Conceitos Básicos de Inferência
Inferência EST 187

Denise Duarte

2020/01

Definição

Parâmetro: *um parâmetro é uma medida usada para descrever uma característica da população.*

Exemplos

Seja $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. *Então, são exemplos de parâmetros:*

1. $\mu = E(X)$;
2. $\{\theta : P(X < \theta) = \alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$;
3. $\sigma^2 = V(X)$;
4. $\sigma = \sqrt{V(X)}$;

Definição

Estatística: *Uma estatística é uma função de variáveis aleatórias observáveis, que por sua vez também é uma variável aleatória, e que não depende de parâmetros desconhecidos;*

Exemplos

São estatísticas:

1. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ *(Média Amostral);*
2. $X^* = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$;
3. $W = \log\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - 5$

Exemplos de Estatísticas

O vetor $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ representa as observações ordenadas e é chamado de estatística de ordem, uma função $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$.

Vários outros exemplos de estatísticas de ordem são importantes. As variáveis $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$, por exemplo, são por definição, o mínimo e máximo valor obtido na amostra, respectivamente, e podem ser representados alternativamente pela seguinte notação:

$$X_{(1)} = Min(X_1, \ldots, x_n) \text{ e } X_{(n)} = Max(X_1, \ldots, x_n).$$

Exemplos de Estatísticas

Um exemplo de estatística de ordem muito usada para resumir e representar os dados como uma medida de tendência central é a mediana:

$$X_{(\text{mediana})} = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{se n é impar} \\ \frac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right] & \text{se n é par} \end{cases}$$

Uma outra estatística de ordem de grande utilidade é a amplitude da amostra, definida por $R = |X_{(n)} - X_{(1)}|$.

Exemplos de Estatísticas

Para exemplificar, suponhamos que uma amostra de tamanho n $= 5$ de uma v.a. X resultou nos valores: 31, 28, 27, 32 e 36. Assim, as estatísticas de ordem são $X_{(1)} = 27$, $X_{(2)} = 28$, $X_{(3)} = 31$, $X_{(4)} = 32$ e $X_{(5)} = 36$. Temos que $R = 36 - 27 = 9$ e a mediana é $X_{(3)} = 31$.

Definição

Variância Amostral: *Seja* $X_1, ..., X_n$ *uma a.a. de uma população* $f(\cdot)$. *Então*

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad n > 1 \tag{1}$$

é definida como variância amostral.

Definição

Momentos Amostrais: *Seja $X_1, ..., X_n$ uma a.a. de uma população $f(\cdot)$. Então o r-ésimo momento amostral, denotado por M_r, e o r-ésimo momento amostral central, denotado por M'_r, são respectivamente definidos como*

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r \tag{2}$$

e

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^r. \tag{3}$$

Obervação

Os momentos amostrais são exemplos de estatísticas.

Definição

Momentos Populacionais: *Seja X uma a.a. Então o r-ésimo momento populacional, denotado por μ_r, e o r-ésimo momento populacional central, denotado por μ'_r, são respectivamente definidos como*

$$\mu_r = E[X^r] \tag{4}$$

e

$$\mu'_r = E[(X - \mu)^r]. \tag{5}$$

Obervação

Os momentos populacionais são exemplos de parâmetros.

Exemplos

Não são estatísticas:

1. $Z = \dfrac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$, μ *e* σ *desconhecidos;*
2. $Q = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, σ *desconhecido;*
3. $S = exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i\right\}$, λ *desconhecido;*
4. $W = \log\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - \theta$, θ *desconhecido;*

Um **Estimador** é uma estatística, portanto, uma variável aleatória. Logo existe uma distribuição de probabilidades associada a um estimador.

Nosso objetivo é propor estatísticas que sejam "bons"estimadores, no sentido de estarem "perto"do valor do parâmetro de alguma forma que possamos medir, relacionada à distribuição de probabilidades do estimador.

Definição

Amostra aleatória: *Sejam* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *v.a.'s com densidade conjunta* $f_{X_1,X_2,\cdots X_n}(\cdot, \cdots, \cdot)$ *tal que*

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n), \tag{6}$$

em que $f(\cdot)$ *é a f.d.p. (ou f.m.p) de cada* X_i*. Então dizemos que* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *é uma amostra aleatória (a.a.) de tamanho n de uma população com f.d.p. (ou f.m.p.)* $f(\cdot)$*.*

Definição

Distribuição da Amostra: *Seja* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *uma amostra de tamanho n de uma população* $f(\cdot)$*. A distribuição da amostra* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *é definida como a distribuição conjunta de* $X_1, X_2, \cdots X_n$

Exemplo

Suponha que X é uma v.a. que pode assumir apenas os valores 1 e 0, com probabilidades p e $q = 1 - p$, respectivamente. Então $X \sim Bernoulli(p)$ e

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}. \tag{7}$$

Logo, a distribuição de uma amostra aleatória de tamanho $n = 2$ de $f(\cdot)$ é dada por

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = p^{x_1+x_2}(1-p)^{2-x_1-x_2}. \tag{8}$$