

3

Lista 2

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.175:**

Média:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

Variância:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = V(X) &= E(X - \mu)^2 = \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = \\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{96} \end{aligned}$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.176:**

Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 1000, p = 0,001)$. Portanto,

$f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1 - p)^{n-x}$, para $x = 0, 1, 2, \dots, n$. Assim:

a) $P(X = 1) = 1000 \times 0,001^1 \times 0,999^{999} = 0,3681$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,999^{1000} =$
 $= 0.6323$

c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
 $= 0,999^{1000} + 0,3681 + 0,1840 = 0,9198$

d) $E(X) = np = 1,0000$ e
 $V(X) = np(1 - p) = 0,9990$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.177:**

Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ o número de molas helicoidais não conformes, por batelada de tamanho $n = 50$ e $E(X) = np = 5$.

Então, $f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1 - p)^{n-x}$, para $x = 0, 1, 2, \dots, n$, e:

a) $n = 50$ e $E(X) = 5 = np \Rightarrow p = 0,10$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
 $= 0,0052 + 0,0286 + 0,0779 = 0,1117$

c) $P(X \geq 49) = P(X = 49) + P(X = 50) \cong 0$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.178:**

a) Se X é o número de ovos quebrados por dúzia, então $X \sim \text{Binomial}(n = 12, p = 0,01)$.

b)
$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$
$$= 1 - \binom{12}{0} \times 0,01^0 \times 0,99^{12} - \binom{12}{1} \times 0,01^1 \times 0,99^{11} =$$
$$= 1 - 0,8864 - 0,1074 = 0,0062$$

c) $E(X) = np = 0,12$ e $V(X) = np(1 - p) = 0,1188$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.181:**

Seja V o sinal estar verde, com $P(V) = 0,2$ e $P(V') = 1 - 0,2 = 0,8$. Logo:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(V' \cap V' \cap V' \cap V) &= P(V')^3 \times P(V) = \\ &= 0,8^3 \times 0,2 = 0,1024 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(V')^{10} = 0,8^{10} = 0,1074$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.182:**

Seja $p = 0,6$ a probabilidade de a calibração do transdutor obedecer às especificações e X é o número de tentativas de calibração até que as especificações sejam obedecidas. Temos que $X \sim \text{Geométrica}(p)$.

Logo, $f(x) = (1 - p)^{x-1} \times p$, para $x = 1, 2, \dots, \infty$.

Portanto:

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \\ &= 0,6 + (1 - 0,6)^1 \times 0,6 + (1 - 0,6)^2 \times 0,6 = \\ &= 0,6 + 0,24 + 0,096 = 0,9360 \end{aligned}$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.185:**

Seja X o número de carros que passam por um cruzamento, que segue uma distribuição de Poisson, $X \sim \text{Poisson}(\lambda T)$, com média $E(X) = \lambda T = 6$ carros por minuto. Portanto, $f(x) = \frac{e^{-(\lambda T)}(\lambda T)^x}{x!}$, para $x = 0, 1, \dots, \infty$. Logo:

a) $P(X = 0) = \frac{e^{-(6 \times 0.5)}(6 \times 0.5)^0}{0!} = 0,0498$, para $T = 0,5$ min.

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$
 $= 1 - 0,0498 - 0,1494 - 0,2240 = 0,5768$

c) Por tentativa e erro, descobre-se que $P(X \leq 5) = 0,9161$, logo, com probabilidade no mínimo de 90%, passam pelo cruzamento até 5 carros, em 30 segundos (0,5 min.)

d) A distribuição de Poisson pode **não** ser apropriada, uma vez que, nesta distribuição, valor esperado, $E(X)$, e variância, $V(X)$, são iguais.

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.191:**

Seja X o tempo (isto é, o número de tentativas) até que $r = 4$ servidores falhem, com probabilidade de falhar a cada tentativa, $p = 0,0001$.

A variável aleatória X segue uma distribuição binomial negativa, $X \sim \text{BinomialNegativa}(p, r)$.

Logo:

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{4}{0,0001} = 40.000 \text{ unidades de tempo.}$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.197:**
Para que $\sum_i f(x_i) = 1$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$ (propriedade axiomática da probabilidade), temos que

$$c \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = c \times (1 + 2 + 3 + 4) = 1.$$

Logo,

$$c = 0,10.$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.201:**

A função de densidade de probabilidade em cada ponto, $f(x_i)$, pode ser determinada pela mudança na função de distribuição cumulativa dada, $F(x)$. Logo:

$$f(2) = 0,2$$

$$f(5,7) = 0,5 - 0,2 = 0,3$$

$$f(6,5) = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

$$f(8,5) = 1,0 - 0,8 = 0,2$$

Note-se que

$$x_1 = 2, x_2 = 5,7, x_3 = 6,5, x_4 = 8,5$$

e que

$$\sum_i f(x_i) = f(2) + f(5,7) + f(6,5) + f(8,5) = 1$$