Lista 5

Prof. Marcos Oliveira Prates

Disciplina: Estatística e Probabilidade

Data de entrega: 09 de junho

1. Seja X uma amostra de uma distribuição binomial com parâmetros $n = 100$ e p desconhecido. Logo X é o número de sucessos.

   a) Mostre que o estimador $\hat{p} = \frac{X}{n}$ é não tendencioso.

   b) Encontre o EMQ de $\hat{p}$.

2. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra. Suponha que a distribuição de X_i seja $f(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, onde:

$$f(x) = \beta x^{\beta-1} \; 0 < x < 1$$

   a) Encontre o estimador de momentos $\tilde{\beta}$ para β (Dica: $E(X) = \frac{\beta}{\beta+1}$)

   b) Encontre o estimador de verossimilhança $\hat{\beta}$ para β.

3. A resistência do concreto à compressão é normalmente distribuída, com $\mu = 2500$ e $\sigma = 50$. Encontre a probabilidade de uma amostra aleatória de n=5 corpos-de-prova ter um diâmetro médio amostral que caia no intervalo de 2499 a 2510.

4. A quantidade de tempo que um consumidor gasta esperando no balcão de *check-in* de um aeroporto é uma variável aleatória com média de 8,2 minutos e desvio padrão de 1,5 minuto. Suponha que uma amostra aleatória de n=49 consumidores seja observada. Encontre a probabilidade de o tempo médio de espera na fila para esses consumidores ser

   a) Menor que 10 minutos.

   b) Entre 5 e 10 minutos.

   c) Menor que 6 minutos.

5. Para uma população normal com variância conhecida σ^2, responda as seguintes questões:

   a) Qual o nível de confiança para o intervalo $\bar{x} - 2,14\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2,14\sigma/\sqrt{n}$?

   b) Qual o nível de confiança para o intervalo $\bar{x} - 2,49\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2,49\sigma/\sqrt{n}$?

c) Qual o nível de confiança para o intervalo $\bar{x} - 1,85\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,85\sigma/\sqrt{n}$?

6. Suponha que n=100 amostras aleatórias de água proveniente de um lago com água fresca foram retiradas, sendo medida a concentração (miligramas por litro) de cálcio. Um IC de 95% para a concentração média de cálcio é $0,49 \leq \mu \leq 0,82$.

   a) Um IC de 99% calculado a partir dos dados da amostra seria maior ou menor?

   b) Considere a seguinte afirmação: há uma chance de 95% de μ estar entre 0,49 e 0,82. Essa afirmação é correta? Explique sua resposta.

   c) Considere a seguinte afirmação: se n=100 amostras aleatórias de água proveniente do lago foram tomadas e o IC de 95% para μ for calculado e esse processo for repetido 1000 vezes, 950 dos ICs conterão o verdadeiro valor de μ. Essa afirmação está correta? Explique sua resposta.

7. Considere o intervalo de $100(1-\alpha)\%$ confiança para a média μ de uma variável com distribuição Normal e desvio-padrão σ conhecido :

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

   Note que o intervalo é simétrico em torno da média amostral $\bar{x}$ e que, quanto menor a parcela $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, menor será a amplitude do intervalo.

   a) Por que um intervalo com grande amplitude não é útil para o pesquisador fazer inferência sobre a média da variável estudada ?

   b) Mantendo fixos o tamanho de amostra (n) e o desvio-padrão (σ), o que aconteceria com esta parcela se reduzirmos o nível de confiança $(100(1-\alpha))\%$ requerido para o intervalo?

   c) Mantendo fixos o tamanho de amostra (n) e o nível de confiança $(100(1-\alpha))\%$ requerido para o intervalo, o que aconteceria com esta parcela se o desvio-padrão (σ) fosse menor?

   d) Mantendo fixos o desvio-padrão (σ) e o nível de confiança $(100(1-\alpha))\%$ requerido para o intervalo, o que aconteceria com esta parcela se o tamanho de amostra (n) fosse maior?

   e) Qual(is) dos três elementos que compõem esta parcela (n, σ e α), o pesquisador é capaz de alterar para conseguir um intervalo mais curto para a média da variável estudada?

   f) Caso o pesquisador queira um intervalo curto e com nível de confiança alto (ex. 98%, 99%), o que ele deveria fazer?

8. O rendimento de um processo químico está sendo estudado. De experiências prévias com esse processo, sabe-se que o rendimento é normalmente distribuído e $\sigma = 3$. Os últimos cinco dias de operação da planta resultaram nos seguintes rendimento percentuais: 91,6; 88,75; 90,8; 89,95 e 91,3. Encontre um intervalo com 95% de confiança para o rendimento médio verdadeiro.

9. Um engenheiro civil está analisando a resistência à compressão do concreto. A resistência à compressão tem distribuição normal com $\sigma^2 = 1000$. Uma amostra aleatória de 12 corpos-de-prova tem uma resistência média à compressão $\bar{x} = 3250$.

   a) Construa o intervalo bilateral de 95% de confiança para resistência à compressão.

   b) Construa o intervalo bilateral de 99% de confiança para resistência à compressão. Compare a largura desse intervalo com aquele encontrado no ítem anterior.

10. Suponha que no exercício anterior desejássemos estimar a resistência à compressão, com um erro que fosse menor que 15, com 99% de confiança. Que tamanho de amostra deveria ser usado?

11. Seleciona-se uma amostra de 40 caixas e mede-se o diâmetro do orifício para cada uma, resultando em um diâmetro médio de 5,426mm e um desvio padrão amostral de 0,1mm. Encontre um intervalo de 95% de confiança para o diâmetro médio real. Qual a interpretação desse intervalo?

12. Os dados relativos a cargas de falha sobre amostras de um tipo de aço seguem uma distribuição normal e fornecem os seguintes resultados (megapascal): 19.8 , 10.1 , 14.9 , 7.5 , 15.4 , 15.4 , 15.4 , 18.5 , 7.9 , 12.7 , 11.9 , 11.4 , 11.4 , 14.1 , 17.6 , 16.7 , 15.8, 19.5 , 8.8 , 13.6 , 11.9 , 11.4, 13.8, 14.7, 11.2. Determine o intervalo de confiança de 95% sobre a média real.

13. Uma amostra aleatória de 50 capacetes de corredores de motos e automóveis foi submetida a um teste de impacto, sendo observado algum dano em 18 desses capacetes.

   a) Encontre o intervalo bilateral de 95% de confiança para proporção verdadeira de capacetes que apresentam algum dano.

   b) Usando a estimativa pontual de p, obtida a partir de uma amostra preliminar de 50 capacetes, quantos capacetes têm de ser testados para estarmos 95% confiantes de que o erro na estimação no valor verdadeiro de p seja menor do que 0,02?

   c) Quão grande terá de ser a amostra, se desejarmos estar no mínimo 95% confiantes de que o erro na estimação de p seja menor do que 0,02, independentemente do valor verdadeiro de p.