Modelos Contínuos

Inferência EST187
Profa. Denise Duarte

2020/01

- É análoga à distribuição uniforme discreta.

Distribuição Contínua Uniforme

X é uma variável aleatória contínua com distribuição uniforme.
A função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b\,.$$

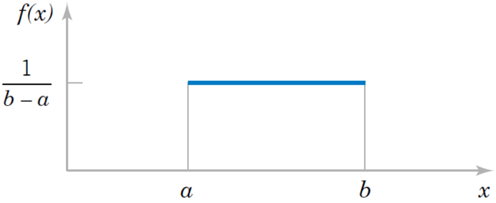

Figure 4-8 Continuous uniform probability density function.

Média e Variância

Se X é uma variável contínua uniforme no inter valo $[a, b]$

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemplo:

- Seja X a corrente medida em um fio de cobre.
- X é medida em miliampéres.
- A variável assume valores no intervalo $[0, 20mA]$.
- X tem distribuição contínua uniforme

$$f(x) = 0,05 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 20\,.$$

- Qual a probabilidade da corrente estar entre 5 e 10 miliampéres?

Exemplo: (solução)

- A probabilidade requerida é

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} f(x)dx = 5(0,05) = 0,25\,.$$

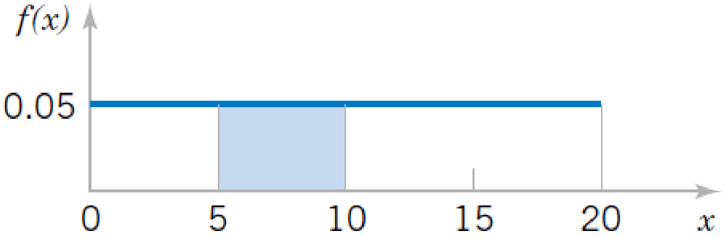

Figure 4-9 Probability for Example 4-9.

Exemplo: (continuação)

- Podemos calcular o valor esperado e a variância da corrente.

$$E(X) = \frac{(a+b)}{2} = \frac{(20+0)}{2} = 10 \quad mA$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-0)^2}{12} = 33,33 \quad mA^2.$$

- Logo o desvio padrão é

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{33,33} = 5,77 \quad mA\,.$$

Distribuição Normal

- A distribuição normal é muito importante.
- Ela aproxima a distribuição de várias outras variáveis aleatórias.
- Suponha que o erro no comprimento de uma peça seja a soma de vários erros infinitesimais:
  - pulso na temperatura, vibração, desgaste.
- Considere que os erros são independentes e têm a mesma probabilidade de serem positivos ou negativos.
- Pode-se mostrar que o erro terá uma distribuição normal aproximada.

Distribuição Normal

- Seja X uma variável aleatória com distribuição normal.
- Os parâmetros dessa distribuição são μ e σ^2.
- A função de densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

em que $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

- Temos também que

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2 \,.$$

- A notação é

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \,.$$

Algumas propriedades da função de densidade da normal

- $f(x)$ é simétrica em relação a μ.
- $f(x) \to 0$ quanto $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.
- $f(x)$ atinge seu máximo quando $x = \mu$.

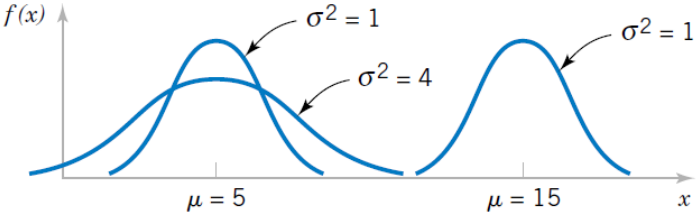

Figure 4-10 Normal probability density functions for selected values of the parameters μ and σ^2.

Exemplo:

- Seja X a corrente em um fio de cobre.
- Suponha que X siga uma distribuição Normal com média 10 mA e variância 4.
- Qual a probabilidade de X exceder 13 mA?

Exemplo: (solução)

- A probabilidade requerida é

$$P(X > 13) \,.$$

- Essa probabilidade é mostrada na área da figura abaixo.
- Não há uma expressão exata para a integral de uma densidade normal.
- Essa probabilidade pode ser encontrada numericamente ou usando uma tabela (veremos adiante).

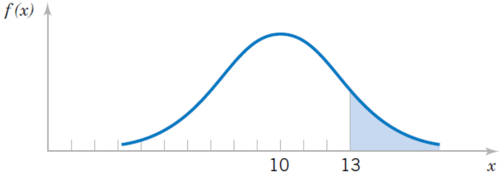

Figure 4-11 Probability that $X > 13$ for a normal random variable with $\mu = 10$ and $\sigma^2 = 4$.

Distribuição Exponencial

- Seja X a distância entre contagens em um Processo de Poisson.
- Considere que a média desse processo é $\lambda > 0$.
- X é então uma variável aleatória exponencial com parâmetro λ.
- A função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{para} \quad 0 \leq x < \infty \, .$$

- A distribuição Exponencial tem esse nome por causa da função exponencial que a aparece em sua densidade.
- Veja abaixo gráficos da distribuição exponencial para alguns valores de λ.

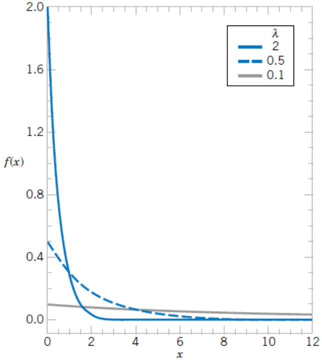

Figure 4-22 Probability density function of exponential random variables for selected values of λ.

Média e Variância

- Seja X uma variável aleatória com distribuição exponencial de parâmetro λ.
- Temos então que

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Exemplo:

- Considere uma rede de usuários de computadores.
- As conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas por um Processo de Poisson.
- A média desse processo é de 25 conexões por hora.
- Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

Exemplo: (solução)

- Seja X o tempo em horas até a primeira conexão.
- X tem distribuição exponencial com $\lambda = 25$ conexões por hora.
- Queremos saber a probabilidade de X exceder 6 minutos.
- λ é dado em conexões por hora.
- Precisamos expressar as unidades de tempo em horas

$$6 \text{ minutos} = \ 0{,}1 \text{ horas} .$$

- A probabilidade requerida é

$$P(X > 0,1) = \int_{0,1}^{\infty} 25e^{-25x} = e^{-25(0,1)} = 0,082 .$$

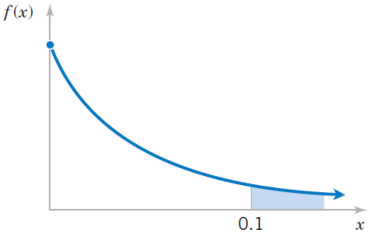

Figure 4-23 Probability for the exponential distribution in Example 4-21.