

Modelos de Variáveis Aleatórias Discretas

Inferência- EST187
Denise Duarte

2020/01

Distribuição Uniforme Discreta

X tem distribuição uniforme discreta se cada um dos n valores em sua faixa, (x_1, \dots, x_n) tiver igual probabilidade.

Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x_i) = \frac{1}{n} .$$

Exemplo:

- O primeiro dígito de um número de uma peça é igualmente provável de ser cada um dos números de 0 a 9.
- Uma peça é selecionada aleatoriamente.
- Seja X o primeiro dígito do número da peça.
- X tem uma distribuição uniforme discreta.
- Seus valores possíveis são $R = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
- Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x_i) = 0,1$$

para cada x_i em R .

Média e Variância

Se X tem distribuição uniforme discreta e assume valores $a, a + 1, a + 2, \dots, b$, para $a \leq b$ temos então que:

- A média de X é

$$E(X) = \frac{b + a}{2}$$

- A variância de X é

$$\text{Var}(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}.$$

Exemplo:

- Um sistema de comunicação possui 48 linhas externas.
- Seja X o número de linhas em uso.
- Considere que X é uma variável uniforme discreta, que assume valores de 1 a 48.
- Temos então que

$$E(X) = \frac{(48 + 0)}{2} = 24$$

$$Var(X) = \frac{(48 - 0 + 1)^2 - 1}{12} \quad \sigma = \sqrt{\frac{(48 - 0 + 1)^2 - 1}{12}} = 14,4.$$

Definição

Dizemos que X tem distribuição Bernoulli com parâmetro p , se a função de probabilidade f de X é dada por

$$f(x; p) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1, \\ 1 - p & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Também pode ser expressado como

$$f(k; p) = p^k(1 - p)^{1-k} \quad \text{para } k \in \{0, 1\}.$$

Denotamos por $x \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Média e Variância

O valor esperado de uma variável aleatória de Bernoulli X é $E(X) = p$, e sua variância é

$$\text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Exemplo

Um exemplo clássico de uma experiência de Bernoulli é uma jogada única de uma moeda. A moeda pode dar "coroa" com probabilidade p e "cara" com probabilidade $1 - p$. O experimento é dito "honesto" se $p = 0.5$, indicando a origem dessa terminologia em jogos de aposta (a aposta é justa se ambos os possíveis resultados tem a mesma probabilidade).

Distribuição Binomial

Um experimento aleatório consiste em n tentativas de Bernoulli, de modo que:

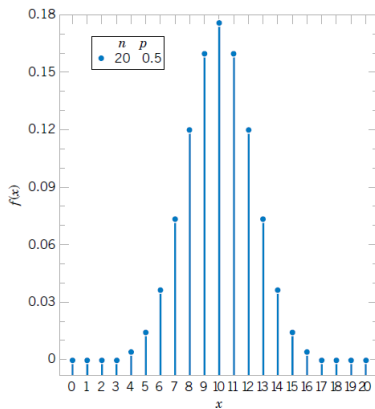
- 1 as tentativas sejam independentes;
- 2 elas resultam em um sucesso ou um falha;
- 3 a probabilidade de sucesso p permanece constante.

A variável X , que conta o número de sucessos, é uma **variável binomial** com parâmetros $0 < p < 1$ e $n = 1, 2, \dots$.

A função de probabilidade de X é dada por

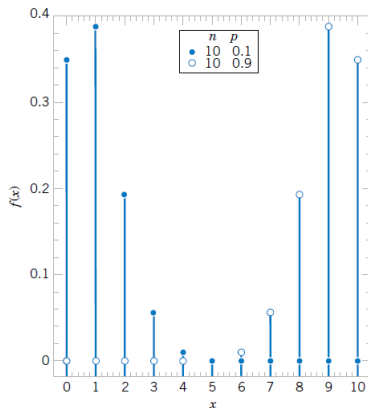
$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} .$$

- A figura abaixo mostra um exemplo de distribuição binomial.



- Para $p = 0,5$ a distribuição é simétrica.

- Abaixo temos um outro exemplo da binomial.



- Para n fixo, a distribuição fica mais assimétrica:
 - quando p fica mais próximo de 0 ou 1.

Exemplo:

- 18 amostras de ar são selecionadas.
- Cada uma tem 10% de chance de conter um poluente orgânico.
- Considere que as amostras sejam independentes.
- Seja X o número de amostras que têm o poluente.
- Qual a probabilidade de exatamente 2 amostras terem o poluente?
- Qual a probabilidade de no mínimo 4 amostras conterem o poluente?

Solução:

Probabilidade de exatamente 2 conterem o poluente.

- X tem distribuição binomial de parâmetros $p = 0,1$ e $n = 18$.
- Logo

$$P(X = 2) = \binom{18}{2} (0,1)^2 (0,9)^{16}$$

- Como

$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{(18)(17)}{2} = 153;$$

temos que

$$P(X = 2) = 153(0,1)^2(0,9)^{16} = 0,284.$$

Média e Variância

Se X for uma variável aleatória binomial parâmetro p e n

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1 - p) .$$

Exemplo:

- Considere novamente o exemplo dos *bits* recebidos com erros.
- X é o número de *bits* recebidos com erro.
- X tem distribuição binomial de parâmetros $p = 0,1$ e $n = 4$;
- Logo

$$E(X) = 4(0,1) = 0,4 \quad \text{Var}(X) = 4(0,1)(0,9) = 0,36.$$

Distribuição Geométrica

- Essa distribuição está muito relacionada com a distribuição Binomial.
- Suponha que temos uma série de tentativas de Bernoulli:
 - independentes e com probabilidade de sucesso constante (p).
- Porém as tentativas não são mais um número fixo.
- Elas são realizadas até que se encontre um sucesso.
- Exemplo: pastilhas são analisadas até que uma partícula grande seja detectada.

Observação:

- X pode ser qualquer número inteiro.
- Podemos ter também $X = 1$, caso a primeira tentativa seja um sucesso.
- Logo X pode assumir os valores $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Distribuição Geométrica

- Considere uma série de tentativas de Bernoulli:
 - tentativas independentes;
 - probabilidade de sucesso constante.
- Seja X o número de tentativas até o primeiro sucesso.
- X é uma variável com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$ e

$$f(x) = (1 - p)^{x-1} p \quad x = 1, 2, \dots$$

- A figura abaixo mostra exemplos de distribuição geométrica para $p = 0,1$ e $p = 0,9$.
- A altura da linha em $x - 1$ é $(1-p)$ vezes altura de x .
- As probabilidades caem em progressão geométrica.

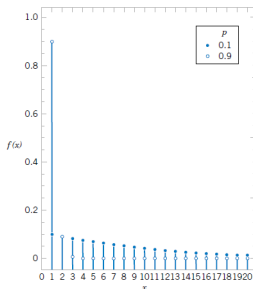


Figure 3-9 Geometric distributions for selected values of the parameter p .

Exemplo:

- Considere uma linha de produção de pastilhas.
- A probabilidade de uma pastilha conter uma partícula grande é 0,01.
- Considere que as pastilhas são independentes.
- Qual a probabilidade de termos que analisar 125 pastilhas até que uma partícula grande seja detectada?

Solução:

- Seja X o número de pastilhas analisadas até que uma partícula grande é detectada.
- X é uma variável aleatória geométrica com $p = 0,01$.
- A probabilidade requerida é

$$P(X = 125) = (0,99)^{124}(0,01) = 0,0029.$$

Média e Variância

Se X for uma variável geométrica com parâmetro p

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

- Quanto menor a probabilidade de sucesso:
 - mais tentativas são esperadas até o primeiro sucesso.

Exemplo:

- Considere o exemplo da transmissão de *bits*.
- Naquele caso X tem distribuição geométrica com $p = 0,1$.
- Temos então que

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10 \quad \text{Var}(X) = \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{0,09}{0,1^2} = 90$$

e o desvio padrão é dado por

$$\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{90} = 9,49.$$

Distribuição Poisson

- Modela a probabilidade de eventos ocorrendo em um período fixo de tempo.
- Exemplo: quantas chamadas chegam a uma central telefônica ao longo de um dia.
- Considera-se que:
 - os eventos ocorrem com uma média conhecida;
 - a ocorrência de eventos em intervalos disjuntos são independentes.

Poisson como aproximação da Binomial

- Seja X uma variável com distribuição Binomial(n,p).
- Quando n é suficientemente grande e p é bem pequeno, defina

$$\lambda = np .$$

- A função de probabilidade de X pode ser aproximada por

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} .$$

- Essa é a função de probabilidade da Poisson.

Exemplo:

- Falhas ocorrem ao acaso ao longo do comprimento de um fio de cobre.
- Seja X o número de falhas em um comprimento de L milímetros.
- O número médio de falhas em L milímetros é λ .
- Vamos encontrar a distribuição de X .

Exemplo: (continuação)

- Parta o fio em n subintervalos.
- Se o intervalo é bem pequeno:
 - a probabilidade de duas falhas no mesmo intervalo é bem próxima de zero.
- Como as falhas não tem probabilidade maior de ocorrer em uma parte do fio:
 - a probabilidade de cada subintervalo conter uma falha é constante p .
- Supomos que a probabilidade de um intervalo conter uma falha é independente dos demais.
- X tem distribuição Binomial(n,p).

- Temos que

$$E(X) = \lambda = np$$

de onde obtemos que

$$p = \lambda/n.$$

- A probabilidade de que um intervalo contenha uma falha é $p = \lambda/n$.
- Se os intervalos são muito pequenos:
 - n é grande e p é pequeno.
- E portanto X tem distribuição Poisson com média λ .

Exemplo

Considere um processo que têm uma taxa de 0,2 defeitos por unidade. Qual a probabilidade de uma unidade qualquer apresentar:

- a) dois defeitos?
- b) um defeito?
- c) zero defeito?

Solução: Neste caso, temos que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ com $\lambda = 0,2$. Então

$$\text{a) } \mathbb{P}(X = 2) = \frac{e^{-0,2}(0,2)^2}{2!} = 0,0164;$$

$$\text{b) } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{e^{-0,2}(0,2)^1}{1!} = 0,1637;$$

$$\text{c) } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{e^{-0,2}(0,2)^0}{0!} = 0,8187.$$

Exemplo

Suponha que uma aplicação de tinta em um automóvel é feita de forma mecânica, e pode produzir defeitos de fabricação, como bolhas ou áreas mal pintadas, de acordo com uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 1$. Suponha que sorteamos um carro ao acaso para que sua pintura seja inspecionada, qual a probabilidade de encontrarmos, pelo menos, 1 defeito? E qual a probabilidade de encontrarmos de 2 a 4 defeitos?

A probabilidade de encontrarmos pelo menos um defeito é dada por:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \frac{e^{-1}1^0}{0!} = 1 - e^{-1} \approx 0,63212.$$

Já a probabilidade de encontrarmos entre 2 e 4 defeitos é de

$$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = \frac{e^{-1}1^2}{2!} + \frac{e^{-1}1^3}{3!} + \frac{e^{-1}1^4}{4!}$$