8 Intervalos Estatísticos para uma Única Amostra

ESQUEMA DO CAPÍTULO

Objetivos de Aprendizagem

Após estudo cuidadoso deste capítulo você deverá ser capaz de:

1. Construir intervalos de confiança para a média de uma distribuição normal, usando tanto o método da distribuição normal, como o da distribuição *t*;
2. Construir intervalos de confiança para a variância e o desvio-padrão de uma distribuição normal;
3. Construir intervalos de confiança para a proporção de uma população;
4. Usar um método geral de construção de um intervalo aproximado de confiança para um parâmetro;
5. Construir intervalos de previsão para uma observação futura;
6. Construir um intervalo de tolerância para uma população normal;
7. Explicar os três tipos de estimativas de intervalo: intervalos de confiança, intervalos de previsão e intervalos de tolerância.

8.1 Introdução

- **Exemplo:**
  - Queremos saber a viscosidade média de um produto.
- **Solução:**
  - Uma estimativa seria
    - $$\hat{\mu} = \bar{x} = 1.000$$
- **Problemas:**
  - Essa estimativa não diz o quão próximo a estimativa está do verdadeiro valor μ;
  - É provável que a média esteja entre 900 e 1100?
  - Ou é mais provável que esteja entre 990 e 1010?
- Precisamos de limites que representam valores plausíveis de μ;
- Esses limites são um **intervalo de confiança**.

8.1 Introdução

- **Intervalos de Confiança:**
  - Estimativa de intervalo para um parâmetro de uma população;
  - Não podemos estar certos de que o intervalo contém o parâmetro verdadeiro (desconhecido) da população;
  - Baseado simplesmente em uma amostra proveniente da população completa;
  - Entretanto, é construído de modo que tenhamos alta confiança de que ele contém o parâmetro desconhecido da população.

8.1 Introdução

- **Intervalos de Tolerância:**
  - Outro tipo de estimativa intervalar;
  - Exemplo:
    - Consideramos que os dados de viscosidade de um produto químico são distribuídos normalmente e que queremos calcular os limites que delimitam 95% dos valores de viscosidade, que está no intervalos (proveniente de uma distribuição normal):

$$\mu - 1{,}96\sigma, \quad \mu + 1{,}96\sigma$$

  - Entretanto, o intervalo de tolerância só é útil se os parâmetros μ e σ são conhecidos;
  - Caso contrário, estimativas pontuais devem ser utilizadas e um novo intervalo deve ser construído, levando-se em conta os erros de estimação: $\mu - k\sigma, \quad \mu + k\sigma$

8.1 Introdução

- **Intervalos de Previsão:**
  - Fornece limites em uma (ou mais) observação(ões) futura(s) a partir de uma população;
  - Por exemplo:
    - Poderia ser usado para delimitar uma única medida nova de viscosidade;
  - Para uma amostra grande, o intervalo de previsão para dados normalmente distribuídos tende ao intervalo de tolerância.
  - Porém, para amostras com tamanhos mais modestos, os intervalos de previsão e de tolerância são diferentes.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Suponha que

  $$X_1, X_2, ..., X_n$$

  seja uma amostra aleatória de uma distribuição normal;
- A média μ é desconhecida, mas a variância σ^2 é conhecida;
- Sabemos que a média amostra é:

  $$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n);$$
- Podemos padronizá-la, resultando em

  $$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Uma estimativa do intervalo de confiança para é:

  $$l \leq \mu \leq u,$$

  em que *l* e *u* são calculados a partir da amostra;
- Assim, diferentes amostras, produzem diferentes *l* e *u*;
- Eles são valores observados das variáveis aleatórias *L* e *U*;
- Determinar um intervalo de confiança é determinar valores de *L* e *U* tal que:

$$P(L \leq \mu \leq U) = 1 – \alpha, \text{ para } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Existe uma probabilidade 1–α de selecionarmos uma amostra cujo:
  - IC conterá o verdadeiro valor do parâmetro;
- Depois de observado o valor da amostra:

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n,$$

calculamos l e u e o intervalo resultante é:

$$l \leq \mu \leq u$$

- Os valores l e u são denominados:
  - l é o **limite inferior** do intervalo e
  - u é o **limite superior** do intervalo ;
- O valor 1–α é o **coeficiente de confiança** do intervalo.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Como Z tem distribuição normal padrão, temos que:

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

onde $z_{\alpha/2}$ é obtido da tabela da distribuição normal padrão, de modo que:

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

- Podemos, então, isolar o μ e ficamos com:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{X} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha.$$

- Então:

$$L = \bar{X} - z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} \quad \text{e} \quad U = \bar{X} + z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}.$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Seja $\bar{X}$ a média observada de uma amostra aleatória, de tamanho *n*;
- A amostra é proveniente de uma população com variância conhecida σ^2;
- Um intervalo de 100(1-α)% de confiança para μ é:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

em que $z_{\alpha/2}$ é tal que:

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2.$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Exemplo:

Transição de um Material Metálico

A norma padrão ASTM E23 define métodos padrões de testes para testar o impacto em barras entalhadas feitas com materiais metálicos. A técnica Charpy V-notch (CVN) mede a energia de impacto e é freqüentemente utilizada para determinar se um material experimenta ou não uma transição dúctil-frágil com um decréscimo de temperatura. Dez medidas de energia (J) de impacto nos corpos-de-prova de aço A238, cortados a 60°C, são: 64,1; 64,7; 64,5; 64,6; 64,5; 64,3; 64,6; 64,8; 64,2 e 64,3. Considere que a energia de impacto seja normalmente distribuída, com $\sigma = 1J$. Queremos encontrar um IC de 95% para μ, a energia média de impacto. As grandezas requeridas são: $z_{\alpha/2} = z_{0,025} = 1{,}96$, $n = 10$, $\sigma = 1$ e $\bar{x} = 64{,}46$. O IC resultante de 95% é encontrado a partir da Equação 8-7, como a seguir:

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Exemplo (cont.):

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$64{,}46 - 1{,}96\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq 64{,}46 + 1{,}96\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$63{,}84 \leq \mu \leq 65{,}08$$

ou seja, baseado nos dados da amostra, uma faixa de valores altamente plausíveis para a energia média de impacto para o aço A238 a 60°C é 63,84J $\leq \mu \leq$ 65,08J.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Interpretação do Intervalo de Confiança:
  - Considere um intervalo com confiança 100(1-α)%;
  - Coleta-se um número muito grande de amostras de tamanho *n*, cada uma;
  - Constroem-se, para cada uma das amostras, um intervalo de confiança, conforme explicado;
  - Então, aproximadamente 100(1-α)% dos intervalos assim construídos conteriam o verdadeiro valor de μ.

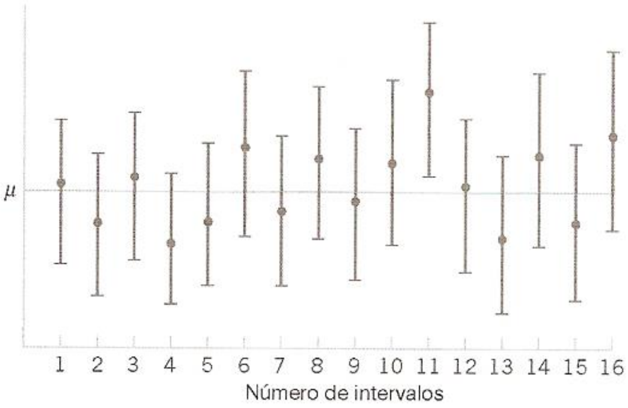


Fig. 8.1 Construção repetida de um intervalo de confiança para μ.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- Nível de Confiança e Precisão de Estimação
  - A escolha de 95% para o nível de confiança foi arbitrária;
  - Podemos querer um nível maior de confiança;
  - O comprimento do intervalo para 95% é:

$$2\left(1{,}96\,\sigma/\sqrt{n}\right).$$

  - Enquanto que para um nível de 99% fica:

$$2\left(2{,}58\,\sigma/\sqrt{n}\right).$$

  - O **comprimento** do intervalo mede a **precisão** da estimativa;
  - Se quisermos ter **muita confiança**, teremos **menor precisão**;
  - Precisão e nível de confiança estão **inversamente** relacionados.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- 8.2.2 Escolha do Tamanho da Amostra
  - A precisão do intervalo de confiança é:

$$2z_{\alpha/2}\,\sigma\big/\sqrt{n}\,.$$

  - Isto significa que quando estimamos μ usando a média amostral, o erro (vide figura) é menor ou igual à precisão, com 100(1-α)% de confiança;
  - Em situações em que o tamanho da amostra pode ser controlado, podemos escolher *n* de modo que estejamos 100(1-α)% confiantes que o erro na estimação de μ seja menor que um limite especificado para o erro, E.

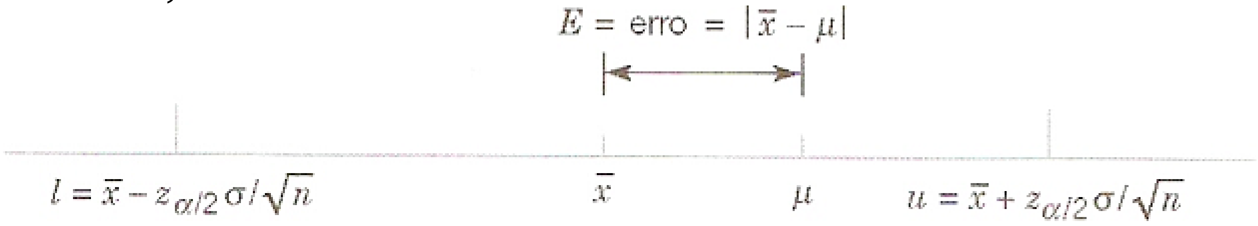


Fig. 8.2 Erro em estimar μ com $\bar{x}$.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- 8.2.2 Escolha do Tamanho da Amostra (cont.)

Tamanho da Amostra com Erro Especificado para a Média, Variância Conhecida

Se $\bar{x}$ for usada como uma estimativa de μ, podemos estar $100(1-\alpha)\%$ confiantes de que o erro $|\bar{x}-\mu|$ não excederá um valor especificado E quando o tamanho da amostra for

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 \qquad (8\text{-}8)$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- 8.2.2 Escolha do Tamanho da Amostra (cont.)
  - **Exemplo:**
    Considere o exemplo das energias medidas em corpos de prova. Queremos construir um intervalo de 95% de confiança para a energia média μ, com um comprimento máximo de 1J. Logo, o erro de estimação é 1/2J.
  - Solução:
    Temos então que:

    $E = 0{,}5;\ \sigma = 1$ e $z_{\alpha/2} = 1{,}96.$

    O tamanho da amostra requerido é:

    $$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left[\frac{(1{,}96)1}{0{,}5}\right]^2 = 15{,}37$$

    Logo, o tamanho mínimo da amostra é 16.

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- 8.2.3 Limites Unilaterais de Confiança
  - É também possível obter limites unilaterais de confiança para a média μ;

Limites Unilaterais de Confiança para a Média, Variância Conhecida

O **limite superior** com $100(1-\alpha)\%$ **de confiança** para μ é

$$\mu \leq u = \bar{x} + z_\alpha \sigma/\sqrt{n} \qquad (8\text{-}9)$$

e o **limite inferior** com $100(1-\alpha)\%$ **de confiança** para μ é

$$\bar{x} - z_\alpha \sigma/\sqrt{n} = l \leq \mu \qquad (8\text{-}10)$$

8.2 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

- 8.2.5 Intervalo de Confiança para μ, Amostra Grande
  - Se o tamanho da amostra for grande ($n \geq 40$), o teorema central do limite implica que a média amostral tenha aproximadamente uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2/n.

Intervalo de Confiança para a Média, Amostras Grandes

Quando n é grande, a grandeza

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

tem uma distribuição normal padrão aproximada. Conseqüentemente,

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}13)$$

é um **intervalo de confiança** para μ **para amostras grandes**, com nível de confiança de aproximadamente $100(1 - \alpha)\%$.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- Vejamos agora casos em que:
  - A amostra é pequena (n < 40);
  - A população segue uma distribuição normal;
  - A variância é desconhecida;
- Tais casos têm larga aplicabilidade;
- Muitas situações práticas são bem aproximadas pela distribuição normal.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.1 A distribuição *t*

Distribuição t

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 desconhecidas. A variável aleatória

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad (8\text{-}15)$$

tem uma distribuição t, com $n - 1$ graus de liberdade.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.1 A distribuição *t* (cont.)

A função densidade de probabilidade de t é

$$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)} \cdot \frac{1}{[(x^2/k)+1]^{(k+1)/2}}$$

$$-\infty < x < \infty \qquad (8\text{-}16)$$

sendo k o número de graus de liberdade. A média e a variância da distribuição t são zero e $k/(k-2)$ (para $k > 2$), respectivamente.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.1 A distribuição *t* (cont.)
  - A figura apresenta exemplos da distribuição *t* para diversos graus de liberdade *k*;
  - São bastante parecidas com a distribuição normal;
  - A distribuição *t* tem caudas mais “pesadas” (maior densidade de probabilidade nas caudas).

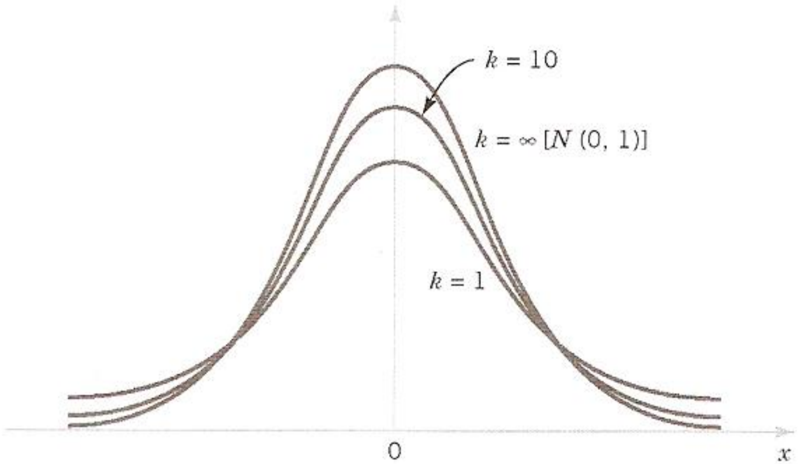


Fig. 8.4 Funções densidade de probabilidade de várias distribuições *t*.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.1 A distribuição *t* (cont.)
  - A Tabela V (apêndice) fornece pontos percentuais da distribuição *t*;
  - Seja $t_{\alpha;\,\nu}$ o valor da variável aleatória T com ν graus de liberdade, acima da qual acharemos a área (probabilidade) α;
  - Ilustrando o uso da tabela, note que o valor de t com 10 graus de liberdade, tendo uma área de 0,05 (5%) para a direita, é $t_{0,05;\,10}$ = 1,812, ou seja, $P(T_{10} > t_{0,05;\,10}) = P(T_{10} > 1{,}812) = 0{,}05$.

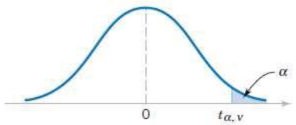


Table IV Percentage Points $t_{\alpha,\nu}$ of the *t*-Distribution

ν \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.1 A distribuição *t* (cont.)
  - A distribuição *t* é simétrica em torno de zero;
  - Logo

$$t_{1-\alpha;\,\nu} = -t_{\alpha;\,\nu}$$

  - Consequentemente,

$$t_{0,95;\,10} = -t_{0,05;\,10} = -1,812$$

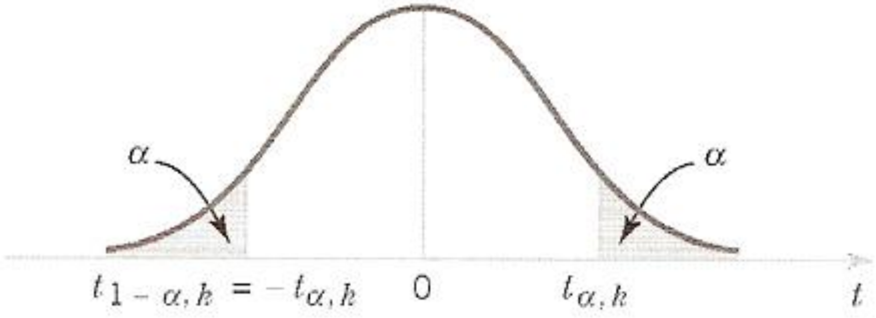


Fig. 8.5 Pontos percentuais da distribuição *t*.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.2 Intervalo de Confiança *t* para μ
  - É fácil encontrar um intervalos de 100(1-α)% de confiança para a média de uma distribuição normal com variância desconhecida, procedendo essencialmente como fizemos na Seção 8.2;
  - Sabemos que a distribuição de

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}}$$

    é *t*, com *n*-1 graus de liberdade;
  - Com $t_{\alpha/2,\, n-1}$ sendo o ponto superior 100α/2% da distribuição *t*, com *n*-1 graus de liberdade, podemos escrever que:

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha,$$

  - ou seja:

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{(\bar{X} - \mu)}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1 - \alpha.$$

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.2 Intervalo de Confiança *t* para μ (cont.)
  - Rearranjando a equação:

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{(\overline{X}-\mu)}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha.$$

  - Resulta em:

$$P\left(\overline{X} - t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{\alpha/2,n-1}\, S/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha,$$

que conduz à seguinte definição de intervalo bilateral de com confiança com 100(1-α)% para μ.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- 8.3.2 Intervalo de Confiança *t* para μ (cont.)

Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

Se $\bar{x}$ e s forem a média e o desvio-padrão de uma amostra aleatória proveniente de uma população normal, com variância desconhecida σ^2, então um **intervalo de confiança de 100(1 − α)% para a média μ** é dado por

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \quad (8\text{-}18)$$

sendo $t_{\alpha/2,n-1}$ o ponto superior 100α/2% da distribuição *t*, com $n - 1$ graus de liberdade.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- Exemplo:

Um artigo no periódico *Materials Engineering* (1989, Vol. II, N°. 4, pp. 275–281) descreve os resultados de testes trativos de adesão em 22 corpos-de-prova de liga U-700. A carga no ponto de falha do corpo-de-prova é dada a seguir (em megapascal):

19,8	10,1	14,9	7,5	15,4	15,4
15,4	18,5	7,9	12,7	11,9	11,4
11,4	14,1	17,6	16,7	15,8	
19,5	8,8	13,6	11,9	11,4	

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- Exemplo (cont.):

A média da amostra é $\bar{x} = 13{,}71$ e o desvio-padrão da amostra é $s = 3{,}55$. As Figs. 8-6 e 8-7 mostram um diagrama de caixa e um gráfico de probabilidade normal dos dados de testes trativos de adesão, respectivamente. Esses gráficos fornecem um bom suporte para a suposição de que a população é normalmente distribuída. Queremos encontrar um IC de 95% para μ.

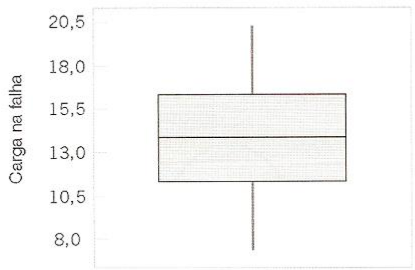


Fig. 8.6 Diagrama de caixa e linha para os dados de carga de falha.

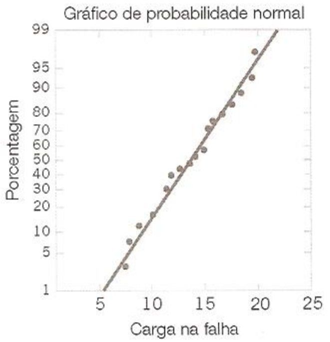


Fig. 8.7 Gráfico de probabilidade normal dos dados de carga de falha.

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- Exemplo (cont.):
  - Os dados são:

$$\bar{x} = 13{,}71, \quad s = 3{,}55 \text{ e } n = 22,$$

  - Os graus de liberdade são n-1 = 21;
  - O coeficiente de confiança é 1-α = 0,95;
  - Da tabela da distribuição t, temos o valor de $t_{0,025;\,21}$:

ν \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819

8.3 Intervalo de Confiança para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Desconhecida

- Exemplo (cont.):

Uma vez que $n = 22$, temos $n - 1 = 21$ graus de liberdade para t; logo, $t_{0,025;21} = 2{,}080$. O IC resultante é

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}$$

$$13{,}71 - 2{,}080(3{,}55)/\sqrt{22} \le \mu \le 13{,}71 + 2{,}080(3{,}55)/\sqrt{22}$$

$$13{,}71 - 1{,}57 \le \mu \le 13{,}71 + 1{,}57$$

$$12{,}14 \le \mu \le 15{,}28$$

O IC é razoavelmente amplo porque há uma grande variabilidade nas medidas do teste trativo de adesão.

8.4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

- Certas situações necessitam de intervalos de confiança para a variância (ou para o desvio-padrão) da população;
- Quando essa população for modelada por uma distribuição normal, os intervalos aqui descritos serão aplicáveis.
- O seguinte resultado fornece a base para construir esses intervalos de confiança:

Distribuição χ^2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição normal, com média μ e variância σ^2 e seja S^2 a variância da amostra. Então a variável aleatória

$$X^2 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \qquad (8\text{-}19)$$

tem uma distribuição qui-quadrado (χ^2), com $n-1$ graus de liberdade.

8.4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

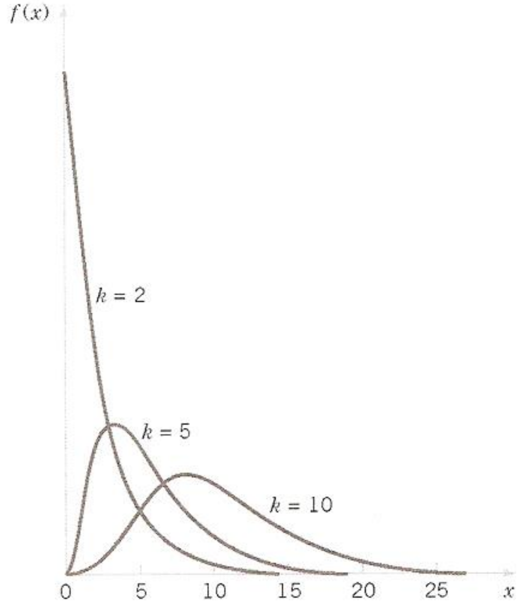
- **A distribuição χ^2:**

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória χ^2 é

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} \qquad x > 0 \qquad (8\text{-}20)$$

em que k é o número de graus de liberdade. A média e a variância da distribuição χ^2 são k e $2k$, respectivamente. Várias distribuições qui-quadrado são mostradas na Fig. 8-8.

Fig. 8.8 Funções densidade de probabilidade de várias distribuições χ^2.



8.4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

- **Intervalo de confiança para a variância:**

Intervalo de Confiança para a Variância

Se s^2 for a variância amostral de uma amostra aleatória de η observações provenientes de uma população normal, com variância desconhecida σ^2, então **um intervalo de confiança de 100(1 − α)% para σ^2** será

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}} \qquad (8\text{-}21)$$

sendo $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ e $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ os pontos percentuais superior e inferior 100α/2% da distribuição qui-quadrado, com $n-1$ graus de liberdade, respectivamente. Um **intervalo de confiança para** σ tem limites inferior e superior que são as raízes quadradas dos limites correspondentes na Equação 8-21.

8.4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

- **Intervalo de confiança para a variância**

Exemplo:

Enchimento de Detergente

Uma máquina automática de enchimento é usada para encher garrafas com detergente líquido. Uma amostra aleatória de 20 garrafas resulta em uma variância amostral de volume de enchimento de $s^2 = 0{,}0153$ (onça fluida)^2. Se a variância do volume de enchimento for muito grande, existirá uma proporção inaceitável de garrafas cujo enchimento não foi completo e cujo enchimento foi em demasia. Consideraremos que o volume de enchimento seja distribuído de forma aproximadamente normal.

8.4 Intervalo de Confiança para a Variância e para o Desvio-Padrão de uma População Normal

- **Intervalo de confiança para a variância**

Exemplo (cont.):

Um intervalo superior de confiança de 95% é encontrado a partir da Equação 8-22 conforme se segue:

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,95;19}}$$

ou

$$\sigma^2 \leq \frac{(19)0{,}0153}{10{,}117} = 0{,}0287 \text{ (onça fluida)}^2$$

Essa última afirmação pode ser convertida em um intervalo de confiança para o desvio-padrão σ, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, resultando em

$$\sigma \leq 0{,}17$$

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- Com freqüência, nos deparamos com a necessidade de construir intervalos de confiança para a proporção de uma população;
- Por exemplo, suponha que de uma amostra de tamanho n tenha sido retirada de uma grande (talvez infinita) população e que X ($\leq n$) observações nessa amostra pertençam a uma **classe de interesse**;
- Então,

$$\hat{P} = X / n,$$

é um estimador pontual da proporção p da população que pertence a essa **classe de interesse**.

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- A distribuição do estimador pontual $\hat{P}$ é **aproximadamente** normal com média p e variância $p(1-p)/n$, se:
  - p não estiver muito próximo de 0 ou de 1 e se
  - n for relativamente grande

    (tipicamente, precisamos de np e $n(1-p)$ maiores que ou igual a 5);
- Faremos uso da **aproximação** normal:

Aproximação Normal para uma Proporção Binomial

Se n for grande, a distribuição de

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

será aproximadamente normal padrão.

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- Intervalo de confiança para a proporção
  - Por raciocínio **análogo** aos anteriores, chegamos que o intervalo aproximado de confiança de 100(1-α)% para *p* é:

Intervalo Aproximado de Confiança para uma Proporção Binomial

Se $\hat{p}$ é a proporção de observações em uma amostra aleatória de tamanho n que pertença a uma classe de interesse, então um intervalo aproximado de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para a proporção p da população que pertença a essa classe é

$$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \qquad (8\text{-}25)$$

sendo $z_{\alpha/2}$ o ponto superior $\alpha/2\%$ da distribuição normal padrão.

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- Intervalo de confiança para a proporção (cont.)
  - **Exemplo**:

Mancais de Eixos de Manivela

Em uma amostra aleatória de 85 mancais de eixos de manivelas de motores de automóveis, 10 têm um acabamento de superfície que é mais rugoso do que as especificações permitidas. Conseqüentemente, uma estimativa pontual da proporção de mancais na população que excede a especificação de rugosidade é $\hat{p} = x/n = 10/85 = 0{,}12$. Um intervalo bilateral de confiança de 95% para p é calculado da Equação 8-25 como

$$\hat{p} - z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{0.025}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ou

$$0{,}12 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}12(0{,}88)}{85}} \le p \le 0{,}12 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}12(0{,}88)}{85}}$$

que simplifica para

$$0{,}05 \le p \le 0{,}19$$

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- Escolha do Tamanho da Amostra

Tamanho de Amostra para um Erro Especificado em uma Distribuição Binomial

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 p(1-p) \qquad (8\text{-}26)$$

- Observaçoes:
  - Uma estimativa de *p* é **requerida** para usar a equação acima;
  - Se uma estimativa anterior for disponível, ela poderá **substituir** *p*;
  - Caso contrário, uma amostra **preliminar** (amostra piloto) poderá ser retirada e a proporção estimada;
  - Outra possibilidade é utilizar o **pior caso**, *p* = 0,5 (por quê?):

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{E}\right)^2 (0{,}25) \qquad (8\text{-}27)$$

8.5 Intervalo de Confiança para a Proporção de uma População, Amostra Grande

- Escolha do Tamanho da Amostra
  - **Exemplo:**

Mancais de Eixos de Manivela

Considere a situação do Exemplo 8-7. Quão grande deverá ser a amostra, se quisermos estar 95% confiantes de que o erro em usar $\hat{p}$ para estimar p é menor do que 0,05? Usando $\hat{p} = 0{,}12$ como uma estimativa inicial de p, encontramos, da Equação 8-26, que o tamanho requerido da amostra é

$$n = \left(\frac{z_{0,025}}{E}\right)^2 \hat{p}(1 - \hat{p}) = \left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 0{,}12(0{,}88) \cong 163$$

Se quiséssemos estar *no mínimo* 95% confiantes de que nossa estimativa $\hat{p}$ da proporção verdadeira ρ estivesse dentro de 0,05, independentemente do valor de p, então usaríamos a Equação 8-27 para encontrar o tamanho da amostra

$$n = \left(\frac{z_{0,025}}{E}\right)^2 (0{,}25) = \left(\frac{1{,}96}{0{,}05}\right)^2 (0{,}25) \cong 385$$

8.6 Roteiro para a Construção de Intervalos de Confiança

Tabela 8.1 Guia para Construir Intervalos de Confiança e Fazer Testes de Hipóteses, Caso para Uma Amostra.

Parâmetro a ser Limitado pelo Intervalo de Confiança ou Testado com uma Hipótese?	Símbolo	Outros Parâmetros?	Seção do Intervalo de Confiança	Seção do Teste de Hipóteses	Comentários
Média de distribuição normal	μ	Desvio-padrão conhecido σ	8-2	9-2	
Média de distribuição arbitrária para amostra de grande tamanho	μ	Tamanho de amostra grande o suficiente para aplicar o teorema do limite central, sendo σ essencialmente conhecido	8-2.5	9-2.5	Amostra de grande tamanho é freqüentemente tomada como $n \geq 40$
Média de distribuição normal	μ	Desvio-padrão σ desconhecido e estimado	8-3	9-3	
Variância (ou desvio-padrão) de distribuição normal	σ^2	Média μ desconhecida e estimada	8-4	9-4	
Proporção de uma população	p	Nenhum	8-5	9-5	

8.7 Intervalos de Tolerância e de Previsão

- 8.7.1 Intervalo de Previsão para uma Observação Futura

Intervalo de Previsão

Um intervalo de previsão de $100(1-\alpha)\%$ para uma observação futura a partir de uma distribuição normal é dado por

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\, s\sqrt{1+\frac{1}{n}} \le X_{n+1} \le \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\, s\sqrt{1+\frac{1}{n}} \qquad (8\text{-}29)$$

- 8.7.2 Intervalo de Tolerância para uma Distribuição Normal

Intervalo de Tolerância

Um **intervalo de tolerância** para capturar no mínimo $\gamma\%$ dos valores em uma distribuição normal, com nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$, é

$$\bar{x} - ks, \qquad \bar{x} + ks$$

sendo k um fator do intervalo de tolerância encontrado na Tabela XII do Apêndice. Valores são dados para $\gamma = 90\%$, 95% e 99% e para 90%, 95% e 99% de confiança.

8.7 Tabela com Resumo dos Procedimentos de Inferência para uma Única Amostra

Resumo dos Procedimentos para Intervalo de Confiança para Uma Amostra

Caso	Tipo de Problema	Estimativa Pontual	Intervalo Bilateral de Confiança de $100(1-\alpha)\%$
1.	Média μ, com variância σ^2 conhecida	$\bar{x}$	$\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$
2.	Média μ de uma distribuição normal com variância σ^2 desconhecida	$\bar{x}$	$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}$
3.	Variância σ^2 de uma distribuição normal	s^2	$\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}$
4.	Proporção ou parâmetro de uma distribuição binomial p	$\hat{p}$	$\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

TERMOS E CONCEITOS IMPORTANTES

Coeficiente de confiança

Distribuição qui-quadrado

Distribuição *t*

Erro de Estimação

Intervalo bilateral de confiança

Intervalo de confiança

Intervalo de confiança para a variância de uma distribuição normal

Intervalo de confiança para amostra grande

Intervalo de confiança para uma proporção da população

Intervalo de previsão

Intervalo de tolerância

Intervalos de confiança para a média de uma distribuição normal

Limites unilaterais de confiança

Nível de confiança

Precisão de estimação de parâmetros