Lista 5 - Gabarito

Prof. Marcos Oliveira Prates
Disciplina: Estatística e Probabilidade

1. Como X binomial temos que $E(X) = np$.

   a) Se $\hat{p}$ não tendencioso então $E(\hat{p}) = p$. Logo,

   $$E(\hat{p}) = E(\frac{X}{n}) = 1/nE(X) = np/n = p$$

   .

   b) Como $\hat{p}$ não tendencioso, entã

   $$EMQ(\hat{p}) = V(\hat{p}) = V(\frac{X}{n}) == 1/n^2V(X) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

   .

2. **a)** Para encontrar $\tilde{\beta}$ devemos igualar o primeiro momento populacional $\bar{X}$ ao primeiro momento de $f(x)$. Pela dica temos que $E(X) = \frac{\beta}{\beta+1}$. Logo

   $$\tilde{\beta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

   .

   b) Para determinar $\hat{\beta}$ devemos encontrar a função de verossimilhança

   $$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \beta X^{\beta-1} = \beta^n (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\beta-1}$$

   . Assim $\log(L(\beta)) = l(\beta) = n\log(\beta) + (\beta - 1)\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)$. Derivando em β temos:

   $$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n}\log(X_i)$$

   . Igualando a 0 e resolvendo achamos que $\hat{\beta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)}$.

3. Sabemos que $\bar{X} \sim N(2500, (\frac{2500}{5}))$. Logo $Z = \frac{\bar{X}-2500}{\frac{50}{\sqrt{5}}}$

$$P(2499 \leq \bar{X} \leq 2510) = P(-0,045 \leq Z \leq 0,45) = 0,191\ .$$

4. Usando o TCL temos que $\bar{X}$ tem distribuição aproximadamente normal.

   a) $P(\bar{X} < 10) = P(Z < 8,4) = 1.$

   b) $P(5 < \bar{X} < 10) = P(Z < 8,4) - P(Z < -14,932) = 1 - 0 = 1.$

   c) $P(\bar{X} < 6) = P(Z < -10,27) = 0$

5. **a)** 96,76%

   b) 98,72%

   c) 93,56%

6. **a)** Seria maior.

   b) Não, essa não é a interpretação correta do intervalo de confiança, pois μ é fixo e não variável aleatória.

   c) Sim, essa é a interpretação correta do intervalo de confiança. Os limites superior e inferior são variáveis aleatórias.

7.

a) Porque a informação sobre o parâmetro (neste caso, a média da variável na população) é muito vaga. Por exemplo, se o intervalo de confiança para a altura média das pessoas adultas de uma cidade vai de 1 a 2,50 metros, não saberemos dizer se esta cidade é habitada por adultos que tendem a ser altos ou baixos. Além disso, não seria necessário um estudo para obter esta informação, pois já sabemos que os adultos não medem menos que um metro nem mais que 2,50 metros.

b) Reduzir o nível de confiança $(100(1-\alpha))$ significa aumentar o valor de α, o que leva a valor menor de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, reduzindo a amplitude do intervalo.

c) Esta parcela seria menor. Desse modo, quanto menor a variabilidade da variável, menor será a amplitude do intervalo.

d) Esta parcela seria menor. Desse modo, quanto maior o tamanho da amostra, menor será a amplitude do intervalo.

e) Apenas o tamanho da amostra (n), que ele pode aumentar, e o nível de confiança do intervalo $(100(1-\alpha))$, que ele pode reduzir. O pesquisador não tem controle sobre a variabilidade (σ) da característica estudada.

f) Aumentar o tamanho da amostra (n).

8. Temos que

$$\bar{x} = 90,480 \quad \sigma = 3 \quad n = 5 \quad z_{0,975} = 1,96\,.$$

O intervalo fica

$$87,85 \leq \mu \leq 93,11\,.$$

9. **a)** Temos que

$$\bar{x} = 3250 \quad \sigma^2 = 1000 \quad n = 12 \quad z_{0,975} = 1,96$$

o intervalo fica

$$3232,11 \leq \mu \leq 3267,89\,.$$

b)

$$3226,4 \leq \mu \leq 3273,6.$$

O intervalo de 99% é mais largo que o de 95%.

10. Temos que

$$z_{0,995} = 2,58 \quad s = 31,62 \quad E = 15$$

portanto

$$n = \left(\frac{(2,58)(31,62)}{15}\right)^2 = 29,6 \approx 30.$$

11. Temos que

$$\bar{x} = 5,426 \quad s = 0,1 \quad z_{0,975} = 1,96$$

então o intervalo fica

$$5,395 \leq \mu \leq 5,457\,.$$

A interpretação é de que com 95% de confiança podemos dizer que o verdadeiro valor do diâmetro médio do orifício estará contido no intervalo [5,395; 5,457].

12. Temos que

$$\bar{x} = 13,656 \quad s = 3,368986 \quad n = 25 \quad t_{0,025} = 2,064$$

então

$$u = 13,656 - 2.064(3.368986)/\sqrt{25} = 13,656 - 1,390717 = 12,26528$$

$$l = 13,656 + 2.064(3.368986)/\sqrt{25} = 13,656 + 1,390717 = 15,04672$$

o intervalo fica

$$12,27 \leq \mu \leq 15,04\,.$$

13. **a)** Temos que

$$\hat{p} = 0,36 \quad n = 50 \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

o intervalo é

$$0,227 \leq p \leq 0,493\,.$$

b)

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2 (0,36)(1-0,36) = 2212,76\,.$$

c)

$$n = \left(\frac{1,96}{0,02}\right)^2 (0,5)(1-0,5) = 2401\,.$$