

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas - Icx**  
**Departamento de Estatística**

**Índices de Capacidade Multivariados  
para Processos Autocorrelacionados**

**Atividade Complementar**

**Aluna:** Bruna de Castro Dias Bicalho

**Orientadora:** Profa. Sueli Aparecida Mingoti

## **RESUMO**

Nos últimos anos, índices de capacidade de processos têm sido usados frequentemente para determinar se um processo é capaz de produzir itens em conformidade com a tolerância especificada. No entanto, até o momento nenhum estudo foi publicado acerca de índices de capacidade para processos autocorrelacionados. Neste trabalho, aliando as metodologias propostas por Mingoti e Glória (2004) e Kalgonda e Kulkarni (2004), apresentamos uma proposta para estes índices, assim como, implementamos na linguagem Minitab for Windows um programa para os cálculos dos mesmos.

**Palavra-chave:** Índices de Capacidade Multivariados; Autocorrelação; Minitab for Windows.

## SUMÁRIO

1 - Introdução .....	1
2 – Kalgonda e Kulkarni (2004) – Gráficos de Controle de Qualidade Multivariados para Processos Autocorrelacionados .....	4
3 – Índices de Capacidade Multivariados Modificados de Chen: Mingoti e Glória (2004) .....	11
4 – Proposta de Índices de Capacidade para Processos Multivariados Autocorrelacionados .....	15
5 – Implementação Computacional .....	16
6 – Exemplo de Aplicação.....	25
7 – Considerações Finais .....	29
8 – Referências Bibliográficas.....	30

## 1. INTRODUÇÃO

A qualidade tornou-se um dos mais importantes fatores na decisão dos consumidores na seleção de serviços e produtos que competem entre si. Com isso, o aperfeiçoamento da qualidade tem se tornado uma atividade essencial na maior parte das organizações para manter a existência de clientes e a conquista de novos mercados.

O controle estatístico de processos (CEP) é uma coleção de ferramentas utilizadas para obter *estabilidade* e *reduzir a variabilidade* do processo, ou seja, objetiva a prevenção contra a perda de qualidade e a busca permanente da melhoria. As sete principais ferramentas do CEP são: Histograma, Folha de Verificação, Gráfico de Pareto, Diagrama de Causa e Efeito, Estratificação, Diagrama de dispersão e Gráfico de controle.

Por exemplo, o gráfico de controle por variáveis avalia o produto através de mensurações, em escala contínua, de características qualitativas, e o gráfico de controle por atributos classifica o produto como defeituoso ou não defeituoso.

Existem dois tipos de variabilidade no processo de produção denominadas de causas aleatórias e causas especiais. As causas aleatórias estão presentes em qualquer processo, é uma variabilidade natural que é inerente ao processo e que é resultante de muitas pequenas causas essencialmente inevitáveis. Quando a variabilidade é relativamente pequena, considera-se o processo em nível aceitável de desempenho e diz-se, então, que o processo está sob controle estatístico. Outras causas de variabilidade, porém, podem estar presentes, como inadequação do instrumento de avaliação, erros de operadores, matéria prima defeituosa, etc. Estas são as causas especiais e, quando presentes, são geralmente muito maiores que a variabilidade natural. Quando isso ocorre, o processo de produção se apresenta em um nível de desempenho não aceitável, então o sistema de produção é dito fora de controle estatístico.

Através do CEP busca-se então determinar o mais rápido possível a ocorrência de tais variabilidades, de modo que as ações corretivas possam ser feitas antes que muitas unidades não – conformes sejam produzidas.

O monitoramento e controle do processo aborda dois casos: univariado, quando há apenas uma variável sendo monitorada no processo ou uma característica de interesse, e

multivariado, quando se faz necessário o monitoramento simultâneo de duas ou mais características de qualidade.

De acordo com Montgomery (2004), na prática, muitos, se não a maioria, dos cenários de monitoramento e controle do processo envolvem várias variáveis relacionadas. As técnicas para controle estatístico de processos univariados são muito conhecidas e já implementadas em diversos *softwares* estatísticos. Porém, o uso da metodologia de estatística multivariada não tem sido comum nos processos de controle de qualidade devido às dificuldades inerentes das técnicas multivariadas.

Uma solução possível é o monitoramento individual de cada característica através dos gráficos de controle. No entanto, este procedimento pode ser deficiente pelo fato de se ignorar as correlações entre as características de interesse, aumentando consideravelmente o erro do tipo 1 estabelecido. Hotelling (1947) sugere uma solução para este problema usando a estatística  $T^2$ , contudo, o método proposto não identifica diretamente a(s) característica(s) responsável (eis) pela “falta de controle” no processo. Uma alternativa ao teste  $T^2$  de Hotelling, é proposto no artigo de Hayter & Tsui (1994). Os autores sugerem a construção de intervalos de confiança para cada variável mas de modo que a abertura dos limites de confiança levem em consideração a correlação existente entre as variáveis medidas. Este método controla o erro do tipo I, identifica as variáveis e quantifica mudanças nas médias das variáveis.

Estas técnicas de controle de processos multivariados são baseadas na suposição de que os vetores de observações são independentes. Porém, devido a automação dos sistemas de coleta dos dados, as características de qualidade são medidas de acordo com a ordem de produção, em intervalos de tempo bem pequenos, o que pode acarretar a presença de autocorrelação em uma ou mais variáveis.

Kalgonda e Kulkarni (2004) propuseram um procedimento de controle para monitorar o vetor de médias de processos multivariados autocorrelacionados considerando, em particular, vetores de observações que seguem um modelo de séries temporais multivariado VAR(1) – autoregressivo de ordem 1. O procedimento proposto está fundamentado nas idéias de Hayter e Tsui (1994). Este método também possui a habilidade de identificar as variáveis responsáveis pela ausência de controle dentro do processo.

Um processo estável também pode apresentar itens defeituosos, portanto se faz necessário avaliar a capacidade do processo, isto é, sua capacidade de produzir itens conformes, ou seja, de acordo com as especificações estabelecidas pelos clientes. A capacidade do processo pode ser avaliada através das análises gráficas, na comparação de histogramas ou gráficos seqüenciais, ou através de índices de capacidade.

Os índices de capacidade para processos univariados, mais usuais, são:  $C_p$ ,  $C_{pk}$  e  $C_{pm}$ . Mingoti e Glória (2004) desenvolveram índices de capacidade multivariados modificados de Chen, usando algumas idéias sugeridas por Hayter e Tsui (1994) para avaliar processos multivariados correlacionados.

O objetivo deste projeto é construir e implementar no *software* estatístico Minitab for Windows, os índices de capacidade multivariados para processos autocorrelacionados, combinando as metodologias propostas por Mingoti e Glória (2004) e Kalgonda e Kulkarni (2004).

Na primeira seção, ou seja, no capítulo 2 será apresentado a proposta de Kalgonda e Kulkarni (2004) para o monitoramento do vetor de médias do processo; na segunda seção mostramos a metodologia de Mingoti e Glória (2004) para a construção de índices de capacidade multivariados modificados de Chen; na terceira seção é apresentada a proposta de índices de capacidade multivariados para processos autocorrelacionados; na quarta a implementação computacional destes índices; na quinta mostramos um exemplo de aplicação usando os dados do artigo de Niverthi e Dey (2000); na sexta seção temos as considerações finais e finalmente, as referências bibliográficas.

## 2. KALGONDA E KULKARNI (2004) – GRÁFICOS DE CONTROLE DE QUALIDADE MULTIVARIADOS PARA PROCESSOS AUTOCORRELACIONADOS

Kalgonda e Kulkarni (2004) propuseram um procedimento de controle para monitorar o vetor de médias de processos multivariados autocorrelacionados, considerando, em particular, vetores de observações que seguem um modelo de séries temporais multivariado, VAR(1) – autoregressivo de ordem 1. Este procedimento está fundamentado nas idéias de Hayter e Tsui (1994).

### 2.1. VAR(1) - MODELO AUTOREGRESSIVO MULTIVARIADO DE ORDEM 1

Seja  $Y_t$  um vetor aleatório normal  $p$ -variado observado no tempo  $t$ , modelado por um processo AR(1).

$$Y_t = \mu_t + \Phi(Y_{t-1} - \mu_t) + \varepsilon_t \quad (1)$$

onde  $\mu_t$  é o vetor de médias no tempo  $t$ ,  $\varepsilon_t$  é o vetor de variáveis aleatórias normais independentes com vetor de médias zero e matriz de covariância  $\Sigma$ , e  $\Phi$  é a matriz de tamanho  $p \times p$  de parâmetros do modelo VAR(1).

Devido a suposição de estacionariedade de  $Y_t$ ,  $\mu_t$  é constante para todo tempo  $t$ . Logo, a equação (1) pode ser escrita como:

$$Y_t = \mu + \Phi(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad (2)$$

### 2.2. MATRIZ DE COVARIÂNCIA CRUZADA

Se  $\Phi$  é uma matriz nula, então o modelo da equação (2) se reduz a:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t \quad (3)$$

Caso contrário,  $\Phi$  afeta a matriz de covariância do modelo. Então, precisamos obter uma matriz de covariância cruzada para o modelo VAR(1).

Seja  $\Gamma(t, t+h)$  a matriz de covariância cruzada entre  $Y_t$  e  $Y_{t+h}$ , sendo que o elemento correspondente a linha  $i$  e a coluna  $j$ , é dado por:

$$\gamma_{ij}(h) = E \left\{ (Y_{it} - \mu_{it})(Y_{jt+h} - \mu_{jt+h}) \right\} \quad (4)$$

Devido a suposição de estacionariedade,  $\mu_t$  é uma constante,  $\forall t$ , digamos  $\mu$  e  $\Gamma(t, t+h)$  será uma função de lag  $h$ , que pode ser escrita como  $\Gamma(h)$ .

A matriz de correlação cruzada  $\rho(h)$  de lag  $h$ , é dada por:

$$\rho(h) = V^{-1/2} \Gamma(h) V^{-1/2} \quad (5)$$

onde

$$V = \text{diag}(\gamma_{11}(0), \gamma_{22}(0), \dots, \gamma_{pp}(0)) \quad (6)$$

e  $\gamma_{ii}(0)$  é a variância correspondente a variável  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , ou seja, é o elemento da  $i$ -ésima linha e da  $i$ -ésima coluna da matriz de covariâncias cruzada de lag 0.

Quando  $\Phi$  e  $\Sigma$  são dados, usando as equações de Yule-Walker (Morettin e Tolo, 2004), obtemos a matriz de covariâncias cruzada de lag 0, dada por:

$$\Gamma(0) = \Phi \Gamma(0) \Phi' + \Sigma \quad (7)$$

logo,  $\rho(0)$  pode ser obtido solucionando-se a equação (7).

### 2.3. PROCEDIMENTO DE CONTROLE PROPOSTO POR KALGONDA E KULKARNI (2004)

Suponha que  $Y_t$  é um vetor aleatório  $p$ -variado observado no tempo  $t$ , modelado por um processo VAR(1), autoregressivo de ordem 1. Logo,

$$Y_t \sim N_p(\mu, \Gamma(0)) \quad (8)$$

Se o processo está sob controle, então  $\{Y_t\}$  segue uma distribuição normal multivariada com vetor de médias  $\mu_0 = (\mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{p0})'$  e matriz de covariâncias cruzada  $\Gamma(0)$ . O processo é considerado fora de controle se pelo menos uma destas hipóteses,  $H_{i0} = \mu_i = \mu_{i0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  não é verdadeira.

A estatística de teste proposta por Kalgonda e Kulkarni (2004) para avaliar se o processo está ou não sob controle é:

$$Z_{it} = \frac{y_{it} - \mu_{i0}}{\gamma_i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

onde  $\gamma_i(0)$  é a raiz quadrada de  $\gamma_{ii}(0)$ . Sob  $H_{i0}$ ,  $Z_{it}$  segue uma distribuição normal padrão. Como consequência, quando o processo está sob controle, obtemos:

$$\Pr_{H0} \left[ |Z_{it}| \leq C_{\rho(0),\alpha}, i = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha \quad (10)$$

onde  $C_{\rho(0),\alpha}$  é uma constante que pode ser obtida quando a equação (10) é satisfeita para um determinado nível de significância. Como  $Y_{it}$ 's são correlacionados entre si e os  $Z_{it}$ 's também são,  $C_{\rho(0),\alpha}$  depende da estrutura da matriz de covariâncias cruzada de  $Y_t$ .

Logo o processo estará sob controle se:

$$\mu_{i0} - C_{\rho(0),\alpha} \gamma_i(0) \leq Y_{it} \leq \mu_{i0} + C_{\rho(0),\alpha} \gamma_i(0), \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

Equivalentemente, o processo pode ser considerado sob controle se:

$$Z_t = \text{Max}_{1 \leq i \leq p} \left[ |Z_{it}| \right] \leq C_{\rho(0),\alpha} \quad (12)$$

#### 2.4. GRÁFICO Z

Os passos para a construção do gráfico Z de controle de qualidade multivariado para processos autocorrelacionados, são os seguintes:

1. Seja os limites de controle: LIC = 0 e LSC =  $C_{\rho(0),\alpha}$ .
2. Calcular  $Z_t = \text{Max}_{1 \leq i \leq p} \left[ |Z_{it}| \right]$ .
3. Plotar os valores de  $Z_t$ .
4. Se os valores de  $Z_t$  estiverem dentro do intervalo, então o processo é considerado sob controle. Caso contrário, o processo está fora de controle. A identificação da variável responsável, pela falta de controle no processo, é feita analisando-se os valores de  $|Z_{it}|$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  para cada variável.

## 2.5. OBTENÇÃO DE $C_{\rho(0),\alpha}$

O valor de  $C_{\rho(0),\alpha}$  pode ser obtido usando um procedimento de simulação, dado o valor de  $\alpha$  e a matriz de correlação cruzada  $\rho(0)$ . Os passos para a obtenção deste valor crítico de acordo com Kalgonda e Kulkarni (2004) são:

1. Gerar um número grande  $N^*$  de vetores de  $Y_t$  seguindo uma distribuição normal multivariada com média zero e matriz de covariância  $\rho(0)$ .
2. Calcular  $Z_t$  para cada um destes vetores.
3. A ordenada correspondente ao percentil de ordem  $(1 - \alpha)$  da distribuição empírica de  $Z_t$  é a estimativa do ponto crítico  $C_{\rho(0),\alpha}$ .

## 2.6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO (KALGONDA E KULKARNI, 2004)

Considere um vetor bivariado  $Y_t = (Y_{1t}, Y_{2t})'$  onde ambas as variáveis seguem um modelo de séries temporais, AR(1). O vetor de médias  $\mu_0$ , a matriz de parâmetros  $\Phi$  e a matriz de covariância  $\Sigma$  são dados por:  $\mu_0 = (0,0)'$ ;  $\Phi = \text{diag}(0,5;0,7)$ ;  $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$ .

Usando a equação (7), obtemos a matriz de covariâncias cruzada como se segue:

$$\Gamma(0) = \Phi\Gamma(0)\Phi' + \Sigma \Rightarrow \Gamma(0) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25\gamma_{11} & 0,35\gamma_{12} \\ 0,35\gamma_{21} & 0,49\gamma_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25\gamma_{11} + 1 & 0,35\gamma_{12} + 0,5 \\ 0,35\gamma_{21} + 0,5 & 0,49\gamma_{22} + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma_{11} = 0,25\gamma_{11} + 1 \Rightarrow \gamma_{11} = 1,333 \\ \gamma_{12} = 0,35\gamma_{11} + 0,5 \Rightarrow \gamma_{12} = 0,7692 = \gamma_{21} \\ \gamma_{22} = 0,49\gamma_{22} + 1 \Rightarrow \gamma_{22} = 1,9608. \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma(0) = \begin{bmatrix} 1,333 & 0,7692 \\ 0,7692 & 1,9608 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz de correlação cruzada de lag 0 é:

---

\* Segundo Hayter e Tsui (2004)  $N^*$  deve ser um valor próximo de 100000. No entanto, Mingoti e Glória (2004) mostram que  $N^*=10000$  fornece resultados adequados.

$$\rho(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0,4757 \\ 0,4757 & 1 \end{bmatrix}$$

No artigo de Kalgonda e Kulkarni (2004), os autores simularam quatro processos, A, B, C e D, cada um com 5 vetores de observações. O processo A não teve nenhuma mudança na média; para os outros processos, as mudanças nas médias, podem ser visualizadas na Tabela 1.

Tabela 1: Mudanças na média de quatro processos simulados

$\mu_{t_0}$	Processos			
	A	B	C	D
$\mu_{10}$	Nenhuma mudança	Nenhuma mudança	$\mu_{10} + 2$	$\mu_{10} - 2$
$\mu_{20}$	Nenhuma mudança	$\mu_{20} + 1$	Nenhuma mudança	Nenhuma mudança

A Tabela 2 apresenta nas colunas 3 e 4 as cinco observações para cada um dos quatro processos, na coluna 5 a estatística de teste  $Z_t$  e as colunas 6 e 7 fornecem os valores de  $Z_{1t}$  e  $Z_{2t}$  respectivamente.

Tabela 2: Cálculo da estatística de teste  $Z_t$  para os processos A, B, C e D

Processo	Número da observação	$Y_{1t}$	$Y_{2t}$	$Z_t$	$Z_{1t}$	$Z_{2t}$
A	1	-1,723	-1,433	1,493		
	2	0,696	0,438	0,602		
	3	-0,097	-0,657	0,469		
	4	-1,167	-0,589	1,011		
	5	-0,027	-1,806	1,290		
B	1	1,336	1,683	1,202		
	2	0,729	1,710	1,221		
	3	0,625	2,503	1,782		
	4	3,142	5,136	3,668*	2,721	3,668*
	5	2,454	4,887	3,490*	2,125	3,490*
C	1	4,137	2,879	3,583*	3,583*	2,056
	2	3,753	2,204	3,251*	3,251*	1,574
	3	3,818	2,224	3,307*	3,307*	1,588
	4	4,508	3,227	3,905*	3,905*	2,304
	5	3,401	3,272	2,945		
D	1	-2,602	0,429	2,253		
	2	4,736	0,229	4,102*	4,102*	0,164
	3	-4,087	-0,843	3,539*	3,539*	0,602
	4	-5,035	-1,439	4,361*	4,361*	1,028
	5	-5,573	-1,889	4,825*	4,825*	1,349

A Figura 1 apresenta os gráficos de controle Z para cada um dos quatro processos. Os valores de  $Z_t$  são plotados nos gráficos 1, 2, 3 e 4 para cada um dos processos, A, B, C e D respectivamente. O limite superior de controle nos gráficos é obtido por simulação, considerando um nível de significância  $\alpha = 0,05$ , resultando em  $C_{\rho(0),\alpha} = 3,012$ . O limite inferior de controle é 0.

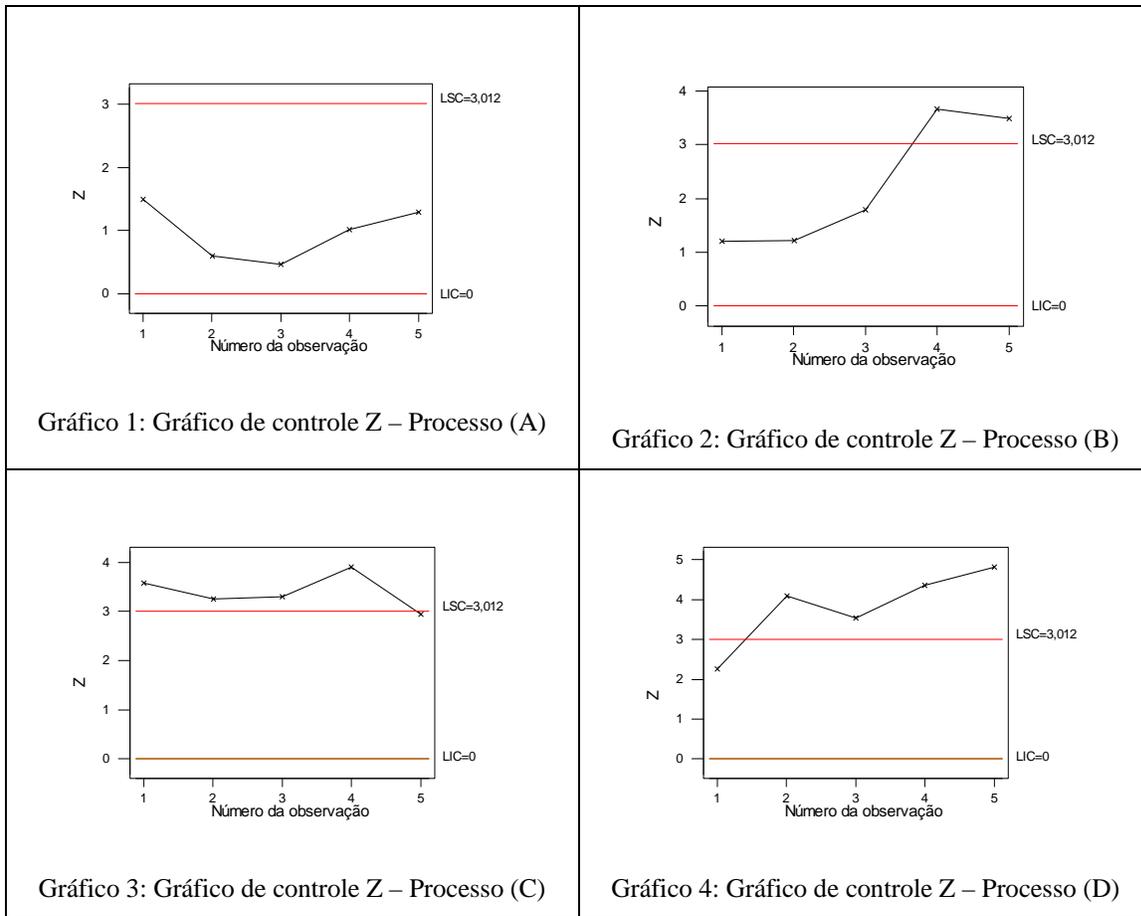


Figura 1: Gráficos de controle Z para os processos A, B, C e D.

## 2.7. RESULTADOS

Pela Figura 1 observa-se que somente o processo A está sob controle, pois todos os pontos estão dentro dos limites inferior e superior

Os processos B, C e D indicam claramente a situação de “falta de controle” pois, um número substancial de pontos estão acima do limite superior. A identificação da(s) variável(eis) responsável (eis) pelo processo estar fora de controle é realizada comparando-se os valores de  $Z_{1i}$  e  $Z_{2i}$ , dados na Tabela 2 com o valor  $C_{\rho(0),\alpha} = 3,012$ . A variável que apresentar o valor de  $Z_{ii}, i = 1,2$  maior que 3,012 é a “causadora” da falta de controle do processo (os valores marcados com \* na Tabela 2, identifica a variável responsável pela falta de controle). As conclusões sobre os processos B, C e D são apresentadas a seguir:

- O processo B está fora de controle, observações 4 e 5, devido a mudanças na média da variável  $Y_2$ .
- O processo C está fora de controle, observações 1-4, devido a mudanças na média da variável  $Y_1$ .
- E o processo D está fora de controle, observações 1-4, devido a mudanças na média da variável  $Y_1$ .

### 3. ÍNDICES DE CAPACIDADE MULTIVARIADOS MODIFICADOS DE CHEN : MINGOTI E GLÓRIA (2004)

Os índices de capacidade do processo são usados para avaliar se o processo é capaz de atender as especificações estabelecidas pelos clientes.

Mingoti e Glória (2004) desenvolveram índices de capacidade multivariados modificados de Chen para processos não autocorrelacionados normais multivariados, usando algumas idéias sugeridas por Hayter e Tsui (1994).

#### 3.1. HAYTER E TSUI (1994) : LIMITES DE CONTROLE CORRIGIDOS

Seja  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  um vetor contendo as características de qualidade de interesse. Suponha que  $X$  tenha uma distribuição normal  $p$ -variada com vetor de médias  $\mu_0 = (\mu_0^1, \mu_0^2, \dots, \mu_0^p)$  e matriz de covariância  $\Sigma_{p \times p}$ . Os limites de controle de  $(1 - \alpha)100\%$  para cada variável  $X_i, i = 1, 2, \dots, p$  são dados por:

$$P\left\{\left|\frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i}\right| \leq C_{R\alpha}, \forall i = 1, 2, \dots, p\right\} = 1 - \alpha \quad (13)$$

Isto é, a probabilidade que o intervalo  $[X_i \pm \sigma_i C_{R\alpha}]$  contenha o verdadeiro valor de  $\mu_i^0$  para cada  $i = 1, 2, \dots, p$ , é igual a  $(1 - \alpha)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . O valor crítico  $C_{R\alpha}$  depende da matriz de correlação teórica  $P_{p \times p}$  do vetor aleatório  $X$ . Consequentemente, a estrutura de correlação de  $X$  afeta todos os intervalos simultaneamente. O processo é considerado fora de controle se:

$$M = \text{Max}\left\{\left|\frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i}\right|, i = 1, 2, \dots, p\right\} > C_{R\alpha} \quad (14)$$

O valor de  $C_{R\alpha}$  é obtido por simulação de amostras com distribuição normal  $p$ -variada com média zero e matriz de covariância  $P_{p \times p}$ . Este procedimento é similar à aquele utilizado na obtenção de  $C_{\rho(0), \alpha}$ . Ver Mingoti e Glória (2004) para mais informações sobre o algoritmo de simulação usado para encontrar  $C_{R\alpha}$ .

### 3.2. ÍNDICE DE CAPACIDADE MULTIVARIADO DE CHEN :

Seja  $V$  a região de especificação do processo definida como:

$$V = \left\{ X \in \mathfrak{R}^p : |X_i - \mu_i^S| \leq r_i, i = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (15)$$

onde  $\mu_i^S$  é a média de especificação para a variável  $X_i$  e  $r_i, i = 1, 2, \dots, p$ , são as constantes de especificação do processo. O índice de capacidade de Chen é definido como:

$$MC_p = \frac{1}{r}$$

onde  $r$  é tal que:

$$P \left[ \text{Max} \left\{ \left| \frac{X_i - \mu_i^S}{r_i} \right|, i = 1, 2, \dots, p \right\} \leq r \right] = 1 - \alpha \quad (16)$$

O processo é considerado capaz se  $MC_p$  é maior que 1 e incapaz caso contrário. O valor de  $r$  é obtido usando a função de distribuição acumulada  $F_H$  da variável  $H$  definida como:

$$H = \text{Max} \left\{ \left| \frac{X_i - \mu_i^0}{\sigma_i} \right|, i = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (17)$$

A similaridade entre as equações (13), (14), (16) e (17) podem ser usadas para construir índices de capacidade combinando as metodologias de Hayter e Tsui (1994) e Chen (1994).

### 3.3. ÍNDICES DE CAPACIDADE MULTIVARIADOS MODIFICADOS DE CHEN

Ao invés de usar algum procedimento numérico para encontrar a constante  $r$  usando a distribuição teórica da variável  $H$  e a equação (17), este pode ser obtido usando o procedimento de simulação para obtenção do valor crítico  $C_{R\alpha}$  (Mingoti e Glória, 2004).

Foram desenvolvidos três índices de capacidade correspondentes às seguintes especificações: o vetor de médias do processo é igual ao vetor de médias de especificação, o processo não está centrado no vetor de médias de especificação e os limites de especificação não estão centrados no vetor de médias nominais de especificação, que serão apresentados a seguir, tal proposto por Mingoti e Glória (2004).

### **Primeiro Caso: O vetor de médias do processo é igual ao vetor de médias de especificação**

Considerando a região de especificação  $V$  definida em (15),  $\mu_i^0 = \mu_i^S, i = 1, 2, \dots, p$ , e usando o procedimento de obtenção do valor de  $C_{R\alpha}$ , para um valor fixo de  $\alpha, 0 < \alpha < 1$ , temos que:

$$P \left[ \text{Max} \left\{ \left| \frac{X_i - \mu_i^S}{r_i} \right|, i = 1, 2, \dots, p \right\} \leq C_{R\alpha} \right] = 1 - \alpha \quad (18)$$

Portanto o processo será considerado capaz para todo  $i = 1, 2, \dots, p$  se:

$$\frac{r_i}{\sigma_i C_{R\alpha}} \geq 1 \quad (19)$$

ou equivalentemente se:

$$\frac{\sigma_i C_{R\alpha}}{r_i} \leq 1 \quad (20)$$

Então, o índice de capacidade multivariado do processo pode ser definido como:

$$C_p^m = \min \left\{ \frac{r_i}{\sigma_i C_{R\alpha}}, i = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (21)$$

O processo é considerado capaz se  $C_p^m$  é maior ou igual a 1.

### **Segundo Caso: O processo não está centrado no vetor de médias de especificação**

Em muitas situações o processo está sob controle estatístico mas não está centrado no vetor de médias de especificação. O índice  $C_p^m$  definido em (21), assim como o  $MC_p$  definido por Chen, não são sensíveis às mudanças na média do processo. No caso univariado deriva-se o índice  $C_{pk}$  para solucionar este tipo de problema, desta forma, adota-se algo similar para definir um coeficiente multivariado  $C_{pk}^m$ .

Sejam  $LIE_i$  e  $LSE_i$  os limites inferior e superior de especificação para a característica de qualidade  $X_i$  e  $\bar{x}_i$  é a média estimada do processo para a variável  $X_i$ .

Então, o coeficiente multivariado  $C_{pk}^m$  é definido como:

$$C_{pk}^m = \min \left\{ \left( \frac{\bar{x}_i - LIE_i}{C_{R\alpha}}; \frac{LSE_i - \bar{x}_i}{C_{R\alpha}} \right), i = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (22)$$

Considerando que  $r_i^1 = \mu_i^e - LIE_i$  e  $r_i^2 = LSE_i - \mu_i^e$  onde  $\mu_i^e$  é a média de especificação de  $X_i$ , então a equação (22) é igual a:

$$C_{pk}^m = \min \left\{ \left( \frac{\bar{x}_i - (\mu_i^e - r_i^1)}{C_{R\alpha} \sigma_i}; \frac{(\mu_i^e + r_i^2) - \bar{x}_i}{C_{R\alpha} \sigma_i} \right), i = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (23)$$

E portanto, esta equação leva em conta possíveis desvios dos valores da média do processo para os valores médios de especificação. A equação (22) é igual a equação (21) quando o vetor de médias do processo está centrado no vetor de médias de especificação.

### **Terceiro Caso: Os limites de especificação não estão centrados no vetor de médias nominais de especificação**

Sejam  $LIE_i$  e  $LSE_i$  definidos anteriormente mas não necessariamente centrados na média de especificação. Então o índice de capacidade multivariado é definido como:

$$C_{pm}^m = \min \{ C_{pi}, i = 1, 2, \dots, p \} \quad (24)$$

onde

$$C_{pi} = \left[ \frac{r_i^1 + r_i^2}{2\sigma_i C_{R\alpha}} \right], i = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

sendo  $\sigma_i$  o desvio padrão de  $X_i$ . O processo é considerado capaz se  $C_p^m$  é maior ou igual a 1.

#### **4. PROPOSTA DE ÍNDICES DE CAPACIDADE PARA PROCESSOS MULTIVARIADOS AUTOCORRELACIONADOS**

A proposta de índices de capacidade para processos multivariados autocorrelacionados é combinar a metodologia de Mingoti e Glória (2004) e Kalgonda e Kulkarni (2004).

Para levar em consideração a autocorrelação que pode existir entre os vetores de observações, o valor de  $C_{R\alpha}$  é substituído pelo  $C_{\rho^{(0)},\alpha}$  nas fórmulas (18) – (25).

## 5. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Nesta seção apresentamos o funcionamento da macro *icmpa* desenvolvida no *software* estatístico Minitab for Windows, versão 14, para o cálculo de índices de capacidade multivariados para processos autocorrelacionados. É importante salientar que a macro *icmpa* funciona somente nesta versão do programa, pois o comando *mnormal* que gera vetores aleatórios com distribuição normal multivariada, usado na macro, não está disponibilizado nas versões anteriores do *software*.

Existem duas formas distintas do usuário entrar com as informações para a análise dos índices de capacidade. Na primeira o usuário entra com os dados<sup>1</sup> nas colunas da planilha de trabalho, ou seja, com as características de qualidade de interesse na *worksheet* do *Minitab*. Na segunda espera-se que o usuário já tenha a matriz de covariâncias dos resíduos, o vetor de parâmetros  $\Phi$  e o vetor de médias calculados pelo modelo autoregressivo de ordem 1, VAR(1). Estas informações também devem estar dispostas nas colunas da planilha de trabalho.

As Figuras 2 e 3 exemplificam a forma de entrada dos dados para o primeiro e para o segundo caso respectivamente.

---

<sup>1</sup> A parte decimal do número é separada por *vírgula* na planilha de trabalho, porém o *ponto* é que é considerado o separador decimal quando o usuário fornece os limites inferiores, superiores e as médias de especificação.

The image shows a screenshot of the Minitab software interface. The window title is "MINITAB - Untitled - [Worksheet 1 \*\*\*]". The menu bar includes File, Edit, Data, Calc, Stat, Graph, Editor, Tools, Window, and Help. The toolbar contains various icons for file operations, editing, and data analysis. The worksheet grid has columns labeled C1 through C12 and rows numbered 1 through 19. Data is entered in the first two columns for the first 10 rows.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
1	1,62730	1,12217										
2	1,06521	0,43136										
3	0,22240	-2,78335										
4	-0,43868	1,35949										
5	0,01583	0,35190										
6	-0,07333	1,97252										
7	-0,07891	-0,14630										
8	1,41405	0,68683										
9	-1,01585	-0,04991										
10	0,11471	1,38749										
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												

Current Worksheet: Worksheet 1 9:58

Figura 2: Exemplo da entrada dos dados para o primeiro caso.

Observamos pela Figura 2 que o usuário está avaliando duas características, com 10 valores cada uma, que estão armazenadas nas colunas C1 e C2 da *worksheet*.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
	MCOVA1	MCOVA2	PARS	MÉDIAS								
1	1,0	0,5	0,7	0								
2	0,5	1,0	0,5	0								
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												

Figura 3: Exemplo da entrada dos dados para o segundo caso.

A Figura 3 mostra que o usuário inseriu nas colunas C1 e C2 a matriz de covariâncias dos resíduos, na coluna C3 os parâmetros  $\Phi$  e na coluna C4 as médias das duas variáveis que serão avaliadas.

Para iniciar a macro o usuário deve clicar na *session window* para torná-la ativa, ir em *Editor* e *Enable commands*. Quando o prompt de comando do Minitab, MTB >, aparecer, o usuário deverá chamar a macro digitando *%icmpa;* e apertar *enter*. Estamos supondo que o arquivo *icmpa.mac* está dentro do diretório *Macros* do *Minitab*. Caso o usuário esteja lendo o arquivo do disquete, por exemplo, deverá digitar *%a:/icmpa;* e apertar *enter*. Isto é, o usuário deverá sempre informar o diretório onde o arquivo *icmpa.mac* está armazenado. Em subcomandos, SUBC>, o usuário deve fornecer as colunas onde as informações estão armazenadas e poderá escolher o nível de significância e o número de simulações para o cálculo de  $C_{\rho(0),\alpha}$ . O valor de *default* para o nível de

significância<sup>2</sup> é dado em porcentagem e é igual a 5 ( $\alpha=0,05$ ) e do número de simulações<sup>3</sup> é 10000.

Os subcomandos são diferentes para o primeiro e segundo caso de entrada dos dados. No primeiro caso os subcomandos são ilustrados na Figura 4.

```
MTB > %icmpa;  
SUBC> dados c1-c2;  
SUBC> alfa 6;  
SUBC> tam 11000.
```

Figura 4: Subcomandos para o primeiro caso de entrada dos dados.

No primeiro subcomando o usuário deve digitar *dados* e informar as colunas onde as variáveis estão armazenados. Neste exemplo, temos duas características que estão dispostas nas colunas C1 a C2. É importante destacar que as variáveis devem ser armazenadas de forma contínua na planilha, ou seja, entre as colunas onde os dados estão dispostos não deve haver nenhuma coluna vazia. O próximo subcomando é opcional, o usuário digita *alfa* e escolhe o valor do nível de significância (em porcentagem). No exemplo acima o indivíduo escolheu  $\alpha=6$ . O terceiro e último subcomando *tam* indica o número de simulações para o cálculo de  $C_{\rho(0),\alpha}$  e também é opcional. O usuário deve digitar *tam* e escolher o número de simulações. Neste caso o usuário escolheu 11000 simulações. A ordem dos subcomandos pode ser escolhida pelo usuário lembrando que o subcomando *dados* não é opcional, somente os comandos *alfa* e *tam* são opcionais. Para finalizar os subcomandos e rodar a macro o usuário deve digitar *ponto* e se quiser continuar com os subcomandos deve digitar *ponto e vírgula*. Alguns exemplos de como iniciar a macro são apresentados na Figura 5.

---

<sup>2</sup> Nas análises estatísticas o nível de significância mais usual é  $\alpha=0,05$ .

<sup>3</sup> O valor de *default* igual a 10000 para o número de simulações está baseado no artigo de Mingoti e Glória (2004).

MTB > %icmpa; SUBC> dados c1-c2.	MTB > %icmpa; SUBC> dados c1-c2; SUBC> alfa 6.	MTB > %icmpa; SUBC> dados c1-c2; SUBC> tam 11000.
MTB > %icmpa; SUBC> dados c1-c2; SUBC> alfa 6; SUBC> tam 11000.	MTB > %icmpa; SUBC> dados c1-c2; SUBC> tam 11000. SUBC> alfa 6.	MTB > %icmpa; SUBC> alfa 6; SUBC> dados c1-c2.
MTB > %icmpa; SUBC> tam 11000; SUBC> dados c1-c2.	MTB > %icmpa; SUBC> alfa 6; SUBC> tam 11000; SUBC> dados c1-c2.	MTB > %icmpa; SUBC> tam 11000; SUBC> alfa 6; SUBC> dados c1-c2.

Figura 5 - Exemplos de inicialização da macro para o primeiro caso.

Na Figura 6 mostramos o segundo caso de entrada dos dados:

```

MTB > %icpma;
SUBC> mcova c1-c2;
SUBC> pars c3;
SUBC> medias c4;
SUBC> alfa 4;
SUBC> tam 11000.

```

Figura 6: Subcomandos para o segundo caso de entrada dos dados.

No primeiro subcomando o usuário deve digitar *mcova* e informar as colunas onde está armazenada a matriz de covariância residual. Neste exemplo, que estamos avaliando duas características, a matriz está armazenada nas colunas C1 a C2. O próximo subcomando é *pars*, onde o usuário deve indicar em qual coluna os parâmetros  $\Phi$  calculados pelo modelo VAR(1) estão dispostos. Neste exemplo os parâmetros estão na coluna 3, ou C3. Depois o usuário fornece a coluna onde estão as médias das características também calculadas pelo modelo autoregressivo de ordem 1 digitando *medias* e indicando a coluna. Os subcomandos *mcova*, *pars* e *média* não são opcionais e a ordem dos subcomandos também pode ser aleatória como foi explicado anteriormente.

A primeira etapa do programa calcula o valor de  $C_{\rho(0),\alpha}$  e disponibiliza na *session window* quando estamos trabalhando com o caso 1 de entrada dos dados: a média, o desvio-padrão e a variância dos dados, o vetor de médias e o vetor de parâmetros calculados pelo modelo AR(1), a matriz de covariância dos resíduos, a matriz de covariância e correlação cruzada de lag zero e o valor de  $C_{\rho(0),\alpha}$ . Isto é ilustrado pela Figura 7 utilizando os dados apresentados na Figura 2. Neste exemplo utilizamos um nível de significância  $\alpha=5$  (em porcentagem) e 10000 simulações.

```

O usuário informou os dados:
PRIMEIRA PARTE : Informações fornecidas pelos dados para o
cálculo dos índices de capacidade multivariados

Média dos dados
MED
  0,285272  0,433219

Desvio-padrão dos dados
DP
  0,834491  1,316528

Variância dos dados
VAR
  0,696375  1,733247

Vetor de médias calculadas pelo modelo AR(1)
MD
  0,280223  0,388859

Vetor de parâmetros phi do modelo AR(1)
MP
  -0,0447021  -0,3445211

Matriz de covariância dos resíduos do modelo AR(1)
Matrix MCOVA
0,694979  0,10749
0,107494  1,54308

Matriz de covariância cruzada de lag zero
Matrix MGAMA
0,696371  0,10918
0,109176  1,75090

Matriz de correlação cruzada de lag zero
Matrix M CORR
1,00000  0,09887
0,09887  1,00000

Valor de c rô zero alfa
CROZALFA  2,22418

```

Figura 7: Saída da macro para a primeira etapa do programa.

Quando o usuário fornece a matriz de covariância dos resíduos, os parâmetros  $\Phi$  e as médias das variáveis, o programa imprime os resultados como mostrado na Figura 8. Estamos utilizando as informações da Figura 3 que são as mesmas do exemplo de aplicação apresentado na seção 2.6 deste relatório. Neste caso, usamos  $\alpha = 0,5$  (em porcentagem) e 10000 simulações assim como foi feito no artigo de Kalgonda e Kulkarni (2004). O valor de  $C_{\rho(0),\alpha}$  calculado é muito próximo do valor fornecido no trabalho destes autores, conforme Figura 8.

**O usuário informou a matriz de covariância dos resíduos do modelo AR(1), a coluna de parâmetros do modelo e a coluna de médias das características de interesse:**

**PRIMEIRA PARTE : Informações fornecidas pelos dados para o cálculo dos índices de capacidade multivariados**

**Vetor de médias calculadas pelo modelo AR(1)**

C4  
0 0

**Vetor de parâmetros phi do modelo AR(1)**

C3  
0,7 0,5

**Matriz de covariância dos resíduos do modelo AR(1)**

Matrix MCOVA

1,0 0,5  
0,5 1,0

**Matriz de covariância cruzada de lag zero**

Matrix MGAMA

1,96078 0,76923  
0,76923 1,33333

**Matriz de correlação cruzada de lag zero**

Matrix M CORR

1,00000 0,47574  
0,47574 1,00000

**Valor de c rô zero alfa**

CROZALFA 3,00495

Figura 8: Saída da macro para a primeira etapa do programa.

A segunda parte do programa, que é igual para os dois casos de entradas dos dados, calcula os índices de capacidade multivariados  $C_p^m$ ,  $C_{pk}^m$  e  $C_{pm}^m$ <sup>4</sup> para processos autocorrelacionados. O usuário deverá informar, nesta ordem, os limites inferiores, superiores e as médias de especificação. É importante destacar que o usuário deve entrar com os dados mantendo sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo. Por exemplo, se ele informa que os dados estão nas colunas C1 a C2, então quando lhe é pedido os limites e médias de especificação, este deve sempre digitar os valores da primeira variável, que está armazenada na coluna 1, e depois os valores da segunda variável. Posteriormente o usuário escolhe qual índice que deseja calcular digitando 1 se é o índice  $C_p^m$ , 2 se é o  $C_{pk}^m$  e 3 se é o  $C_{pm}^m$ . A macro é finalizada com o dígito 4.

A Figura 9 apresenta os resultados da segunda parte do programa utilizando as informações da Figura 3.

```

SEGUNDA PARTE: CÁLCULO DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE MULTIVARIADOS
Informe os limites inferiores de especificação:
ATENÇÃO: O usuário deve entrar com os dados mantendo
sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo.
DATA> -3 -4
Informe os limites superiores de especificação:
ATENÇÃO: O usuário deve entrar com os dados mantendo
sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo.
DATA> 4 5
Informe o vetor de médias de especificação.
ATENÇÃO: O usuário deve entrar com os dados mantendo
sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo.
DATA> 0 0

Escolha o índice de capacidade multivariado que deseja calcular:

1 - Primeiro caso: O vetor de médias do processo é igual ao vetor de
médias de especificação.
Cálculo do índice CPM.

2 - Segundo caso: O processo não está centrado no vetor de médias de
especificação.
Cálculo do índice CPKM.

3 - Terceiro caso: Os limites de especificação não estão centrados no
vetor de médias nominais de especificação.
Cálculo do índice CPMM.

4 - Sair

```

Figura 9: Cálculo dos índices de capacidade multivariados - segunda etapa do programa.

<sup>4</sup> Os índices  $C_p^m$ ,  $C_{pk}^m$  e  $C_{pm}^m$  são apresentados no programa como CPM, CPKM e CPMM respectivamente.

Continuação da Figura 9

```
DATA> 3

Vetor dos índices de capacidade multivariado CPI para cada uma das
características de interesse:

CPI
0,83180  1,29690

Índice de capacidade multivariado - CPMM

ID_CPMM  0,831795

O processo não é capaz.

Escolha o índice de capacidade multivariado que deseja calcular:

1 - Primeiro caso: O vetor de médias do processo é igual ao vetor de
médias de especificação.
Cálculo do índice CPM.

2 - Segundo caso: O processo não está centrado no vetor de médias de
especificação.
Cálculo do índice CPKM.

3 - Terceiro caso: Os limites de especificação não estão centrados no
vetor de médias nominais de especificação.
Cálculo do índice CPMM.

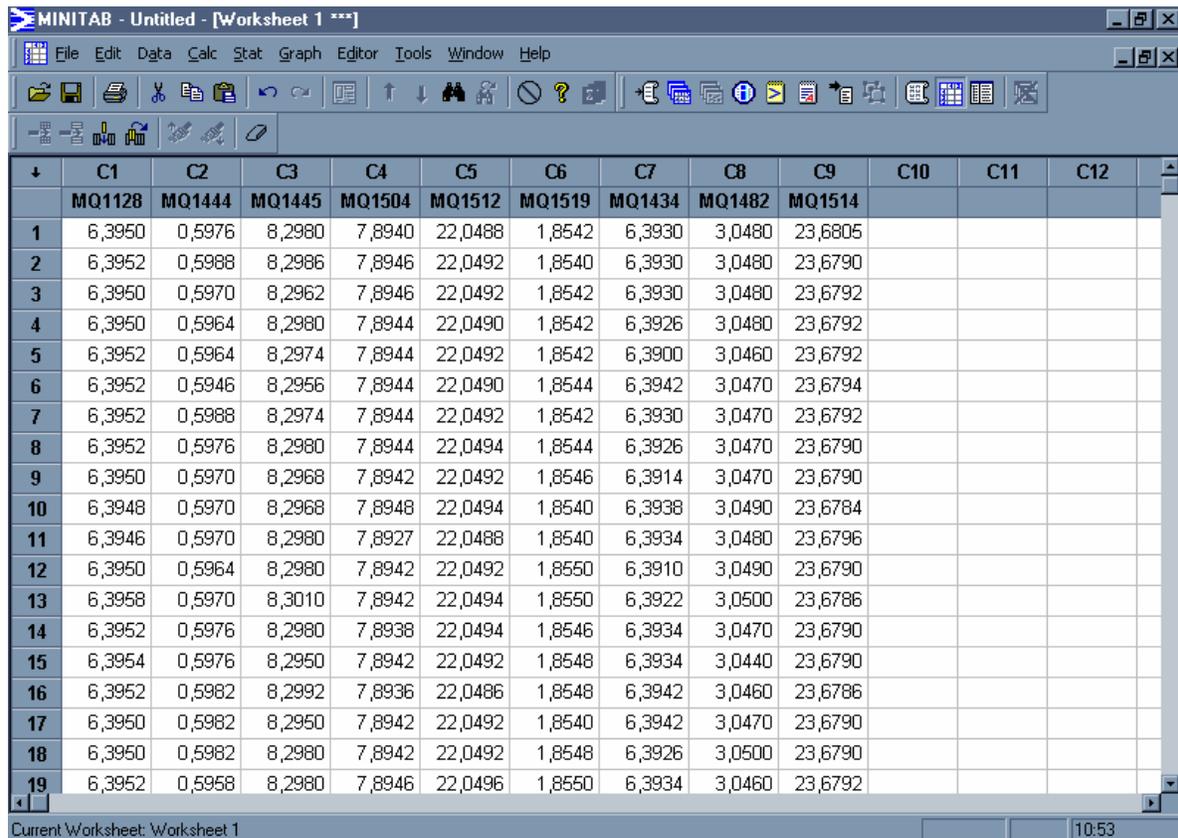
4 - Sair
DATA> 4
MTB >
```

Figura 9: Cálculo dos índices de capacidade multivariados - segunda etapa do programa.

Pela Figura 9 observamos que os limites inferiores de especificação são -3 e -4, os limites superiores são 4 e 5 e as médias de especificação são 0 e 0. Como os limites de especificação não estão centrados no vetor de médias nominais de especificação, calculamos somente o índice de capacidade multivariado  $C_{pm}^m$ . Sendo o índice  $C_{pm}^m = 0,831795$  menor que 1, o processo não é capaz. A macro também apresenta o vetor  $C_{pi}$  com os valores do índice  $C_{pm}^m$  para cada característica de interesse.

## 6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta seção ilustramos um exemplo de aplicação usando dados reais de aviões apresentados no artigo de Niverti e Dey (2000). Os limites inferiores e superiores e as médias de especificação são fornecidos neste artigo. Estamos avaliando 9 características e usando um nível de significância  $\alpha=5$  (em porcentagem) e 10000 simulações. A Figura 10 apresenta a disposição dos dados na planilha e a Figura 11 os resultados.



	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
	MQ1128	MQ1444	MQ1445	MQ1504	MQ1512	MQ1519	MQ1434	MQ1482	MQ1514			
1	6,3950	0,5976	8,2980	7,8940	22,0488	1,8542	6,3930	3,0480	23,6805			
2	6,3952	0,5988	8,2986	7,8946	22,0492	1,8540	6,3930	3,0480	23,6790			
3	6,3950	0,5970	8,2962	7,8946	22,0492	1,8542	6,3930	3,0480	23,6792			
4	6,3950	0,5964	8,2980	7,8944	22,0490	1,8542	6,3926	3,0480	23,6792			
5	6,3952	0,5964	8,2974	7,8944	22,0492	1,8542	6,3900	3,0460	23,6792			
6	6,3952	0,5946	8,2956	7,8944	22,0490	1,8544	6,3942	3,0470	23,6794			
7	6,3952	0,5988	8,2974	7,8944	22,0492	1,8542	6,3930	3,0470	23,6792			
8	6,3952	0,5976	8,2980	7,8944	22,0494	1,8544	6,3926	3,0470	23,6790			
9	6,3950	0,5970	8,2968	7,8942	22,0492	1,8546	6,3914	3,0470	23,6790			
10	6,3948	0,5970	8,2968	7,8948	22,0494	1,8540	6,3938	3,0490	23,6784			
11	6,3946	0,5970	8,2980	7,8927	22,0488	1,8540	6,3934	3,0480	23,6796			
12	6,3950	0,5964	8,2980	7,8942	22,0492	1,8550	6,3910	3,0490	23,6790			
13	6,3958	0,5970	8,3010	7,8942	22,0494	1,8550	6,3922	3,0500	23,6786			
14	6,3952	0,5976	8,2980	7,8938	22,0494	1,8546	6,3934	3,0470	23,6790			
15	6,3954	0,5976	8,2950	7,8942	22,0492	1,8548	6,3934	3,0440	23,6790			
16	6,3952	0,5982	8,2992	7,8936	22,0486	1,8548	6,3942	3,0460	23,6786			
17	6,3950	0,5982	8,2950	7,8942	22,0492	1,8540	6,3942	3,0470	23,6790			
18	6,3950	0,5982	8,2980	7,8942	22,0492	1,8548	6,3926	3,0500	23,6790			
19	6,3952	0,5958	8,2980	7,8946	22,0496	1,8550	6,3934	3,0460	23,6792			

Figura 10: Características dos aviões dispostas na *worksheet* do *Minitab*.

Neste exemplo de aplicação cada característica de interesse possui 50 observações. Na Figura 10 apresentamos as primeiras observações.

```

MTB > %icmpa;
SUBC> dados c1-c9.
Executing from file: C:\Arquivos de programas\MINITAB 14\MACROS\icmpa.MAC
O usuário informou os dados:
PRIMEIRA PARTE : Informações fornecidas pelos dados para o cálculo dos índices de capacidade multivariados

Média dos dados
MED
  6,3951    0,5971    8,2979    7,8942    22,0492    1,8544    6,3932
  3,0468    23,6792

Desvio-padrão dos dados
DP
  0,0002788  0,0011516  0,0011586  0,0004892  0,0003033  0,0003429
  0,0008697  0,0019010  0,0003769

Variância dos dados
VAR
  0,0000001  0,0000013  0,0000013  0,0000002  0,0000001  0,0000001
  0,0000008  0,0000036  0,0000001

Vetor de médias calculadas pelo modelo AR(1)
MD
  6,3951    0,5971    8,2979    7,8942    22,0492    1,8544    6,3932
  3,0468    23,6792

Vetor de parâmetros phi do modelo AR(1)
MP
  0,0118782  0,2424965  -0,1932701  -0,2256669  0,1029317  0,3308603
  0,0849436  0,4350308  0,1954095

Matriz de covariância dos resíduos do modelo AR(1)
Matrix MCOVA
  0,0000001  -0,0000001  0,0000001  0,0000000  -0,0000000  0,0000000
 -0,0000001  0,0000012  0,0000002  0,0000000  0,0000001  -0,0000001
  0,0000001  0,0000002  0,0000013  -0,0000001  0,0000000  0,0000001
  0,0000000  0,0000000  -0,0000001  0,0000002  0,0000000  -0,0000000
 -0,0000000  0,0000001  0,0000000  0,0000000  0,0000001  0,0000000
  0,0000000  -0,0000001  0,0000001  -0,0000000  0,0000000  0,0000001
  0,0000000  0,0000000  0,0000000  -0,0000000  0,0000000  -0,0000000
 -0,0000001  -0,0000000  0,0000001  -0,0000002  -0,0000001  0,0000000
 -0,0000000  0,0000000  -0,0000001  -0,0000000  -0,0000000  -0,0000000

  0,0000000  -0,0000001  -0,0000000
  0,0000000  -0,0000000  0,0000000
  0,0000000  0,0000001  -0,0000001
 -0,0000000  -0,0000002  -0,0000000
  0,0000000  -0,0000001  -0,0000000
 -0,0000000  0,0000000  -0,0000000
  0,0000008  -0,0000004  -0,0000000
 -0,0000004  0,0000029  0,0000001
 -0,0000000  0,0000001  0,0000001

```

Figura 11: Resultados do exemplo de aplicação usando os dados do artigo de Niverthi e Dey (2000).

Continuação da Figura 11

<b>Matriz de covariância cruzada de lag zero</b>							
Matrix MGAMA							
0,0000001	-0,0000001	0,0000001	0,0000000	-0,0000000	0,0000000		
-0,0000001	0,0000013	0,0000002	0,0000000	0,0000001	-0,0000001		
0,0000001	0,0000002	0,0000013	-0,0000001	0,0000000	0,0000001		
0,0000000	0,0000000	-0,0000001	0,0000002	0,0000000	-0,0000000		
-0,0000000	0,0000001	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000000		
0,0000000	-0,0000001	0,0000001	-0,0000000	0,0000000	0,0000001		
0,0000000	0,0000000	0,0000000	-0,0000000	0,0000000	-0,0000000		
-0,0000001	-0,0000000	0,0000001	-0,0000002	-0,0000001	0,0000000		
-0,0000000	0,0000000	-0,0000001	-0,0000000	-0,0000000	-0,0000000		
0,0000000	-0,0000001	-0,0000000					
0,0000000	-0,0000000	0,0000000					
0,0000000	0,0000001	-0,0000001					
-0,0000000	-0,0000002	-0,0000000					
0,0000000	-0,0000001	-0,0000000					
-0,0000000	0,0000000	-0,0000000					
0,0000008	-0,0000004	-0,0000000					
-0,0000004	0,0000036	0,0000001					
-0,0000000	0,0000001	0,0000001					
<b>Matriz de correlação cruzada de lag zero</b>							
Matrix MCORR							
1,00000	-0,19638	0,17658	0,09643	-0,07173	0,28335	0,10203	-0,25501
-0,19638	1,00000	0,15380	0,04438	0,15398	-0,21992	0,04112	-0,00516
0,17658	0,15380	1,00000	-0,17779	0,02710	0,13935	0,01575	0,03982
0,09643	0,04438	-0,17779	1,00000	0,27964	-0,15829	-0,01986	-0,18249
-0,07173	0,15398	0,02710	0,27964	1,00000	0,18086	0,00719	-0,09785
0,28335	-0,21992	0,13935	-0,15829	0,18086	1,00000	-0,13319	0,04140
0,10203	0,04112	0,01575	-0,01986	0,00719	-0,13319	1,00000	-0,24714
-0,25501	-0,00516	0,03982	-0,18249	-0,09785	0,04140	-0,24714	1,00000
-0,30836	0,01034	-0,16531	-0,09239	-0,15750	-0,19180	-0,09619	0,15370
-0,30836							
0,01034							
-0,16531							
-0,09239							
-0,15750							
-0,19180							
-0,09619							
0,15370							
1,00000							
<b>Valor de c rô zero alfa</b>							
CROZALFA 2,74618							
<b>SEGUNDA PARTE: CÁLCULO DOS ÍNDICES DE CAPACIDADE MULTIVARIADOS</b>							
Informe os limites inferiores de especificação:							
IMPORTANTE: O usuário deve entrar com os dados mantendo sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo.							
DATA> 6.393 0.594 8.294 7.892 22.047 1.852 6.390 3.038 23.6770							
Informe os limites superiores de especificação:							
ATENÇÃO: O usuário deve entrar com os dados mantendo sempre a mesma ordem das variáveis envolvidas no processo.							
DATA> 6.397 0.60 8.302 7.896 22.051 1.856 6.396 3.052 23.6810							

Figura 11: Resultados do exemplo de aplicação usando os dados do artigo de Niverthi e Dey (2000).

## Continuação da Figura 11

```
Informe o vetor de médias de especificação.
ATENÇÃO: O usuário deve entrar com os dados mantendo sempre a mesma ordem das
variáveis envolvidas no processo.
DATA> 6.395 0.597 8.298 7.894 22.049 1.854 6.393 3.045 23.679
Escolha o índice de capacidade multivariado que deseja calcular:
1 - Primeiro caso: O vetor de médias do processo é igual ao vetor de
médias de especificação.
Cálculo do índice CPM.
2 - Segundo caso: O processo não está centrado no vetor de médias de
especificação.
Cálculo do índice CPKM.
3 - Terceiro caso: Os limites de especificação não estão centrados no
vetor de médias nominais de especificação.
Cálculo do índice CPMM.
4 - Sair

DATA> 1
Vetor dos índices de capacidade multivariado CP para cada uma das características
de interesse:
CPM
  5,22437  1,89731  2,51428  2,97670  4,80158  4,24129  2,51215
  2,68218  3,85878
Índice de capacidade multivariado - CPM
ID_CPM  1,89731
O processo é capaz.

DATA> 2
Vetor dos índices de capacidade multivariado CPK para cada uma das
características de interesse:
CPK
  0,0006802  0,0010694  0,0014214  0,0006657  0,0006676  0,0005848
  0,0010356  0,0019010  0,0006568
Índice de capacidade multivariado - CPKM
ID_CPKM  0,000584781
O processo não é capaz.

DATA> 3
Vetor dos índices de capacidade multivariado CPI para cada uma das
características de interesse:
CPI
  2,61218  0,94866  1,25714  1,48835  2,40079  2,12064  1,25608
  1,34109  1,92939
Índice de capacidade multivariado - CPMM
ID_CPMM  0,948656
O processo não é capaz.

DATA> 4
MTB >
```

Figura 11: Resultados do exemplo de aplicação usando os dados do artigo de Niverthi e Dey (2000).

Observamos pela Figura 11 que o índice  $C_p^m = 1,89731$  indica que o processo é capaz, e os índices  $C_{pk}^m = 0,000584781$  e  $C_{pm}^m = 0,948656$  indicam que o processo não é capaz.

## **7. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A leitura de artigos da área de controle de qualidade para processos e índices de capacidade multivariados, em especial, os de Kalgonda e Kulkarni (2004) e Mingoti e Glória (2004), possibilitaram a construção de índices de capacidade multivariados para processos autocorrelacionados.

O objetivo deste trabalho foi de apenas apresentar os índices de capacidade e implementá-los no *software Minitab*, não estamos avaliando a qualidade dos índices propostos.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BICALHO, B. de C. D. *Estudo sobre técnicas estatísticas para controle de processos multivariados autocorrelacionados*. Projeto desenvolvido na disciplina Atividade Complementar do curso de Estatística da UFMG – Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

FRANÇA, J. L. *et al. Manual para Normalização de publicações técnico-científicas*. 6. Ed. ver. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2003.

HAYTER, A. J. , TSUI, K-L. (1994). “Identification and quantification in multivariate quality control problems”. *Journal of Quality Technology* 26, pgs. 197-208.

KALGONDA, A. A. , KULKARNI, S. R. (2004). “Multivariate quality control chart for autocorrelated processes”. *Journal of Applied Statistics* 31, pgs. 317-327.

MINGOTI, S. A. , GLÓRIA, F. A. A. (2004). “A modification of chen’s multivariate capability index and a comparison with Niverthi and Dey capability indices”. Artigo submetido à revista internacional (aguardando publicação).

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao controle estatístico da qualidade*. 4ed. LTC, 2004.

MORETTIN, P. A. , TOLOI, C. M. C. *Análise de séries temporais*. 1ed. Edgard Blücher, 2004.

NIVERTHI, M. , DEY, D. K. (2000). "Multivariate process capability a bayesian perspective". *Commu. Statist. - Simula.*, 29(2), pgs. 667-687.