

Matrizes

Roteiro

1. Manipulação de Matrizes e Vetores
2. Operações com Matrizes
3. Álgebra Matricial
4. Diagonalização de Matrizes
5. Referências



Manipulação Matrizes e Vetores

Matrizes e Vetores

- O Minitab trabalha com os seguintes objetos:

- ✓ Números: armazenados nas constantes ($K + n^o$)

Numeração até 1.000 constantes

- ✓ Vetores: armazenados nas colunas ($C + n^o$)

Numeração até 4.000 colunas

- ✓ Matrizes: blocos de células ($M + n^o$)

Numeração até 100 matrizes



Construção de Matrizes

- Construir a matriz:

$$M1 = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 12 & -10 \\ 4 & 4 & 10 & -12 \end{bmatrix}$$

- Digitação pelo teclado:

- ✓ Editor > Enable Commands

```
MTB > Read 4 4 M1
DATA> 16 4 -8 4
DATA> 4 10 8 -4
DATA> 8 8 12 -10
DATA> 4 4 10 -12
4 rows read.
```

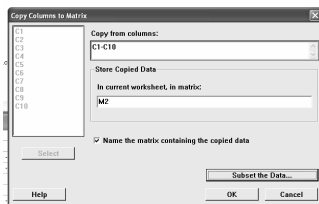


Matrizes a partir de Colunas

- Carregue no Minitab a planilha: A (arquivo *matrizes.xls*).

- Crie a matriz M2:

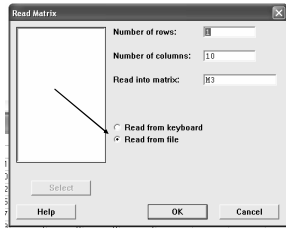
Data > Copy > Columns to matrix →



Carregando Matrizes de Arquivos

- Faça o download do arquivo *be.txt*

Calc > Matrizes > Read →



Selecione o caminho até o arquivo

Visualização das Matrizes

MTB > print m1 - m3

Data Display

Matrix M1

```
16  4  -8  4
 4 10  8 -4
 8  8 12 -10
 4  4 10 -12
```

Matrix Copy

```
2  1  7  4  -3  -1  4  4  7  0
4  2  2  3  -2  0  3  3  4  1
3  4  4  2  1  -2  2  1  9 -3
9  3  5  1  0  5  6  -5 -3  4
2  0  7  0  -5  7  1  0  -1  6
1  9  8  0  3  9  9  0  0  5
4  1  9  0  4  3  7  -4  1  3
6  3  1  1  6  8  3  3  0  2
6  5  0  -7  7  -7  6  2  -6  1
1  6  3  4  8  3  -5  0  -6  0
```

Matrix M3

```
86 45 52,5 108 66,5 90,5 139 61 -43,5 31
```

Transposição de Matrizes

- Através de:
√ Editor > Enable Commands

```
MTB > Transpose M1 M7
MTB > Print M7
```

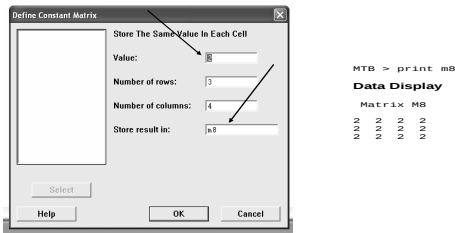
Data Display

Matrix transposta

```
16  4  8  4
 4 10  8  4
-8  8 12 10
 4 -4 -10 -12
```

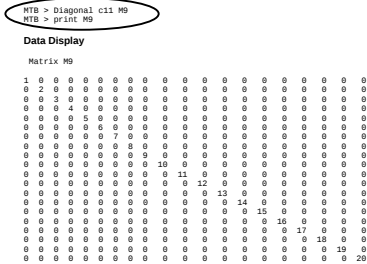
Matriz Constante

- Através de:
Calc > Matrizes > Define Constant →



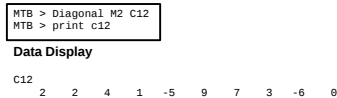
Matriz Diagonal

- Construção de matriz a partir de sua diagonal:
 - ✓ Numerar uma coluna de 1 a 20:
 - ✓ Editor > Enable Commands



Diagonal

- Obter diagonal de matriz
 - ✓ Editor > Enable Command



Operações com Matrizes

Soma de Matrizes

- É possível apenas para matrizes de mesma dimensão:

Ex. Somar M1 com sua transposta ($M1^t$)

```
MTB > Add M1 transposta M9
MTB > Name M9 Soma
MTB > Print Soma

Data Display

Matrix soma

32  8  0  8
 8 20 16  0
 0 16 24  0
 8  0  0 -24
```

Comando válido também para colunas e constantes



Subtração de Matrizes

- É possível apenas para matrizes de mesma dimensão:

Ex. Subtrair M1 de sua transposta ($M1^t$)

```
MTB > Subtract M1 transposta M10
MTB > Name M10 Delta
MTB > print Delta

Data Display

Matrix Delta

 0  0 16  0
 0  0  0  8
-16  0  0 20
 0 -8 -20  0
```

Comando válido também para colunas e constantes



Multiplicação de Matrizes

- Operação permitida apenas se o número de colunas da matriz da esquerda é igual ao número de linhas da matriz da direita.
- Obter o produto de A.B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

```
MTB > Read 2 3 M10
DATA> 1 2 4;
DATA> 2 6 0
2 rows read.
```

```
MTB > Read 3 4 M11
DATA> 4 1 4 3
DATA> 0 -1 3 1
DATA> 2 7 5 2
3 rows read.
```

```
MTB > Multiply M10 M11 M12
MTB > Print M12
```

Data Display

```
Matrix M12
12 27 30 13
8 -4 26 12
```

Inversão de Matrizes

- Operação possível apenas para matrizes quadradas
- Nem todas as matrizes quadradas possuem inversa.
- Inversão da matriz M1

```
MTB > Invert M1 M5.
MTB > Name M5 'inversa'
MTB > Print inversa
```

Data Display

```
Matrix inversa
0,0271739 -0,112319 0,177536 -0,101449
0,0326087 0,231884 -0,253623 0,144928
-0,0760870 -0,152174 0,369565 -0,282609
-0,0434783 -0,086957 0,282609 -0,304348
```

- O produto da matriz por sua inversa (ou vice-versa) é a matriz identidade.

```
MTB > Multiply M1 inversa m20
MTB > print m20
```

Data Display

```
Matrix M20
1 -0 -0 0
0 1 0 0
0 -0 1 0
0 0 0 1
```

Álgebra Matricial

Sistemas Lineares

- Matrizes são ferramentas importantes na solução de sistemas lineares.
- Ex.: Resolva o sistema abaixo:

$$16X_1 + 4X_2 - 8X_3 + 4X_4 = 32$$

$$4X_1 + 10X_2 + 8X_3 - 4X_4 = 26$$

$$8X_1 + 8X_2 + 12X_3 - 10X_4 = 38$$

$$4X_1 + 4X_2 + 10X_3 - 12X_4 = 30$$



- O sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 12 & -10 \\ 4 & 4 & 10 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{bmatrix}$$

- E sua solução é obtida por:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & 12 & -10 \\ 4 & 4 & 10 & -12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Se existir a inversa



- O resultado será um vetor de tamanho 4:
 (X_1, X_2, X_3, X_4)
- Podemos usar colunas. Digite em uma coluna o vetor (32, 26, 38, 30)
- E faça a operação $(M1)^{-1} \times \text{coluna} = \text{solução}$

```
MTB > Multiply inversa c14 c15
MTB > Print c15
```

Data Display

```
C15
1,65217    1,78261    -0,82609    -2,04348
```

Exercício 1 – Solução de Sistema Linear

Resolva a seguinte equação matricial:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$, onde:

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10})$

A: planilha A do arquivo *matrizes.xls*

B: arquivo *be.txt*

<ftp://ftp.est.ufmg.br/pub/lupercio/be.txt>

Solução

```
MTB > Inverse m2 m6
MTB > Transpose m3 c16
MTB > Multiply m6 c16 c17
MTB > Print c17
```

Data Display

```
C17
3,0    -4,5    7,0    8,0    3,5    2,0    4,0    -3,5    2,0    1,5
```

Regressão Múltipla

- Predizer valores de uma variável dependente (Y) em função de variáveis independentes ($X_1, X_2, \dots, X_k$).
- Conhecer o quanto as variações de X_j ($j = 1, \dots, k$) podem afetar Y .



Exemplo– Rede de Lanchonetes

- Modelo para explicar receita total em cadeia de lanchonete
- Semanalmente decide-se:
 - ✓ quanto gastar com propaganda e
 - ✓ quais promoções (preços mais baixos) serão implementadas
- Dados: planilha *lanchonete*
- Fonte: Hill



Exemplo 5 – Rede de Lanchonetes

- Despesas de propaganda:
 - ✓ Aumento despesas gera aumento na receita?
 - ✓ Aumento de receita é suficiente para justificar despesas?
 - ✓ Redução de preços leva a aumento ou diminuição de receita total?



Exemplo 5 – Rede de Lanchonetes

- Promoções:

- ✓ Redução de preços leva a aumento ou diminuição de receita total?

- ✓ Situações a ser verificadas:

Redução de preços	→	Pequeno aumento das vendas	Demanda <u>inelástica</u> em relação ao preço
-------------------	---	----------------------------	---

Redução de preços	→	Grande aumento das vendas	Demanda <u>elástica</u> em relação ao preço
-------------------	---	---------------------------	---



Modelo Econômico

$$E(RT) = b_0 + b_1p + b_2a$$

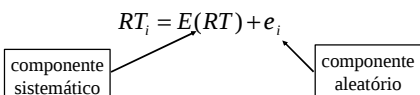
- RT : receita total (\$ mil)
- p : preço médio de todos os produtos
- a : nível de despesas com propaganda (\$ mil)
- Comportamento esperado (ou médio) de muitos pontos de venda distintos
- Componente sistemático



Modelo Econométrico

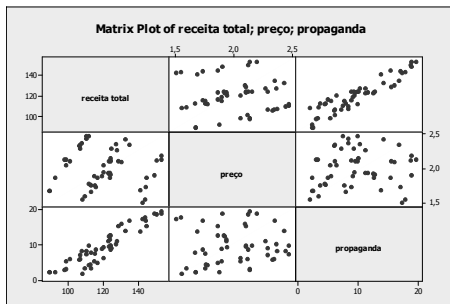
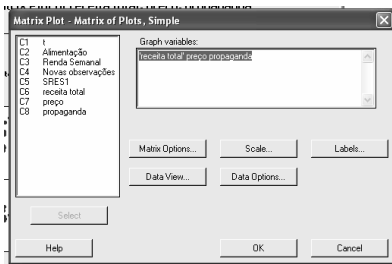
$$RT_i = b_0 + b_1p_i + b_2a_i + e_i$$

- Incorpora o termo de erro aleatório
- e : todos os fatores que fazem a receita total da semana diferir de seu valor esperado (condições meteorológicas, comportamento dos concorrentes, etc.)



Análise Exploratória

Graph > Matrix Plot > Matrix of plots: Simple →



Correlations: receita total; preço; propaganda

	receita total	preço
preço	-0,614 0,925	
propaganda	0,925 0,000	0,101 0,474

Estimativa de Mínimos Quadrados Ordinários para 2 Variáveis

- Minimização da soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e seu valor esperado

$$S(b_0, b_1, b_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - E(Y_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2})^2$$

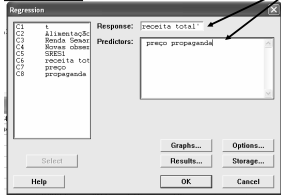
- Os estimadores de mínimos quadrados são obtidos através das derivadas de S em relação a β_0 , β_1 e β_2 .

✓ Os cálculos não são triviais

Cálculo das EMQO

- Na prática, usam-se pacotes computacionais para calcular as estimativas de mínimos quadrados (EMQO)
- No Minitab, o caminho é o mesmo:

Stat > Regression > Regression →



Lanchonetes – Regressão Ajustada

Regression Analysis: receita total versus preço; propaganda

The regression equation is
receita total = 105 - 6,64 preço + 2,98 propaganda

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	104,786	6,483	16,16	0,000
preço	-6,642	3,191	-2,08	0,043
propaganda	2,9843	0,1669	17,88	0,000

S = 6,06961 R-Sq = 86,7% R-Sq(adj) = 86,2%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	2	11776,2	5888,1	159,83	0,000
Residual Error	49	1805,2	36,8		
Total	51	13581,4			

O vetor de coeficientes é: $\hat{b} = (104,78; -6,64; 2,98)$

Notação Matricial – Regressão Múltipla

$$\begin{pmatrix} 123,1 \\ 124,3 \\ \dots \\ 124,6 \\ 127,2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1,92 & 12,4 \\ 1 & 2,15 & 9,9 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2,29 & 9,2 \\ 1 & 2,36 & 10,2 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de dados}} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$$

$$Y = Xb + e$$

Estimador de Mínimos Quadrados

$$Y = Xb + e$$

Estimador de mínimos quadrados de β , isto é, o vetor que minimiza a função

$$L(\beta) = \epsilon' \epsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta) :$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$
$$\hat{b} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_k)$$



- Carregue os dados no Minitab:

✓ Insira uma coluna antes da variável preço

Editor > Insert Columns

✓ Preencha-a com 1's:

Calc > Make Patterned Data > Simple Set of Numbers →

First value: 1

Last value: 1

In steps of: 1

List each value: 52 times

- Crie a matriz de dados (X)

```
MTB > Copy C2-C4 M10
MTB > name M10 'Dados'
```



- O vetor dos coeficientes é dado por:

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

- O cálculo matricial é facilmente alcançado:

```
MTB > Transpose dados 'transposta'
MTB > Multiply transposta dados M3
MTB > Inverse M3 M4
MTB > Multiply M4 transposta M5
MTB > Multiply M5 'receita total' C5
MTB > Print C5
```

Data Display

```
C5
104,786    -6,642    2,984
```



Matriz de Variâncias e Covariâncias

- Para o caso de duas variáveis explicativas:

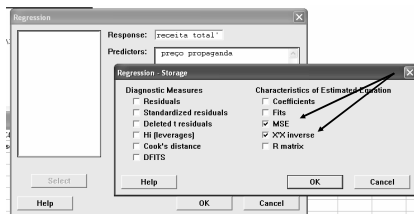
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{b}_0) & \text{Cov}(\hat{b}_0, \hat{b}_1) & \text{Cov}(\hat{b}_0, \hat{b}_2) \\ \text{Cov}(\hat{b}_0, \hat{b}_1) & \text{Var}(\hat{b}_1) & \text{Cov}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) \\ \text{Cov}(\hat{b}_0, \hat{b}_2) & \text{Cov}(\hat{b}_1, \hat{b}_2) & \text{Var}(\hat{b}_2) \end{bmatrix}$$

4

Cálculo no Minitab

- O Minitab, não apresenta a matriz de variância e covariância em sua saída
- Para seu cálculo:

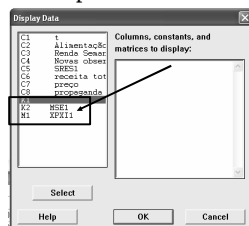
Stat > Regression > Regression →



4

- Serão armazenados uma matriz de resultados $(X'X)^{-1}$ e uma constante (MSE)
- No Minitab, matriz é identificada com a letra M e constante com a letra K .
- Os resultados armazenados podem ser verificados em:

Data > Display Data →



4

Variâncias e Covariâncias – Lanchonetes

- Para se obter a matriz de variâncias e covariâncias, basta se multiplicar o *MSE* (constante) por $(X'X)^{-1}$ (matriz)

```
MTB > Multiply K2 M1 M2
MTB > Print M2

Data Display

Matrix M2

42,0256  -19,8631  -0,161109
-19,8631  10,1837  -0,054021
-0,1611  -0,0540  0,027868
```

Variâncias dos *EMQO* – Lanchonetes

	42,026
	10,184
	0,02787

Exercício 2 – Ajuste de Regressão

- Para o banco de dados abaixo, determine:
 - ✓ Faça um *matrix plot*, relacionando todas as variáveis
 - ✓ Faça um regressão linear múltipla dos dados e determine a estimativa de mínimos quadrados através da relação matricial: $\beta = (X'X)^{-1}X'Y$
 - ✓ Construir a matriz de variâncias e covariâncias do vetor de coeficientes
 - ✓ Dados: delivery_time_data.txt
ftp://ftp.est.ufmg.br/pub/lupercio/delivery_time_data.txt

- *Delivery Time Summary:*

A soft drink otter is analysing the vending machine service routes in his distribution system. He is interested in predicting the amount of time required by the route driver to service the vending machines in an outlet. This service activity includes stocking the machine with beverage products and minor maintenance or housekeeping. The industrial engineer responsible for the study has suggested that the two most important variables affecting the delivery time are the number of cases of product stocked and the distance walked by the route driver.

Obs : observation

Del_Tim: delivery time (minutes)

NCases : numer of cases of product stocked

Dist : distance walked by the route driver (feet)



Solução

- Inserido coluna de 1's em C2

Y: *Del_Tim* em C1

Explicativas: *NCases*, em C3 e *Dist*, em C4.

- Cálculos para obter o vetor de coeficientes

```
MTB > Copy C2-c4 M1
MTB > Name M1 'Xis'
MTB > Transpose Xis M2
MTB > Name M2 'transposta'
MTB > Multiply transposta xis M3
MTB > Inverse M3 M4
MTB > Multiply M4 transposta M5
MTB > Multiply M5 C1 C5

MTB > print c5
```

Data Display

C5
2,34123 1,61591 0,01438



- Para obter a matriz de variâncias e covariâncias é necessário ajustar a regressão
- $\sqrt{\text{MSE}}$ está armazenado em MSE1 e $(X'X)^{-1}$ em XPXI1

Verificar em *Data > Display Data*

```
MTB > Multiply MSE1 XPXI1 M10
MTB > print m10
```

Data Display

Matrix M10

1,20282	-0,0472626	-0,0008890
-0,04726	0,0291504	-0,0005084
-0,00089	-0,0005084	0,0000131

Matriz de Variâncias
e Covariâncias



Cadeia de Markov

- Suponha um sistema mudanças a cada instante (passo), ocupando um dentre finitos estados;
(condições do tempo por dia)
- Se a probabilidade de um estado ocorrer depender apenas do conhecimento do passo anterior, então o processo de mudança de um estado para outro é chamado Cadeia (ou Processo) de Markov.



Exemplo – Locadoras de Carros

- Sejam as lojas A, B e C de uma rede de locadoras de automóveis.
- O cliente pode devolver o carro alugado em qualquer uma destas lojas. A devolução ocorre de acordo com as seguintes probabilidades:

		Devolve		
		A	B	C
Retira	A	0,8	0,1	0,1
	B	0,3	0,2	0,5
	C	0,2	0,6	0,2



Vetor de Estados

- Fornece a probabilidade de o carro estar em cada uma das lojas logo após sua devolução após n locações:

$$X_n = \begin{bmatrix} P\{A\} \\ P\{B\} \\ P\{C\} \end{bmatrix}$$

- Se o carro é locado inicialmente na loja B, então o vetor de estados inicial é:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Cálculo das Probabilidades em cada Locação

- As probabilidades na 1ª devolução são:

$$X'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

- Ou seja, na n-ésima devolução o vetor de estado será calculado por:

$$X'_n = X'_{n-1} \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{bmatrix}$$



- Carregando a matriz de transição no Minitab:

```
MTB > Read 3 3 M1
DATA> 0,8 0,1 0,1
DATA> 0,3 0,2 0,5
DATA> 0,2 0,6 0,2
3 rows read.
```

- Para facilitar os cálculos podemos obter os resultados em colunas. Para isto usaremos a relação:

$$X_n = P^T X_{n-1}$$

- A operação será simplificado, pois os resultados poderão ser dispostos em colunas Nomeie as coluna $X_1, X_2, \dots, X_n$



```
MTB > Transpose M1 M2
MTB > Name M2 'transicao'
MTB > multiply transicao X0 X1
```

- Pode-se multiplicar sucessivamente, verificando os resultados nas colunas:

```
MTB > multiply transicao X1 X2
MTB > multiply transicao X2 X3
MTB > multiply transicao X3 X4
MTB > multiply transicao X4 X5
MTB > multiply transicao X5 X6
MTB > multiply transicao X6 X7
MTB > multiply transicao X7 X8
MTB > multiply transicao X8 X9
MTB > multiply transicao X9 X10
MTB > multiply transicao X10 X11
```



Distribuição Estacionária

- Os valores das probabilidades estão muito próximos à medida em que as devoluções ocorrem.

```
MTB > Print c1 - c12
```

Data Display

Row	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	0	0,3	0,40	0,477	0,5114	0,53251	0,543748	0,550003	0,553313
2	1	0,2	0,37	0,252	0,2607	0,24002	0,237537	0,233111	0,231754
3	0	0,5	0,23	0,271	0,2279	0,22707	0,218715	0,216806	0,214933

Row	X9	X10	X11
1	0,555163	0,556162	0,556713
2	0,230642	0,230162	0,229854
3	0,214195	0,213676	0,213432

- Refaça os cálculos considerando o carro iniciando na loja A ou B. O que acontece?



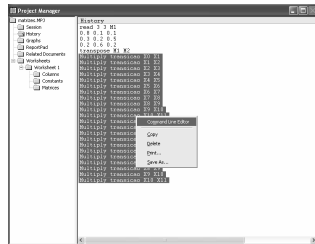
- Cálculo da cadeia com início em A:

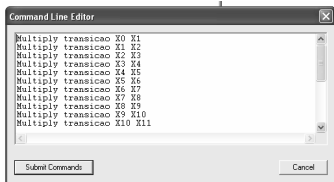
✓ Coloque em X0 o vetor: $(1, 0, 0)$

✓ Em *Windows > Project Manager > History*

Selecione os comandos dos cálculos efetuados

Clique *Command Line Editor*, com o botão direito do mouse:





- Verifique e/ou corrija os comandos e clique em *Submit Commands*
- Verifique os resultados



```
MTB > print x0 - x11
```

Data Display

Row	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	1	0,8	0,69	0,630	0,5971	0,57912	0,569273	0,563887	0,560939
2	0	0,1	0,16	0,191	0,2086	0,21801	0,223236	0,226869	0,227629
3	0	0,1	0,15	0,179	0,1943	0,20287	0,207491	0,210044	0,211432

Row	X9	X10	X11
1	0,559326	0,558444	0,557961
2	0,228479	0,228945	0,229200
3	0,212195	0,212611	0,212839

- Ou seja, caso o carro saia da loja A, após o 11ª devolução, as probabilidades de estar em cada uma das lojas é muito próxima daquelas calculadas caso tivesse saído de B



```
MTB > print x0 - x11
```

Data Display

Row	X0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	0	0,2	0,38	0,454	0,5030	0,52686	0,540942	0,548292	0,552437
2	0	0,6	0,26	0,306	0,2506	0,24826	0,237266	0,234623	0,232005
3	1	0,2	0,36	0,240	0,2464	0,22488	0,221792	0,217086	0,215558

Row	X9	X10	X11
1	0,554663	0,555096	0,556505
2	0,230979	0,230277	0,229941
3	0,214358	0,213828	0,213493

- Independente de onde o cadeia inicie, são aproximadamente iguais as probabilidades relativas à sua 11ª devolução.
- Além disso, os valores de cada probabilidade mostram-se convergentes.



Potência de uma Matriz

- Calcule P^2 , P^4 , P^8 , P^{16} , P^{32} :

```
MTB > Multiply M1 M1 M2
MTB > Multiply M2 M2 M3
MTB > Multiply M2 M2 M4
MTB > Multiply M4 M4 M8
MTB > Multiply M8 M8 M16
MTB > Multiply M16 M16 M32
MTB > print M2 M4 M8 M16 M32
```



Matrix M2
0,69 0,16 0,15
0,49 0,37 0,23
0,38 0,26 0,36

Matrix M4
0,5971 0,2086 0,1943
0,5114 0,2607 0,2279
0,5030 0,2506 0,2464

Matrix M8
0,569939 0,227629 0,211432
0,553313 0,231754 0,214933
0,552437 0,232005 0,215558

Matrix M16

0,557406 0,229493 0,213101
0,557344 0,229525 0,213130
0,557337 0,229529 0,213134

Matrix M32

0,557377 0,229508 0,213115
0,557377 0,229508 0,213115
0,557377 0,229508 0,213115

- A matriz converge para a distribuição estacionária, ou seja, independente de qual local ocorreu a 1ª locação, após muitas devoluções, será a mesma a probabilidade de o carro estar na loja A, B ou C.

Exercício 3 – Matriz Estocástica

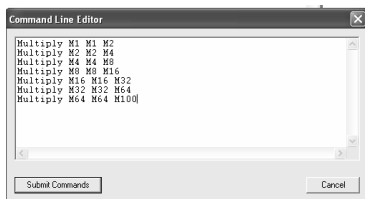
- Seja a matriz estocástica dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0,3355 & 0,2663 & 0,1935 & 0,2047 \\ 0,3682 & 0,2723 & 0,1502 & 0,2093 \\ 0,3067 & 0,3277 & 0,1589 & 0,2067 \\ 0,0389 & 0,5451 & 0,2395 & 0,1765 \end{bmatrix}$$

- Calcule P^k , para $k = 2, 4, 26, 32, 64, 128$
- O que acontece com as colunas de P^k quando k cresce?

- Através de:

√ Window > Project Manager > History



```
MTB > print M2 M4 M8 M16 M32 M64 M100
```

Data Display

Matrix transicao

```
0,277921 0,336849 0,184690 0,200539
0,278000 0,335809 0,186140 0,200351
0,280332 0,335051 0,183321 0,200696
0,294077 0,333484 0,169729 0,202709
```

Matrix M4

```
0,281633 0,335501 0,181926 0,200940
0,281633 0,335502 0,181924 0,200940
0,281632 0,335504 0,181923 0,200940
0,281632 0,335517 0,181909 0,200943
```

Matrix M8

```
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
```

Matrix M16

```
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,183921 0,200941
```

Matrix M32

```
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
```

Matrix M64

```
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
```

Matrix M100

```
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
0,281633 0,335505 0,181921 0,200941
```

- P^4 já mostrou valores bastante próximos da convergência



Diagonalização de Matrizes

Diagonalização de Matrizes Simétricas

- Em muitas aplicações é necessário obter autovalores e autovetores de matrizes, ou seja, a matriz P e Λ tal que:

$$A = P \Lambda P'$$

onde:

P : matriz dos autovetores e

Λ : matriz diagonal dos autovalores



- Seja a matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- Carregando no Minitab

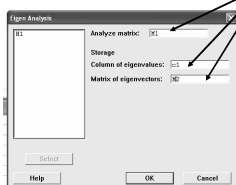
```
MTB > Read 3 3 M1
DATA> 6 -2 -1
DATA> -2 6 1
DATA> -1 1 5
3 rows read.
MTB > print M1
```

Data Display

```
Matrix Xis
6 -2 -1
-2 6 1
-1 1 5
```

Autovalores e Autovetores

Calc > Matrices > Eigen Analysis →



- Ou, digitando pelo teclado:

✓ Editor > Enable Commands

✓ Eigen M1 C1 M2.

- Autovalores e Autovetores de A:

```
MTB > print M2
```

Data Display

```
Matrix M2
```

```
0,657192 -0,260956 0,707107
-0,657192 0,260956 0,707107
-0,369048 -0,929410 0,000000
```

P: matriz de Autovetores

```
MTB > print C1
```

Data Display

```
C1
```

```
8,56155 4,43845 4,00000
```

Autovalores

- A matriz de Autovalores (?) será:

```
MTB > Diagonal C1 M3
MTB > Name M3 Lambda
MTB > Print Lambda
```

Data Display

```
Matrix Lambda
```

```
8,56155 0,00000 0
0,00000 4,43845 0
0,00000 0,00000 4
```

Decomposição de A

- A pode ser decomposta como:

$$A = P \Lambda P'$$

ou seja:

```
MTB > Name M2 'Pe'  
MTB > Multiply Pe Lambda M4  
MTB > Transpose Pe M5  
MTB > Multiply M4 M5 M6  
MTB > Print M6
```

Data Display

```
Matrix M6  
6 -2 -1  
-2 6 1  
-1 1 5
```

} A: matriz original



Inversão de Matriz Simétrica

- Facilmente obtida através de autovalores e autovetores:

$$A^{-1} = P \Lambda^{-1} P'$$

- Para inverter uma matriz diagonal basta inverter os elementos de sua diagonal. Assim:

```
MTB > Let C2 = 1/C1  
MTB > Diagonal C2 M7  
MTB > Name M7 'Lambda_inv'  
MTB > Multiply Pe 'Lambda_inv' M8  
MTB > Multiply M8 M5 M9  
MTB > Print M9
```

Data Display

```
Matrix M9  
0,190789 0,059211 0,026316  
0,059211 0,190789 -0,026316  
0,026316 -0,026316 0,210526
```

} A⁻¹: inversa de A



Potência de Matriz Simétrica

- Através de autovalores e autovetores, tem-se:

$$A^k = P \Lambda^k P'$$

- Para obter a potência de uma matriz diagonal basta elevar os elementos de sua diagonal. Assim, para obter A²:

```
MTB > Let C3 = C1**2  
MTB > Diagonal C3 M11  
MTB > Name M11 'Lambda_quad'  
MTB > Multiply Pe 'Lambda_quad' M12  
MTB > Multiply M12 M6 M13  
MTB > Print M13
```

Data Display

```
Matrix M13  
41 -25 -13  
-25 41 13  
-13 13 27
```

} A²



- Conferindo, temos:

```
MTB > inverse m1 m10
MTB > print m10
```

Data Display

```
Matrix M10
0,190789  0,059211  0,026316
0,059211  0,190789  -0,026316
0,026316  -0,026316  0,210526 } A-1
```

```
MTB > Multiply m1 m1 m14
MTB > Print m14
```

Data Display

```
Matrix M14
41  -25  -13
-25  41   13
-13  13   27 } A2
```



Referências

Bibliografia Recomendada

- Bussab, W. O. e Morettin, P. A. (Saraiva)
Estatística básica
- Montgomery, D. C. e Runger, G. C. (LTC)
Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros