9

Testes de Hipóteses para uma Única Amostra

ESQUEMA DO CAPÍTULO

Objetivos de Aprendizagem

Após estudo cuidadoso deste capítulo você deverá ser capaz de:

1. Estruturar problemas de decisão em engenharia como testes de hipóteses;
2. Testar hipóteses para a média de distribuições normais via utilização dos procedimentos do teste Z e do teste *t*;
3. Testar hipóteses para a variância (e desvio-padrão) de uma distribuição normal;
4. Testar hipóteses para a proporção de uma população;
5. Utilizar a abordagem do valor P para tomada de decisões em testes de hipóteses;
6. Comparar a potência e a probabilidade de erro tipo II e tomar decisões a respeito do tamanho da amostra em testes para médias, variâncias e proporções;
7. Explicar e utilizar a relação entre intervalos de confiança e testes de hipóteses.
8. Utilizar o teste qui-quadrado de adequação de ajuste para verificar suposições de distribuição;
9. Usar testes de tabelas de contingência.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.1 Hipóteses Estatísticas

Testes de hipóteses estatísticas e estimação de intervalos de confiança são métodos fundamentais utilizados no estágio de análise de dados de um ***experimento comparativo***, no qual o engenheiro está interessado, por exemplo, em comparar a média de uma população com um valor específico.

- **Definição:**

Definição

Uma **hipótese estatística** é uma afirmação sobre os parâmetros de uma ou mais populações.

9.1 Teste de Hipóteses

- **Exemplo:**
  - Suponha que estejamos interessados na taxa de queima de um propelente sólido utilizado no sistema de escapamento de aeronaves;
  - A taxa de queima é uma variável aleatória que pode ser descrita por uma distribuição de probabilidade;
  - Suponha que nosso interesse esteja focado na taxa média de queima (um parâmetro desta distribuição);
  - Especificamente, estamos interessados em decidir se a taxa média de queima é ou não 50 centímetros por segundo.

9.1 Teste de Hipóteses

- **Hipótese alternativa bilateral:**
  - $H_0: \mu = 50$ cm/s → hipótese nula
  - $H_1: \mu \neq 50$ cm/s → hipótese alternativa
- **Hipótese alternativa unilateral:**
  - $H_0: \mu = 50$ cm/s → hipótese nula
  - $H_1: \mu < 50$ cm/s → hipótese alternativa

  ou

  - $H_0: \mu = 50$ cm/s → hipótese nula
  - $H_1: \mu > 50$ cm/s → hipótese alternativa

9.1 Teste de Hipóteses

- **Teste de uma hipótese:**
  - É um procedimento que conduz a uma decisão sobre uma hipótese particular;
  - Testes de hipóteses são baseados na utilização de informações provenientes de uma **amostra aleatória da população de interesse**;
  - Se esta informação é consistente com a hipótese, concluímos então que a hipótese deve ser **verdadeira**; se esta informação é inconsistente com a hipótese, concluímos que a hipótese deve ser **falsa**.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

- H_0: $\mu = 50$ cm/s
- H_1: $\mu \neq 50$ cm/s

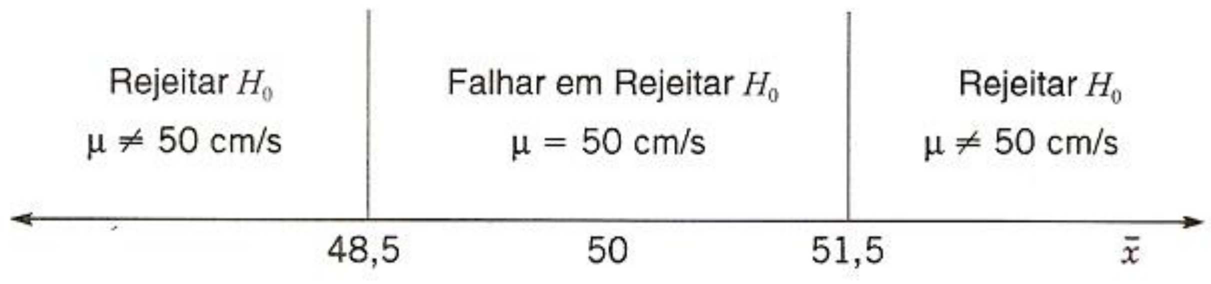


Fig. 9.1 Critérios de decisão para testar H_0: $\mu = 50$ cm/s versus H_1: $\mu \neq 50$ cm/s.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

– Definições:

Definição

A rejeição da hipótese nula H_0, quando ela for verdadeira, é definida como um **erro tipo I**.

Definição

A falha em rejeitar a hipótese nula, quando ela é falsa, é definida como um **erro tipo II**.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

Tabela 8.1 Decisões no Teste de Hipóteses

Decisão	H_0 É Verdadeira	H_0 É Falsa
Falhar em rejeitar H_0	nenhum erro	erro tipo II
Rejeitar H_0	erro tipo I	nenhum erro

Algumas vezes, a probabilidade de erro tipo I, denotada pela letra grega α, é denominada nível de significância, ou o tamanho do teste.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

Retornando ao exemplo, a probabilidade de cometer erro tipo I é igual à soma das áreas que foram sombreadas nas extremidades da distribuição normal (ver figura).

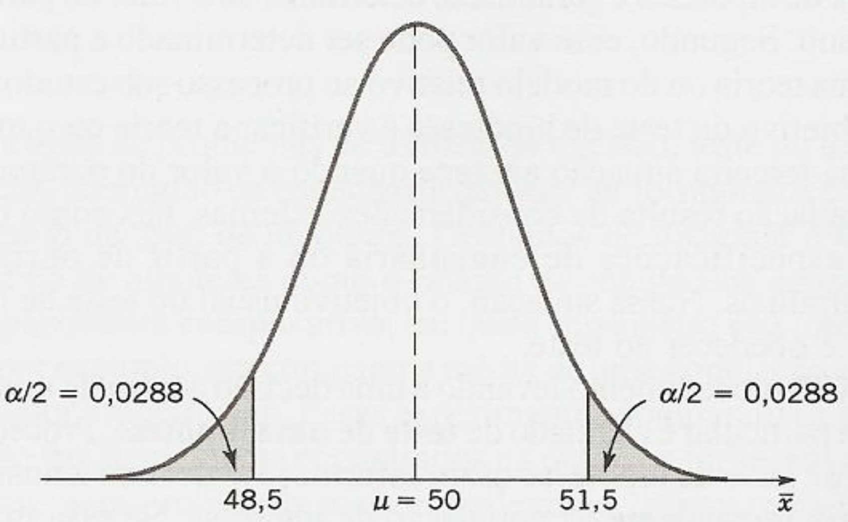


Fig. 9.2 Região crítica para H_0: $\mu = 50$ *versus* H_1: $\mu \neq 50$ e $n = 10$.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

Assim,

$$\alpha = P(\bar{X} < 48{,}5 \text{ quando } \mu = 50) + P(\bar{X} > 51{,}5 \text{ quando } \mu = 50)$$

Os valores de z que correspondem aos valores críticos 48,5 e 51,5 são

$$z_1 = \frac{48{,}5 - 50}{0{,}79} = -1{,}90$$

e

$$z_2 = \frac{51{,}5 - 50}{0{,}79} = 1{,}90$$

Logo,

$$\begin{aligned}\alpha &= P(Z < -1{,}90) + P(Z > 1{,}90)\\ &= 0{,}028717 + 0{,}028717\\ &= 0{,}057434\end{aligned}$$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(\text{erro tipo II})$$
$$= P(\text{falhar em rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ for falsa}).$$

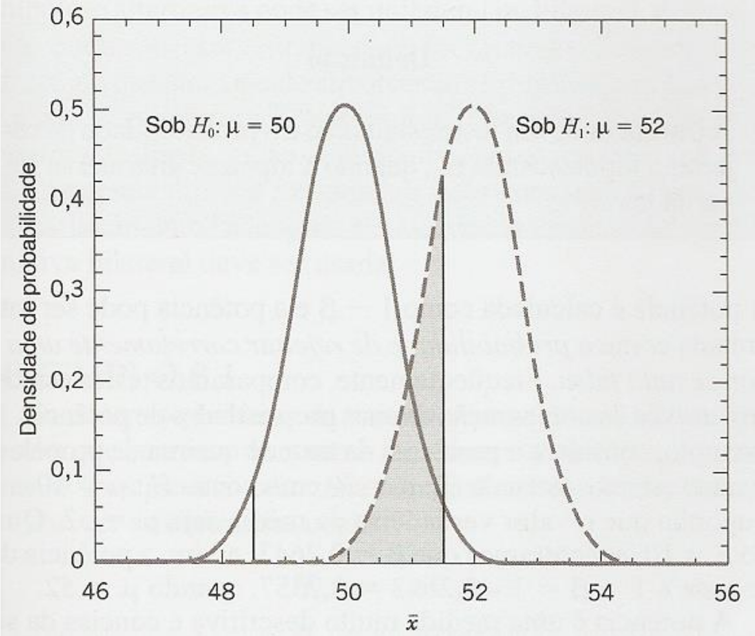


Fig. 9.3 A probabilidade do erro tipo II quando $\mu = 52$ e $n = 10$.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(48{,}5 \leq \overline{X} \leq 51{,}5, \text{ quando } \mu = 52)$$

Os valores z, correspondentes a 48,5 e 51,5, quando $\mu = 52$, são

$$z_1 = \frac{48{,}5 - 52}{0{,}79} = -4{,}43$$

e

$$z_2 = \frac{51{,}5 - 52}{0{,}79} = -0{,}63$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta &= P(-4{,}43 \leq Z \leq -0{,}63) \\ &= P(Z \leq -0{,}63) - P(Z \leq -4{,}43) \\ &= 0{,}2643 - 0{,}000 \\ &= 0{,}2643\end{aligned}$$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(48{,}5 \leq \bar{X} \leq 51{,}5, \text{ quando } \mu = 50{,}5)$$

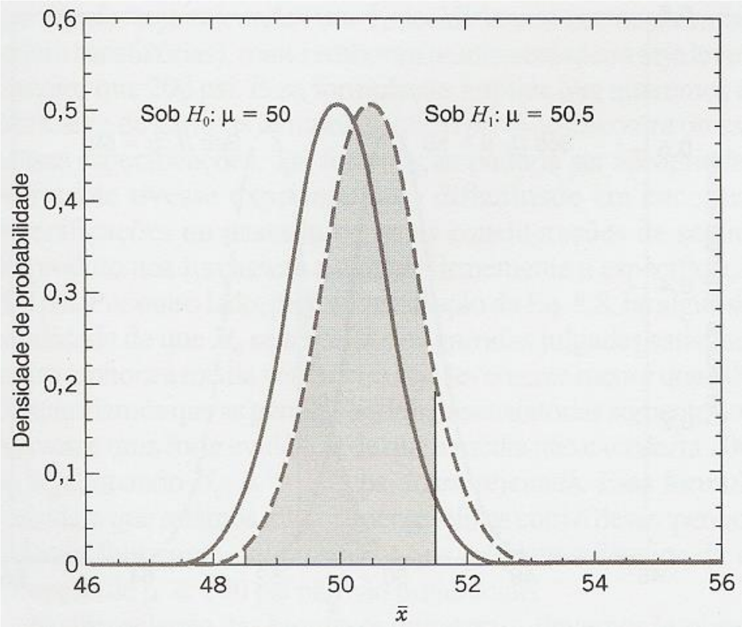


Fig. 9.4 A probabilidade do erro tipo II quando μ = 50,5 e n = 10.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(48{,}5 \leq \overline{X} \leq 51{,}5, \text{ quando } \mu = 50{,}5)$$

Conforme mostrado na Fig. 8.4, os valores de z correspondentes a 48,5 e 51,5, quando $\mu = 50{,}5$ são

$$z_1 = \frac{48{,}5 - 50{,}5}{0{,}79} = -2{,}53$$

e

$$z_2 = \frac{51{,}5 - 50{,}5}{0{,}79} = 1{,}27$$

Logo

$$\begin{aligned} \beta &= P(-2{,}53 \leq Z \leq 1{,}27) \\ &= P(Z \leq 1{,}27) - P(Z \leq -2{,}53) \\ &= 0{,}8980 - 0{,}0057 \\ &= 0{,}8923 \end{aligned}$$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(48{,}5 \leq \bar{X} \leq 51{,}5, \text{ quando } \mu = 52)$$

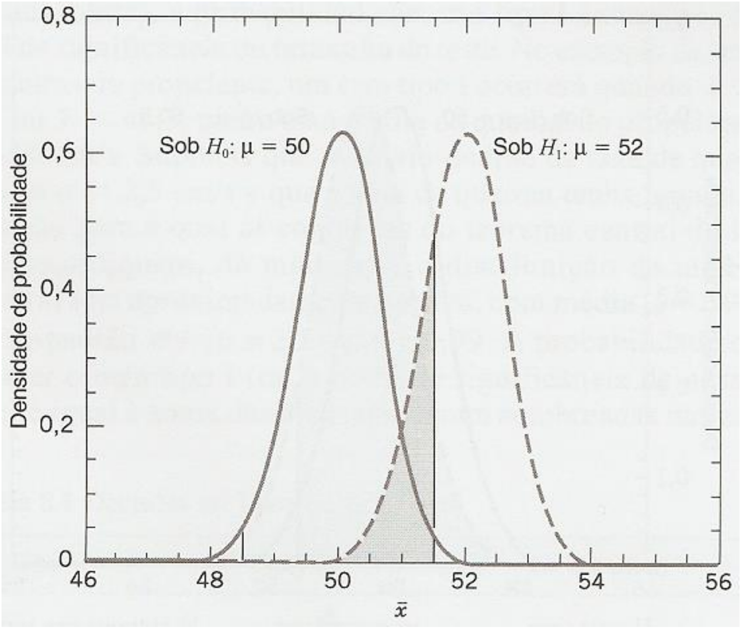


Fig. 9.5 A probabilidade do erro tipo II quando $\mu = 52$ e $n = 16$.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

$$\beta = P(48{,}5 \leq \overline{X} \leq 51{,}5, \text{ quando } \mu = 52)$$

Quando $n = 16$, o desvio-padrão de $\overline{X}$ é $\sigma / \sqrt{n} = 2{,}5\sqrt{16} =$ $= 0{,}625$, e os valores z correspondentes a 48,5 e 51,5 quando $\mu = 52$ são

$$z_1 = \frac{48{,}5 - 52}{0{,}625} = -5{,}60 \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{51{,}5 - 52}{0{,}625} = -0{,}80$$

Desse modo

$$\begin{aligned} \beta &= P(-5{,}60 \leq Z \leq -0{,}80) \\ &= P(Z \leq -0{,}80) - P(Z \leq -5{,}60) \\ &= 0{,}2119 - 0{,}000 \\ &= 0{,}2119 \end{aligned}$$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

Região de Aceitação	Tamanho da Amostra	α	β em $\mu = 52$	β em $\mu = 50{,}5$
$48{,}5 < \bar{x} < 51{,}5$	10	0,0576	0,2643	0,8923
$48 < \bar{x} < 52$	10	0,0114	$\boxed{0{,}5000}$	$\boxed{0{,}9705}$
$48{,}5 < \bar{x} < 51{,}5$	16	0,0164	0,2119	$\boxed{0{,}9445}$
$48 < \bar{x} < 52$	16	$\boxed{0{,}0014}$	$\boxed{0{,}5000}$	$\boxed{0{,}9918}$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

Essa apresentação e a discussão anterior revelam quatro pontos importantes:

1. O tamanho da região crítica, e consequentemente a probabilidade do erro tipo I, α, pode sempre ser reduzido através da seleção apropriada dos valores críticos;
2. Os erros tipo I e tipo II estão relacionados. Uma diminuição na probabilidade de um tipo de erro sempre resulta em um aumento da probabilidade do outro, para um tamanho de amostra *n*;
3. Um aumento no tamanho da amostra reduzirá, geralmente, α e β, mantidos fixos os valores críticos;
4. Quando a hipótese nula é falsa, β aumentará à medida que o valor do parâmetro se aproxima do valor usado na hipótese nula. O valor de β diminui à medida que aumenta a diferença entre a média verdadeira e o valor utilizado na hipótese.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.2 Testes de Hipóteses Estatísticas

- Definição:

Definição

A **potência** de um teste estatístico é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula H_0, quando a hipótese alternativa for verdadeira.

- A potência é calculada como 1-β, e a potência pode ser interpretada como a ***probabilidade de rejeitar corretamente uma hipótese nula falsa***. Frequentemente comparamos testes estatísticos pelas suas respectivas potências.
- Por exemplo, considere o problema de taxa de queima do propelente quando testamos H_0: μ = 50 cm/s *versus* H_1: $\mu \neq$ 50 cm/s. Suponha que o valor verdadeiro da média seja μ = 52. Quando n = 10, encontramos que β = 0,2643; assim, a potência deste teste é 1-β = 1-0,2643 = 0,7357, quando μ = 52.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.3 Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

- Testes bilaterais:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Testes unilaterais:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu > \mu_0$

  ou
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu < \mu_0$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.3 Hipóteses Unilaterais e Bilaterais

- Exemplo:

  Considere o problema da taxa de queima do propelente. Suponha que se a taxa for menor que 50 cm/s, desejamos mostrar isso com uma conclusão forte. As hipóteses devem ser estabelecidas como

  – H_0: $\mu = 50$ cm/s
  – H_1: $\mu < 50$ cm/s

  Aqui, a região crítica está na extremidade inferior da distribuição da média amostral. Visto que a rejeição de H_0 é sempre uma conclusão forte, essa afirmação das hipóteses produzirá o resultado desejado se H_0 for rejeitado.

  Note que, embora a hipótese nula seja estabelecida com um sinal de igual, deve-se incluir qualquer valor de μ não especificado pela hipótese alternativa.

  Desse modo, falhar em rejeitar H_0 não significa que $\mu = 50$ cm/s exatamente, mas tão somente que não há evidência a favor de H_1.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.4 Valores *P* nos Testes de Hipóteses

- O nível de significância **não** dá ideia ao tomador de decisão a respeito de que o valor calculado da estatística de teste estava apenas nas proximidades da região de rejeição ou se estava muito longe desta região;
- O valor P é a probabilidade de que a estatística de teste assumirá um valor que é, no mínimo, tão **extremo** quanto o valor observado da estatística quando a hipótese nula H_0 for verdadeira;
- Definição formal:

> **Valor P**
>
> O **valor** P é o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula H_0, com os dados fornecidos.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.4 Valores *P* nos Testes de Hipóteses (cont.)

- **Exemplo:**

Considere o teste bilateral de hipóteses para a taxa de queima

$$H_0: \mu = 50 \qquad H_1: \mu \neq 50$$

com $n = 16$ e $\sigma = 2{,}5$. Suponha que a média amostral observada seja $\bar{x} = 51{,}3$ centímetros por segundo. A Fig. 9-6 mostra uma região crítica para esse teste, com valores críticos em 51,3 e no valor simétrico 48,7. O valor *P* do teste é o valor α associado com essa região crítica. Qualquer valor menor para α diminui a região crítica e o teste falha em rejeitar a hipótese nula quando $\bar{x} = 51{,}3$ centímetros por segundo.

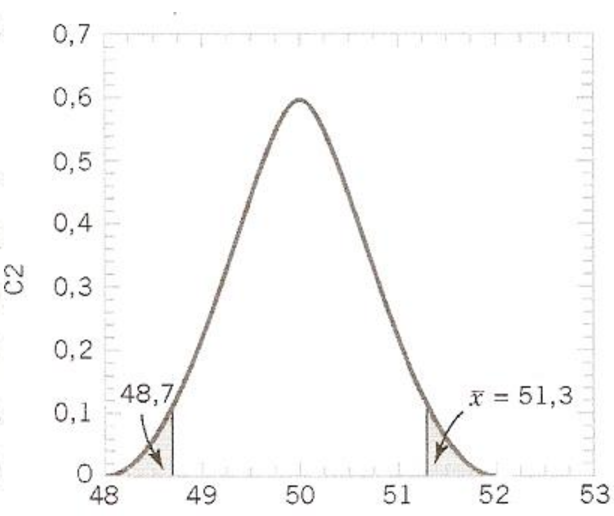


Fig. 9.6 O valor p é a área da região sombreada, quando $\bar{x} = 51{,}3.$

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.4 Valores *P* nos Testes de Hipóteses (cont.)

- **Exemplo (cont.):**

Suponha que a média amostral observada seja $\bar{x} = 51{,}3$ centímetros por segundo. A Fig. 9-6 mostra uma região crítica para esse teste, com valores críticos em 51,3 e no valor simétrico 48,7. O valor *P* do teste é o valor α associado com essa região crítica. Qualquer valor menor para α diminui a região crítica e o teste falha em rejeitar a hipótese nula quando $\bar{x} = 51{,}3$ centímetros por segundo. O valor *P* é fácil de calcular depois de a estatística de teste ser observada. Nesse exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{Valor } P &= 1 - P(48{,}7 < \bar{X} < 51{,}3) \\
&= 1 - P\left(\frac{48{,}7 - 50}{2{,}5/\sqrt{16}} < Z < \frac{51{,}3 - 50}{2{,}5/\sqrt{16}}\right) \\
&= 1 - P(-2{,}08 < Z < 2{,}08) \\
&= 1 - 0{,}962 = 0{,}038
\end{aligned}
$$

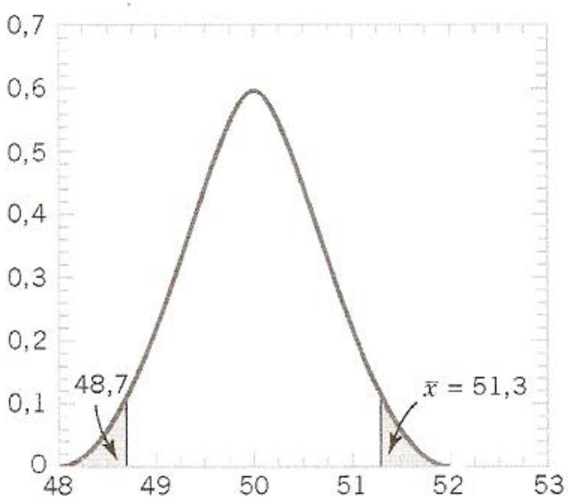


Fig. 9.6 O valor p é a área da região sombreada, quando $\bar{x} = 51{,}3$.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.5 Conexão entre Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

- Há uma **conexão** estreita entre o teste de hipóteses acerca de um parâmetro, ou seja, θ, e o intervalo de confiança para θ;
- Se $[l, u]$ for um intervalo de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para o parâmetro θ, o teste de tamanho α (nível de confiança α) das hipóteses:

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

conduzirá à rejeição da hipótese nula H_0 **se e somente se** θ_0 não estiver no IC de $100(1-\alpha)\%$, $[l, u]$;
- Embora equivalentes, IC's e testes de hipóteses fornecem **informações diferentes**, visto que aqueles fornecem uma faixa de valores prováveis para o parâmetro θ, enquanto que estes são uma estrutura para dispor níveis de risco associados a uma decisão específica (rejeitar ou não o H_0).

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.6 Procedimento Geral para Testes de Hipóteses

1. **Parâmetro de interesse:** A partir do contexto do problema, identifique o parâmetro de interesse;
2. **Hipótese nula, H_0:** Estabeleça a hipótese nula H_0, que é sempre de igualdade;
3. **Hipótese alternativa, H_1:** Especifique uma hipótese alternativa apropriada, H_1 (**dica: coloque em H_1 aquilo que você quer testar**);
4. **Estatística de teste:** Determine uma estatística apropriada de teste (**consultar tabela**);
5. **Rejeita H_0 se:** Estabeleça os critérios de rejeição para a hipótese nula H_0 (**consultar tabela**);
6. **Cálculos:** Calcule quaisquer grandezas amostrais necessárias, substitua-as na equação para a estatística de teste e determine seu valor;
7. **Conclusões:** Decida se H_0 deve ou não ser rejeitada e reporte isso no contexto do problema.

9.1 Teste de Hipóteses

9.1.6 Procedimento Geral para Testes de Hipóteses (cont.)

- **Significância Estatística versus Significância Prática**

O quadro mostra valor *P* e potência do teste, para testar H_0: μ=50, quando observamos $\bar{x} = 50{,}5$ e a média verdadeira é 50,5:

Tamanho da Amostra n	Valor *P* Quando $\bar{x} = 50{,}5$	Potência (para $\alpha = 0{,}05$) Quando μ Verdadeiro = 50,5
10	0,527	0,097
25	0,317	0,170
50	0,157	0,293
100	0,046	0,516
400	$6{,}3 \times 10^{-5}$	0,979
1000	$2{,}5 \times 10^{-10}$	1,000

A conclusão é clara:

> Seja cuidadoso ao interpretar os resultados do teste de hipóteses quando a amostra tiver tamanho grande, visto que qualquer pequeno desvio do valor usado na hipótese, μ_o, será provavelmente detectado, mesmo quando a diferença for de pouca ou nenhuma significância prática.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Suponha que desejemos testas as hipóteses

H_0: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu \neq \mu_0$,

sendo μ_0 uma constante especificada.

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{8.10}$$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Se a hipótese nula H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, então o valor esperado de X, $E(X)$, é μ_0 e a distribuição de Z_0 é a distribuição normal padrão.

Consequentemente, se H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, a probabilidade será $1-\alpha$ de que a estatística de teste caia entre $-z_{\alpha/2}$ e $z_{\alpha/2}$, em que $z_{\alpha/2}$ é o ponto percentual $\alpha/2\times100\%$ da distribuição normal padrão.

As regiões associadas com $z_{\alpha/2}$ e $-z_{\alpha/2}$ estão ilustradas na **figura**.

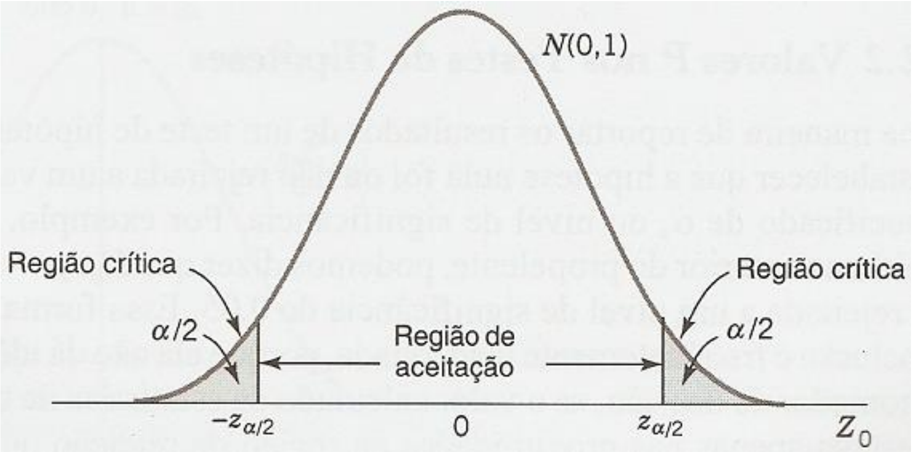


Figura A distribuição de Z_0 quando H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, com região crítica para H_1: $\mu \neq \mu_0$.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Assim, devemos rejeitar H_0 se

$$Z_0 > z_{\alpha/2} \qquad (8.11)$$

ou

$$Z_0 < -z_{\alpha/2} \qquad (8.12)$$

e devemos falhar em rejeitar H_0 se

$$-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2} \qquad (8.13)$$

A Eq. 8.13 define a ***região de aceitação*** para H_0 e as Eq. 8.11 e 8.12 definem a ***região crítica*** ou ***região de rejeição***. A probabilidade do erro tipo I para esse procedimento é α.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Exemplo:

Taxa de Queima de Propelente Os sistemas de escape da tripulação de uma aeronave funcionam por causa de um propelente sólido. A taxa de queima desse propelente é uma característica importante do produto. As especificações requerem que a taxa média de queima tem de ser 50 centímetros por segundo. Sabemos que o desvio-padrão da taxa de queima é $\sigma = 2$ centímetros por segundo. O experimentalista decide especificar uma probabilidade do erro tipo I ou nível de significância de $\alpha = 0{,}05$. Ele seleciona uma amostra aleatória de $n = 25$ e obtém uma taxa média amostral de queima de $\bar{x} = 51{,}3$ centímetros por segundo. Que conclusões poderiam ser tiradas?

Solução:

Podemos resolver esse problema por meio do procedimento de sete etapas, mencionado na Seção 9-1.6. Isso resulta em

1. **Parâmetro de interesse:** O parâmetro de interesse é μ, a taxa média de queima.
2. **Hipótese nula, H_0:** H_0: $\mu = 50$ centímetros por segundo.
3. **Hipótese alternativa, H_1:** H_1: $\mu \neq 50$ centímetros por segundo.
4. **Estatística de teste:** A estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

Solução (cont.):

5. **Rejeite H_0 se:** Rejeite H_0 se o valor P for menor do que 0,05. Para usar o teste com nível de significância fixo, os limites da região crítica seriam $z_{0,025} = 1{,}96$ e $-z_{0,025} = -1{,}96$.
6. **Cálculos:** Desde que $\bar{x} = 51{,}3$ e $\sigma = 2$,

$$z_0 = \frac{51{,}3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3{,}25$$

7. **Conclusão:** Uma vez que o valor $P = 2\,[1 - \Phi(3{,}25)] = 0{,}0012$, rejeitamos H_0: $\mu = 50$, com nível de significância de 0,05.

Interpretação Prática: Concluímos que a taxa média de queima difere de 50 centímetros por segundo, com base em uma amostra de 25 medidas. De fato, há forte evidência de que a taxa média de queima exceda 50 centímetros por segundo.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Podemos desenvolver procedimentos para testar hipóteses na média μ, em que a hipótese alternativa seja unilateral. Suponha que especifiquemos as hipóteses como

  H_0: $\mu = \mu_0$,
  H_1: $\mu > \mu_0$.

  Na definição da região crítica para esse teste, observamos que um valor negativo da estatística de teste Z_0 nunca nos levaria a concluir que H_0: $\mu = \mu_0$ seria falsa. Por conseguinte, devemos colocar a região crítica na extremidade superior da distribuição normal padrão e rejeitaríamos H_0 se o valor calculado para z_0 fosse muito grande. Isto é somente rejeitaríamos H_0 se

  $Z_0 > z_\alpha$.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Similarmente, para testar

  H_0: $\mu = \mu_0$,

  H_1: $\mu < \mu_0$,

  calcularíamos a estatística de teste Z_0 e rejeitaríamos H_0 se o valor de Z_0 fosse muito pequeno. Ou seja, a região crítica está na extremidade inferior da distribuição normal padrão e rejeitaríamos H_0 se

  $Z_0 < -z_\alpha$.

- A **figura** ilustra as situações descritas.

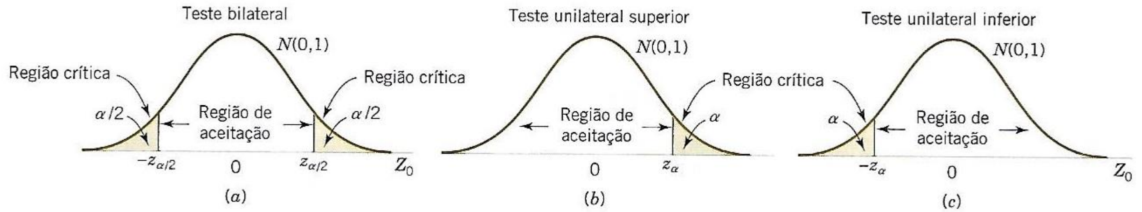


Figura: A distribuição de Z_0 quando H_0: $\mu = \mu_0$ for verdadeira, com região crítica para (a) a alternativa bilateral H_1: $\mu \neq \mu_0$; (b) a alternativa unilateral H_1: $\mu > \mu_0$; (c) a alternativa unilateral H_1: $\mu < \mu_0$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.2 O Erro Tipo II e a Escolha do Tamanho da Amostra

- Determinação da Probabilidade β do Erro Tipo II:

  Considere a hipótese bilateral

  H_0: $\mu = \mu_0$

  H_1: $\mu \neq \mu_0$,

  Suponha que a hipótese nula seja falsa e que o verdadeiro valor da média seja $\mu = \mu_0 + \delta$, por exemplo, em que $\delta > 0$. A estatística de teste Z_0 é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

  Consequentemente, a distribuição de quando for verdadeira será

$$Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.2 O Erro Tipo II e a Escolha do Tamanho da Amostra

- Determinação da Probabilidade β do Erro Tipo II (final):
  Expressa matematicamente, a probabilidade do erro tipo II é

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) \quad (8.22)$$

  conforme mostrado na **figura**.

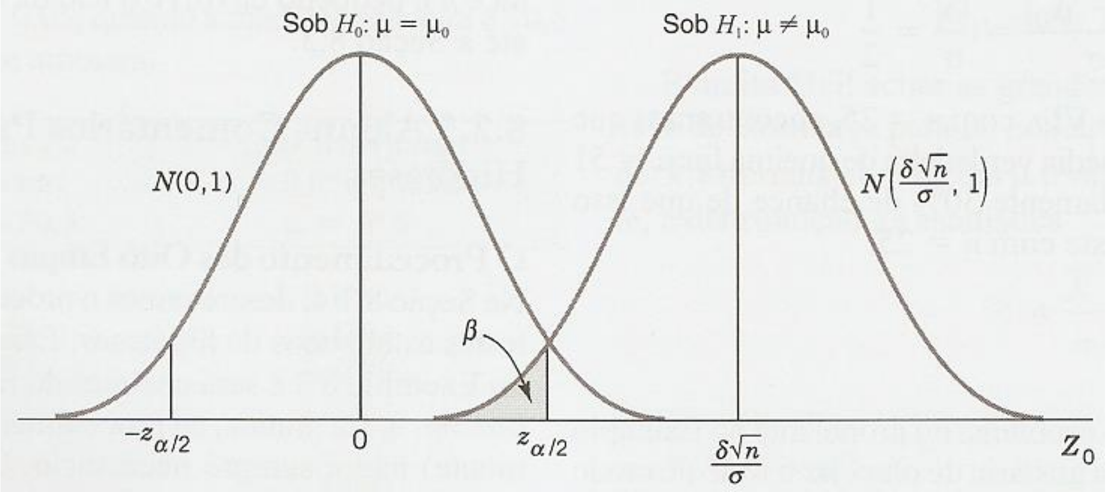


Figura: A distribuição de Z_0 sujeita a H_0 e H_1.

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.2 O Erro Tipo II e a Escolha do Tamanho da Amostra

- Expressões para Determinação do Tamanho da Amostra:
  Podem-se obter facilmente expressões que determinam o tamanho apropriado da amostra para obter um valor particular de β, dados δ e α. Para a hipótese alternativa bilateral, temos

$$n \simeq \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \qquad (8.24)$$

em que

$$\delta = \mu - \mu_0$$

Para hipóteses alternativas unilaterais, temos

$$n = \frac{(z_{\alpha} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{\delta^2} \qquad (8.25)$$

sendo

$$\delta = \mu - \mu_0$$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.2 O Erro Tipo II e a Escolha do Tamanho da Amostra

- Exemplo:

  Considere o problema do propelente de foguete do exemplo anterior. Suponha que o analista deseje planejar o teste de modo que se a taxa média verdadeira de queima diferir de 50 cm/s por mais de 1 cm/s, o teste detectará isso (ou seja, rejeitará, H_0: $\mu = \mu_0$) com uma alta probabilidade, digamos 0,90.

  Agora, notamos que $\sigma = 2$, $\delta = 51\text{-}50 = 1$, $\alpha = 0{,}05$ e $\beta = 0{,}10$.

  Visto que $z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} = 1{,}96$ e $z_\beta = z_{0{,}10} = 1{,}28$, o tamanho requerido da amostra para detectar esse desvio de H_0: $\mu = 50$ é encontrado pela Eq. 8.24 como

$$n \approx \frac{\left(z_{\alpha/2} + z_\beta\right)^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{(1{,}96 + 1{,}28)^2\, 2^2}{1^2} \approx 42.$$

9.2 Testes Para a Média de uma Distribuição Normal, Variância Conhecida

9.2.3 Teste para Amostras Grandes

- Embora o procedimento de teste para a hipótese nula
  $H_0: \mu = \mu_0$
  tenha sido desenvolvido considerando que a variância σ^2 fosse conhecida, em muitas situações prática isto ***não*** será verdade.
- Em geral, se $n \geq 30$, então a variância da amostra s^2 será próxima de σ^2 para a maioria das amostras e assim s ***poderá*** ser substituído por σ nos procedimentos de teste.
- O tratamento ***exato*** do caso em que σ^2 é desconhecido e n é pequeno envolve o uso da distribuição t de *Student* e será tratado na seção seguinte.

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Quando a amostra for pequena ($n < 30$) e a variância σ^2 for desconhecida, teremos que fazer a suposição de que a distribuição dos dados seja ***aproximadamente normal***, de modo a obter um procedimento de teste.
- Teste *t* para uma única amostra

Null hypothesis: H_0: $\mu = \mu_0$

Test statistic: $$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

Alternative hypothesis	Rejection criteria
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2,n-1}$ or $t_0 < -t_{\alpha/2,n-1}$
H_1: $\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha,n-1}$
H_1: $\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha,n-1}$

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

- A estatística T é, então, comparada com os pontos $t_{\alpha/2,n\text{-}1}$ e $-t_{\alpha/2,n\text{-}1}$, que são os pontos percentuais superior e inferior $\alpha/2\times100\%$ da distribuição t, com n-1 graus de liberdade (vide **figura** e **tabela** da distribuição t).

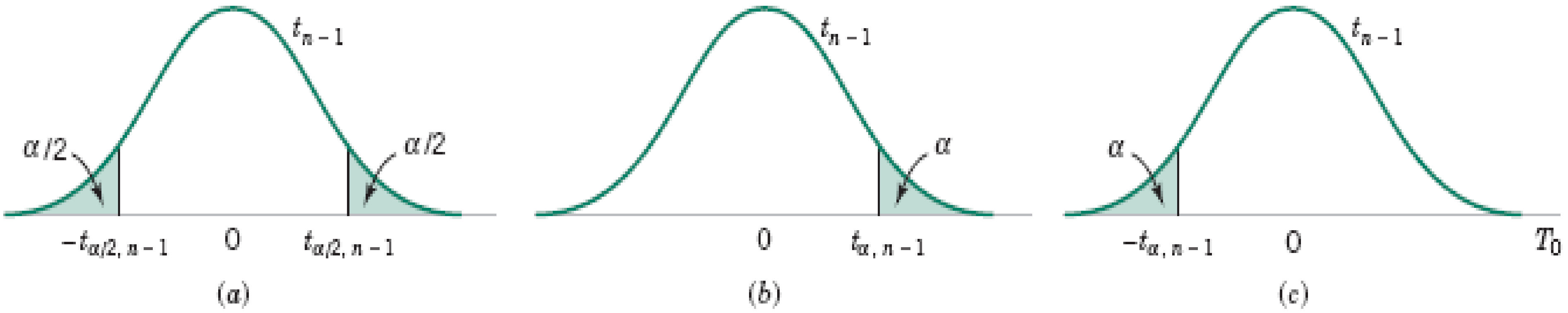
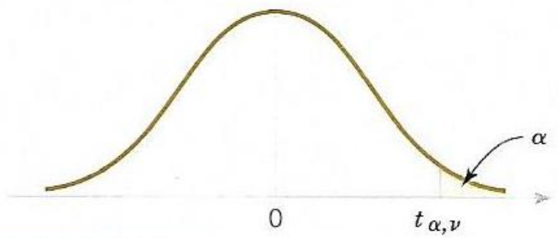


Figura: A distribuição de referência para H_0: $\mu=\mu_0$, com região crítica para (a) H_1: $\mu \neq \mu_0$, (b) H_1: $\mu > \mu_0$ e (c) H_1: $\mu < \mu_0$.

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

Tabela: Valores percentuais $t_{\alpha,\upsilon}$ da Distribuição *t* de *Student*



ν \ α	0,40	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	0,325	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,32	318,31	636,62
2	0,289	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	23,326	31,598
3	0,277	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,213	12,924
4	0,271	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,267	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,265	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,263	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Exemplo:

Um artigo no periódico *Materials Engineering* (1989, Vol. II, No. 4, pp. 275-281) descreve os resultados de testes de tensão quanto à adesão em 22 corpos de prova de liga U-700. A carga no ponto de falha do corpo de prova é dada a seguir (em MPa):

19,8	18,5	17,6	16,7	15,8
15,4	14,1	13,6	11,9	11,4
11,4	8,8	7,5	15,4	15,4
19,5	14,9	12,7	11,9	11,4
10,1	7,9			

A média amostral é $\bar{x} = 13,71$ e o desvio-padrão é $s = 3,55$. Os dados sugerem que a carga média na falha excede 10 MPa? Considere que a carga na falha tenha uma distribuição normal e use $\alpha = 0,05$.

A solução, usando o procedimento de 8 etapas para o teste de hipóteses, é dada a seguir:

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Exemplo (cont.):

1. O parâmetro de interesse é a carga média na falha, μ.
2. H_0: $\mu = 10$.
3. H_1: $\mu > 10$. Queremos rejeitar H_0 se a carga média na falha exceder 10 MPa.
4. $\alpha = 0{,}05$.
5. A estatística de teste é

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

6. Rejeite H_0 se $t_0 > t_{0{,}05{,}21} = 1{,}721$.
7. Cálculos: Já que $\bar{x} = 13{,}71$, $s = 3{,}55$, $\mu_0 = 10$ e $n = 22$, temos

$$t_0 = \frac{13{,}71 - 10}{3{,}55/\sqrt{22}} = 4{,}90$$

8. Conclusões: Uma vez que $t_0 = 4{,}90 > 1{,}721$, rejeitamos H_0 e concluímos, com um nível de 0,05 de significância, que a carga média na falha excede 10 MPa.

9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.1 Testes de Hipóteses para a Média

- Exemplo (final):

  É sempre aconselhável investigar a ***validade*** das suposições, quando aplicar qualquer procedimento estatístico. A **figura (a)** apresenta um diagrama de caixa das 22 observações e a impressão do aspecto deste gráfico é que a amostra vem de uma população simétrica e que não há razão imediata para questionar a suposição de normalidade. Outra maneira é examinar um gráfico de probabilidade normal dos dados, **figura (b)**, em que observações próximas da reta indicam normalidade.

Figura a: Diagrama de caixa para os dados de carga de falha.

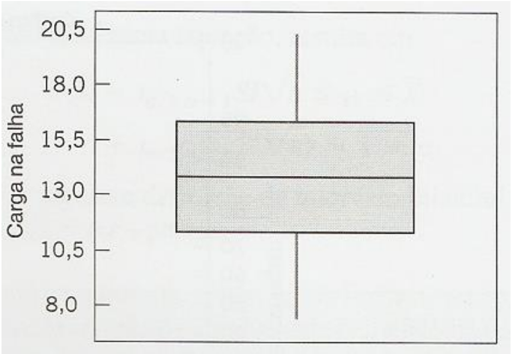
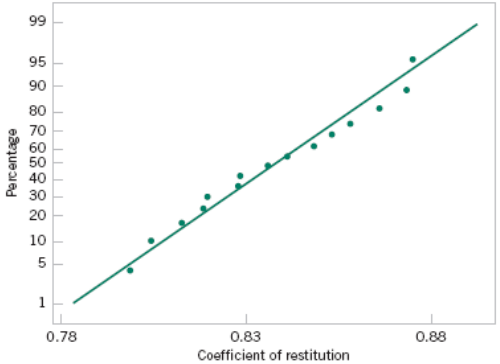


Figura b: Gráfico de probabilidade normal dos dados de carga de falha.



9.3 Testes para a Média de uma Distribuição Normal , Variância Desconhecida

9.3.2 O Valor *P* para um Teste *t*

- O valor *P* é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula seria rejeitada.

Para ilustrar, considere o teste *t* baseado em 21 graus de liberdade no Exemplo . Os valores críticos relevantes da Tabela V do Apêndice são dados a seguir:

Valor Crítico:	0,257	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
Área da Extremidade:	0,40	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005

- Note que no exemplo, pelo fato de $t_0 = 4{,}90$ ser maior que 3,819, o maior valor tabelado, temos $P(T_{21} > 4{,}90) < 0{,}0005$.

9.4 Testes para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9.4.1 Testes de Hipóteses para a Variância de uma População Normal

- Algumas vezes são necessários testes de hipóteses e intervalos de confiança para a ***variância*** ou o ***desvio-padrão*** da população. A variância S^2 será uma estimativa não-tendenciosa de σ^2.
- Quando a população for modelada por uma ***distribuição normal***, os procedimentos aqui apresentados serão aplicáveis.
- Para testar

  H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$

  H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$,

  usaremos a estatística de teste

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

que tem Distribuição Qui-quadrado, χ_{n-1}^2,com n-1 graus de liberdade.

9.4 Testes para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9.4.1 Testes de Hipóteses para a Variância de uma População Normal

- A estatística X^2 é, então, comparada com os pontos percentuais da distribuição χ^2, com n-1 graus de liberdade (vide **figura** e **tabela**).

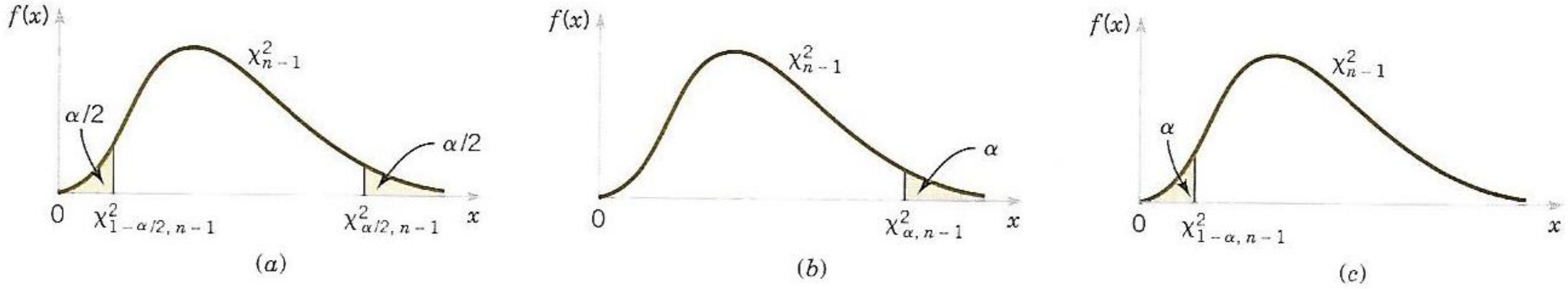
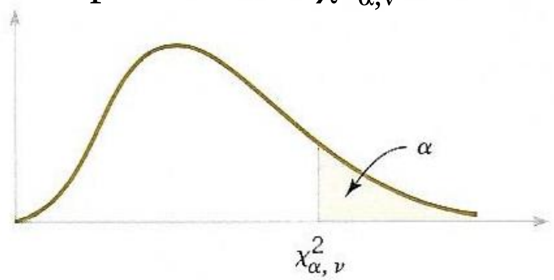


Figura: A distribuição de referência para H_0: $\sigma^{2=}\sigma^2_0$, com região crítica para (a) H_1: $\sigma^2 \neq \sigma^2_0$, (b) H_1: $\sigma^2 > \sigma^2_0$ e (c) H_1: $\sigma^2 < \sigma^2_0$.

9.4 Testes para a Variância e Para o Desvio-Padrão de uma Distribuição Normal

9.4.1 Testes de Hipóteses para a Variância de uma População Normal

Tabela: Valores percentuais $\chi^2_{\alpha,\nu}$ da Distribuição Qui-quadrado



ν \ α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,900	0,500	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
1	0,00 +	0,00 +	0,00 +	0,00 +	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	5,35	10,65	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.1 Testes de Hipóteses para uma Proporção Binomial

- Frequentemente, é necessário testar hipóteses para a ***proporção*** de uma população. Então,

  $$\hat{P} = X / n,$$

  é um estimador da proporção, em que X é o número de observações que pertencem à classe associada com *p*.
- Consideraremos o teste

  H_0: $p = p_0$

  H_1: $p \neq p_0$.
- Um teste aproximado, baseado na aproximação da binomial pela normal, será dado. Calcule a ***estatística de teste***

  $$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}},$$

  que tem distribuição aproximadamente normal N(0,1).

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.1 Testes de Hipóteses para uma Proporção Binomial

- A hipótese H_0: $p = p_0$ é então rejeitada se
  $z_0 > z_{\alpha/2}$
  ou
  $z_0 < -z_{\alpha/2}$.

- Outra forma da estatística Z_0 é

$$Z_0 = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.1 Testes de Hipóteses para uma Proporção Binomial

- **Exemplo:**

Um fabricante de semicondutores produz controladores usados em aplicações no motor de automóveis. O consumidor requer que a fração defeituosa em uma etapa crítica de fabricação não exceda 0,05 e que o fabricante demonstre uma capacidade de processo nesse nível de qualidade, usando $\alpha = 0{,}05$. O fabricante de semicondutores retira uma amostra aleatória de 200 aparelhos e encontra que quatro deles são defeituosos. O fabricante pode demonstrar uma capacidade de processo para o consumidor?

Podemos resolver esse problema usando o procedimento das oito etapas do teste de hipóteses, conforme segue:

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.1 Testes de Hipóteses para uma Proporção Binomial

- **Exemplo (cont.):**

1. O parâmetro de interesse é a fração defeituosa do processo, p.

2. $H_0: p = 0{,}05$

3. $H_1: p < 0{,}05$

Essa formulação do problema permitirá ao fabricante fazer uma afirmativa forte sobre a capacidade de processo se a hipótese nula $H_0: p = 0{,}05$ for rejeitada.

4. $\alpha = 0{,}05$

5. A estatística de teste é (da Eq. 8.67)

$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

sendo $x = 4$, $n = 200$ e $p_0 = 0{,}05$.

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.1 Testes de Hipóteses para uma Proporção Binomial

- **Exemplo (final):**

6. Rejeite H_0: $p = 0{,}05$ se $z_0 < -z_{0,05} = -1{,}645$

7. Cálculos: a estatística de teste é

$$z_0 = \frac{4 - 200(0{,}05)}{\sqrt{200(0{,}05)(0{,}95)}} = -1{,}95$$

8. Conclusões: Uma vez que $z_0 = -1{,}95 < -z_{0,05} = -1{,}645$, rejeitamos H_0 e concluímos que a fração defeituosa do processo, p, é menor do que 0,05. O valor P para esse valor da estatística de teste z_0 é $P = 0{,}0256$, que é menor que $\alpha = 0{,}05$. Concluímos que o processo é capaz.

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.2 Erro Tipo II e Escolha do Tamanho da Amostra

- As equações para o tamanho da amostra são

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right)^2 \quad (8.72)$$

para a alternativa bilateral e

$$n = \left(\frac{z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_\beta\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0} \right)^2 \quad (8.73)$$

para a alternativa unilateral.

9.5 Testes para a Proporção de uma População

9.5.2 Erro Tipo II e Escolha do Tamanho da Amostra

- **Exemplo:**

Suponha que o fabricante de semicondutores estivesse disposto a aceitar o erro β tão grande quanto 0,10, se o valor verdadeiro da fração verdadeira defeituosa do processo fosse $p = 0{,}03$. Se o fabricante continuar a usar $\alpha = 0{,}05$, qual tamanho da amostra seria requerido?

O tamanho requerido da amostra pode ser calculado da Eq. 8.73, como segue:

$$n = \left(\frac{1{,}645\sqrt{0{,}05(0{,}95)} + 1{,}28\sqrt{0{,}03(0{,}97)}}{0{,}03 - 0{,}05} \right)^2$$
$$\simeq 832$$

9.6 Tabela com Resumo dos Procedimentos de Inferência para uma Única Amostra

Resumo dos Procedimentos dos Testes de Hipóteses para Uma Amostra

Caso	Hipótese Nula	Estatística de Teste	Hipótese Alternativa	Critérios para Rejeição
1.	$H_0: \mu = \mu_0$ σ^2 conhecida	$z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$H_1: \mu \neq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$ $z_0 > z_\alpha$ $z_0 < -z_\alpha$
2.	$H_0: \mu = \mu_0$ σ^2 desconhecida	$t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$H_1: \mu \neq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2,n-1}$ $t_0 > t_{\alpha,n-1}$ $t_0 < -t_{\alpha,n-1}$
3.	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ ou $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$ $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$
4.	$H_0: p = p_0$	$z_0 = \dfrac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$	$H_1: p \neq p_0$ $H_1: p > p_0$ $H_1: p < p_0$	$\lvert z_0 \rvert > z_{\alpha/2}$ $z_0 > z_\alpha$ $z_0 < -z_\alpha$

9.7 Teste da Adequação de um Ajuste

- Os procedimentos discutidos são projetados para problemas em que a população ou a distribuição de probabilidade seja **conhecida**;
- Em algumas situações, estamos interessados em saber se uma distribuição particular será **satisfatória** como modelo para a população;
- Uma técnica muito útil é a chamada **plotagem da probabilidade** (já apresentada);
- Um procedimento formal é o **teste de adequação de ajuste**, baseado na Distribuição Qui-quadrado;
- Estatística de teste:

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{\alpha, k-p-1} \text{ (sob } \mathrm{H}_0\text{).}$$

9.8 Testes para a Tabela de Contingência

- Muitas vezes, os n elementos de uma amostra proveniente de uma população podem ser classificados de acordo com **dois** critérios diferentes;
- É de interesse saber se os métodos de classificação são estatisticamente **independentes**;
- Tais dados aparecem em uma **tabela de contingência** $r \times c$:

$$\begin{array}{cccccc} \text{linhas} \backslash \text{colunas} & 1 & 2 & \cdots & c \\ 1 & O_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1c} \\ 2 & O_{21} & O_{22} & \cdots & O_{2c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & O_{r1} & O_{r2} & \cdots & O_{rc} \end{array}$$

- Estatística de teste:

$$X_0^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{\left(O_{ij} - E_{ij}\right)^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)} \ (\text{sob } \mathrm{H}_0).$$

TERMOS E CONCEITOS IMPORTANTES

α e β	Distribuição de referência para uma estatística de teste	Hipóteses estatísticas	Testes de hipóteses
Conexão entre testes de hipóteses e intervalos de confiança	Distribuição nula	Inferência	Teste para adequação de ajuste
Curvas características operacionais (CO)	Erros tipo I e tipo II	Nível de significância de um teste	Teste para homogeneidade
Determinação do tamanhos de amostras para testes de hipóteses	Estatísticas de teste	Potência de um teste	Teste para independência
	Hipótese nula	Região crítica para um teste estatístico	Valor *p*
	Hipóteses alternativas uni e bilaterais	Significância estatística *versus* significância prática	