Lista 4 - Gabarito

Prof. Marcos Oliveira Prates

Disciplina: Estatística e Probabilidae

1. **a)**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0,95 \\ 10x - 9,5 & \text{se} \quad 0,95 \leq x < 1,05 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1,05. \end{cases}$$

   b) $P(X > 1,02) = 1 - P(X \leq 1,02) = 1 - F(1,02) = 0,3$

   c) Se $P(X > x) = 0,9$ então $1 - F(x) = 0,9$ e $F(x) = 0,1$. Portanto $10x - 9,5 = 0,1$ o que implica que $x = 0,96$.

   d) $E(X) = \frac{1,05+0,95}{2} = 1$ e $V(X) = \frac{(1,05-0,95)^2}{12}$.

2. Seja X o tempo (em minutos) entre a chegada e 10 h am.

   a)

$$f(x) = \frac{1}{90} \text{ para } 0 \leq x \leq 90\,.$$

   Então a função de distribuição cumulativa é

$$F(x) = \frac{x}{90} \text{ para } 0 \leq x \leq 90\,.$$

   b) $E(X) = 45$ e $Var(X) = 675$.

   c) Esse evento corresponde ao visitante chegar nos seguintes intervalos: 8:50-9:00 ou 9:20 - 9:30 ou 9:50 - 100. A probabilidade requerida é

$$P = \frac{30}{90}\,.$$

   d) $1 - \frac{30}{90}$.

3. **a)** $P(X < 6250) = P(Z < 2,5) = 0,99379$

   b) $P(5800 < X < 5900) = P(-2 < Z < -1) = 0,13591$

   c) $P(X > x) = P\left(Z > \frac{x-6000}{100}\right) = 0,95$ então $x = 5835$.

4. **a)** $P(X < 12) = P\left(Z \leq \frac{12-12,4}{0,1}\right) = P(Z \leq -4) \approx 0$.

b) $P(X < 12,1) = P\left(Z \leq \frac{12,1-12,4}{0,1}\right) = P(Z \leq -3) = 0,00135$

$P(X > 12,6) = P\left(Z > \frac{12,6-12,4}{0,1}\right) = P(Z > 2) = 0,02275.$

Então a proporção de latas rejeitadas é $0,00135 + 0,02275 = 0,0241.$

c) $P(12,4 - x < X < 12,4 + x) = 0,99.$ subtraindo $12,4$ dos dois lados

$$P\left(-\frac{x}{0,1} < \frac{X}{0,1} < \frac{x}{0,1}\right) = 0,99$$

$$P\left(Z < \frac{x}{0,1}\right) = 0,995 \Rightarrow x = (0,1)(2,58) = 0,258$$

Os limites são

$$(12.4 - x; 12.4 + x) = (12,142; 12,658)$$

5. **a)** $P(X < 5000) = P(Z < \frac{5000-7000}{600}) = P(Z < -3.3333) = 0,00043$

   b) $P(X > x) = 0,95$ logo

$$P\left(Z > \frac{x - 7000}{600}\right) = 0,95 \quad -1.645 = \frac{x - 7000}{600} \rightarrow x = 6013\,.$$

   c) $P(X > 7000) = P(Z > 0) = 0,5$ logo a probabilidade requerida é

$$(0,5)^3\,.$$

6. O primeiro tipo de erro ocorre se a mensagem é 1 e $2 + N < 0,5$ e o segundo tipo de erro ocorre se a mensagem é 0 e $-2 + N \geq 0,5$. Então

$$P(\text{erro}|\text{a mensagem é } 1) = P(N < -1,5) = 1 - \phi(1,5) = 0,0668$$

$$P(\text{erro}|\text{a mensagem é } 0) = P(N \geq 2,5) = 1 - \phi(2,5) = 0,0062\,.$$

7. X é o número de erros em 1000 páginas. X tem distribuição Poisson com média 0,4 por página.

   a) O número de erros em um página são variáveis aleatórias. Sabemos que em um processo de Poisson o número de eventos que ocorrem em um intervalo são independente dos demais. As páginas são intervalos disjuntos, então o número de erros que ocorre em uma página é independente do número de erros em outras páginas.

b) $P(X=0) = \frac{e^{-0,4}(0,4)^0}{0!} = 0,670$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,670 = 0,330\,.$$

O número médio de páginas com mais de um erro é $1000(0,330) = 330$ páginas.

c) Seja Y o número de páginas com erros

$$\begin{aligned} P(Y > 350) &= P\left(Z \geq \frac{350,5 - 330}{\sqrt{1000(0,33)(1-0,33)}}\right) = P\left(Z \geq 1,38\right) \\ &= 1 - P(Z < 1,38) = 1 - 0,9162 = 0,0838 \end{aligned}$$

8. Seja X o tempo até a primeira contagem. X segue uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 2$.

   a) $P(X > 0,5) = e^{-1} = 0,3679$

   b) $P(X < \frac{10}{60}) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0,2835$

   c) $P(1 < X < 2) = e^{-2} - e^{-4} = 0,1170.$

9. Pela propriedade da falta de memória da exponencial, independente do tanto que o carro já foi usado, o tempo de vida da bateria (em mil milhas) tem distribuição exponencial com $\lambda = \frac{1}{10}$. Seja T o número de milhas que o carro pode andar. Então a probabilidade requerida é

$$P(T > 5) = 1 - F(5) = e^{-5\lambda} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,604$$

Se o tempo de vida não é exponencial, não tem a propriedade de perda de memória, devemos considerar o desgaste da bateria dependendo do tanto que já foi usada. Então a se t o número de milhas que o carro já andou com aquela bateria, a probabilidade requerida é

$$P(T > t+5 | T > t) = \frac{1 - F(t+5)}{1 - F(t)}\,.$$

Portanto se a distribuição não fosse exponencial precisaríamos de mais informação no problema.