

Teorema Central do Limite Inferência - EST187

Denise Duarte DEST-UFMG

2020/01

Função Geradora de Momentos

Definição

Seja X uma v.a. associada a uma população $f_X(\cdot)$. O valor esperado de e^{tX} é definido como a função geradora de momentos da v.a. X se tal valor esperado existir para todo t em um intervalo $-h < t < h$, $h > 0$. A função geradora de momentos, denotada por $m_X(t)$, é

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \quad (1)$$

se X é uma v.a. contínua, e

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx} f_X(x) \quad (2)$$

se X é uma v.a. discreta.

Propriedades

- 1 Se $m_X(t)$ existir, então $m_X(t)$ será contínua e diferenciável em uma vizinhança de 0.
- 2 Os momentos de ordem r de $f_X(\cdot)$ podem ser obtidos da seguinte forma

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(0) = E(X^r) = \mu_r. \quad (3)$$

- 3 Sejam X e Y duas v.a.'s. Se $m_X(t) = m_Y(t)$ então X e Y tem a mesma distribuição. Em outras palavras, a função geradora de momentos determina a distribuição de uma v.a. X .
- 4 A FGM da soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das FGM de cada uma delas. $m_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = m_{X_1}(t) \times m_{X_2}(t) \dots \times m_{X_n}(t)$.

Exemplo (Distribuição exponencial)

Seja $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, com $f(x|\lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$, para $x > 0$ e $\lambda > 0$. Então

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad |t| \leq \lambda. \quad (4)$$

Exemplo (Distribuição gama)

Seja $X \sim G(\alpha, \lambda)$, com $f(x|\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\lambda x\}$, para $x > 0$, $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$. Então

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha, \quad |t| \leq \lambda. \quad (5)$$

Exemplo (Distribuição normal)

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, com $f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$, para $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma^2 > 0$. Então

$$m_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}(t\sigma)^2\right\}, \quad t \in \mathfrak{R}. \quad (6)$$

Exemplo (Distribuição $\chi(\nu)$)

Seja $X \sim \chi(\nu)$, com $f(x) = \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}x\right\}$, para $x > 0$ e $\nu > 0$.
Então

$$m_X(t) = \left(\frac{1/2}{1/2-t}\right)^{\nu/2}, \quad |t| \leq 1/2. \quad (7)$$

Função Característica (Transformada de Fourier)

Seja X uma variável aleatória. Então a função característica (transformada de Fourier) de X é uma função $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{(itx)} dF_X(x) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i \mathbb{E}(\sin(tX)).$$

Se uma família finita de variáveis aleatórias $X_1 \cdots X_n$ são independentes e $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, então

$$\varphi_{S_n} = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}$$

Se $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ para algum $n \geq 1$, então φ_X temos que:

$$\varphi_X^k(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$$

Teorema (Teorema Central do Limite)

Seja $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, X_i com média μ e variância σ^2 finitas. Definimos $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, então

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1).$$

ou equivalentemente,

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Esboço da prova

Primeiramente, vamos supor que X_n tem média zero ($\mu = 0$), e, portanto, $Z_n = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$. Podemos supor este fato sem perda de generalidade, pois se $\mu \neq 0$, definimos $Y_n = X_n - \mu$. Basta mostrarmos que:

$$\varphi_{Z_n} = \varphi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}, n \rightarrow \infty, \forall t \in \mathbb{R},$$

que é a função característica da $Normal(0, 1)$.

Observamos que

$$\varphi_{S_n/\sigma\sqrt{n}}(t) = \varphi_{S_n} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) = \left(\varphi_{X_1} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n,$$

Desta forma, utilizando da formula de Taylor, temos que

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + o(t),$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} o(t) = 0$. Por isso, para cada t fixo,

Como $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = i\mu = 0$ e $\varphi''(0) = i^2\mathbb{E}[X_1^2] = -\mathbb{E}[X_1^2] = -\sigma^2$.

Assim, temos que

$$\varphi(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t),$$

agora avaliando no ponto $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$ fica

$$\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

ou seja,

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n,$$

como $\left(1 - \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^{-c}$ e $o\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Tomando $c = \frac{t^2}{2}$ segue que

$$(\varphi_{Z_n})^n \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

que é a Função Característica da *Normal*(0, 1).

- Considere uma população em que a proporção de elementos portadores de uma determinada característica é p ;
- Tal população pode ser representada pela variável aleatória X tal que

$$X = \begin{cases} 1, & \text{o elemento é portador da característica;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (8)$$

- Pode ser mostrado que

$$E(X) = p \quad (9)$$

e

$$V(X) = p(1 - p); \quad (10)$$

- Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma a.a. de X ;
- Defina \hat{p} como a proporção de elementos da amostra portadores da característica de interesse, isto é,

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i; \quad (11)$$

- Logo, pelo TCL, temos que

$$\hat{p} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right) \quad (12)$$

Exemplo

- Um distribuidor de sementes determina através de testes que 5% das suas sementes não germinam. Ele vende pacotes com 200 sementes com garantia de 90% de germinação. Qual a probabilidade de um pacote não satisfazer a garantia?

Solução

- seja X a variável aleatória tal que

$$X = \begin{cases} 1, & \text{a semente não germina;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- logo, segue que $E(X) = 0,05$ e $V(X) = 0,05 \times 0,95 = 0.0475$;
- usando o TCL, a probabilidade desejada é dada por

$$P(\hat{p} > 0,1) \approx P\left(\frac{\hat{p} - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{200}}} > \frac{0,1 - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05 \times 0,95}{200}}}\right) = P(Z > 3,24) = 0,000588433$$