item não ser aceitável como maior que 2%.

Exemplo:

- Em um processo de fabricação:
  - 10% dos itens são defeituosos,
  - 25% dos itens que contém falhas na superfície são realmente defeituosos,
  - 5% dos itens sem falha na supefície são defeituosos.
- Definimos os eventos:
  - $D = \{$ o item é defeituoso$\}$
  - $F = \{$ o item tem falha na superfície$\}$
- Então

$$P(D) = 0,10 \quad P(D|F) = 0,25 \quad P(D|F') = 0,05$$

- Podemos calcular a probabilidade condicional a partir de sua definição.

Probabilidade Condicional

A probabilidade condicional de um evento B, dado um evento A, denotada por $P(B|A)$ é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

para $P(A) > 0$.

Exemplo:

- Considere que todos resultados do experimento são igualmente prováveis.
- Se houver n resultados possíveis

$$P(A) = \frac{(\text{número de resultados em } A)}{n}$$

$$P(A \cap B) = \frac{(\text{número de resultados em } A \cap B)}{n}$$

- Logo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{(\text{número de resultados em } A \cap B)}{(\text{número de resultados em } A)}$$

- $P(B|A)$ é a frequencia relativa do evento B dentre as tentativas que produzem o evento A.

Amostras Aleatórias e Probabilidade Condicional

- Para calcularmos probabilidades em amostragem sem reposição pode ser útil usar probabilidades condicionais.
- Quando retiramos um item modificamos a probabilidade de retirada dos demais.

Exemplo:

- Suponha que em um conjunto de itens temos:
  - 10 itens da ferramenta 1
  - 40 da ferramenta 2.
- Dois itens são selecionados sem reposição.
- Qual a probabilidade de um item da ferramenta 2 ser selecionado (E_2), dado que um item da ferramenta 1 foi selecionado (E_1) primeiro?
- Um item da ferramenta 1 é retirado, sobram 49 itens:
  - 9 da ferramenta 1,
  - 40 da ferramenta 2, logo

$$P(E_2|E_1) = \frac{40}{49}\,.$$

Exemplo:

- Podemos calcular também a probabilidade de selecionarmos um par de itens no qual o primeiro vem da ferramenta 1 e o segundo da ferramenta 2.
- Temos então que como

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

então

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{40}{49}\frac{10}{50} = \frac{8}{49}$$