2

Lista 1 - Solução

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.185:**
  Denotemos L um pacote ser pequeno e leve e Q, um pacote ser quebrado. Como $P(L)=0{,}40$, $P(L')=0{,}60$, $P(Q|L)=0{,}02$ e $P(Q|L')=0{,}01$, então:

  a) Pela regra da probabilidade total, tem-se que

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(Q \cap L) + P(Q \cap L') = \\ &= P(Q|L) \times P(L) + P(Q|L') \times P(L') = \\ &= 0{,}02 \times 0{,}40 + 0{,}01 \times 0{,}60 = 0{,}014 \end{aligned}$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.187:**

  a) $P(A) = \frac{80+2}{100} = 0{,}82$

  b) $P(B) = \frac{80+10}{100} = 0{,}90$

  c) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

  d) $P(A \cap B) = \frac{80}{100} = 0{,}80$

  e) $P(A \cup B) = \frac{80+2+10}{100} = 0{,}92$

  ou alternativamente

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ = 0{,}82 + 0{,}90 - 0{,}80 = 0{,}92$$

  f) $P(A' \cup B) = \frac{80+10+8}{100} = 0{,}98$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.188:**
Denotemos *A* o eixo atende aos requisitos de acabamento de superfície, *B* o eixo atende aos requisitos de bordas arredondadas e *F* o eixo ser proveniente da ferramenta 1. Então:

a) $P(A \cup B \cup F) = \frac{(200+1+145+4)+(4+8)+2}{370} = \frac{364}{370} = 0,984$

b) $P(A \cup B' \cup F') = \frac{200+1+145+4+2+6+8}{370} = \frac{366}{370} = 0,989$

c) $P(A \cap B \cup F') = \frac{200+145+8+4+6}{370} = \frac{363}{370} = 0,981$

d) $P(A \cup F') = \frac{200+1+145+4+8+6}{370} = \frac{364}{370} = 0,984$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.189:**
  Não é possível que A, B e C sejam mutuamente excludentes, pois, se fossem, então teríamos que:
  $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) =$$
  $$= 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}5 = 1{,}2 > 1,$$
  o que viola um dos axiomas da probabilidade.
  Logo, pelo menos dois dos eventos podem ocorrer simultaneamente e não podem ser, portanto, mutuamente excludentes.

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.190:**
  Denotemos A o eixo atende aos requisitos de acabamento de superfície, B o eixo atende aos requisitos de bordas arredondadas. Então:

a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{345}{370}}{\frac{345+12}{370}} = \frac{345}{357} = 0{,}966$

b) $P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{\frac{5}{370}}{\frac{5+8}{370}} = \frac{5}{13} = 0{,}385$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.196:**
  Denotemos A, se peça de alumínio tem acabamento de superfície excelente, e B, se a peça tem comprimento excelente. Tem-se que

$$P(A) = \frac{80 + 2}{100} = 0{,}820$$

  e que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{80}{100}}{\frac{90}{100}} = \frac{80}{90} = 0{,}889.$$

  Como $P(A) \neq P(A|B)$, então A e B são eventos ***dependentes***.

  Note-se que seria possível chegar à mesma conclusão verificando alternativamente que $P(B) \neq P(B|A)$ ou que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.202:**
  Denotemos A, a peça usinada ter uma extremidade em condição moderada e B, a peça ter uma profundidade do orifício abaixo do valor alvo. Então:

  a) $P(A \cap B) = \frac{20}{200} = 0{,}100$

  b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

  $$= \frac{25+20}{200} + \frac{10+20+80}{200} - \frac{20}{200} = \frac{135}{200} = 0{,}675$$

  c) $P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') =$

  $$= \frac{15+10+50+80}{200} + \frac{15+25+50}{200} - \frac{15+50}{200} =$$
  $$= \frac{180}{200} = 0{,}900$$

  ou, mais facilmente, por uma das Leis de De Morgan

  $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}100 = 0{,}900$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 1.207:**
  a) Denotemos A_i ao evento do i-ésimo parafuso ***estar apertado*** apropriadamente. Então, por probabilidade condicionada, tem-se
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$
  $= P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times P(A_2|A_1) \times P(A_1) =$
  $= \frac{12}{17} \times \frac{13}{18} \times \frac{14}{19} \times \frac{15}{20} = 0{,}282$
  Nota: Outra forma de resolver o problema consiste em dividir o número de formas pelas quais podemos selecionar 4 parafusos apertados entre 15, isto é, combinação de 15, 4 a 4, $\binom{15}{4} = 1365$, pelo número de formas pelas quais podemos selecionar 4 parafusos entre os 20 totais, $\binom{20}{4} = 4845$, que é 0,282, com $\binom{n}{k} = n!/[(n-k)!k!]$.
  b) Denotemos B ao evento de que ao menos um parafuso não esteja apertado apropriadamente. Então
  $P(B) = 1 - P(\text{todos estejam apertados}) = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.211:**
  Denotemos A, se a operação de enchimento for incorreta, e B, se o processo for operado em baixa velocidade. São conhecidas as probabilidades $P(A|B) = 0{,}001$, $P(A|B') = 0{,}01$ e $P(B') = 0{,}30$. Então:
  a) A probabilidade de a operação ser incorreta pode ser encontrada pela ***Regra da Probabilidade Total***,
  $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') =$$
  $$= P(A|B) \times P(B) + P(A|B') \times P(B') =$$
  $$= 0{,}001 \times (1 - 0{,}30) + 0{,}01 \times 0{,}30 = 0{,}0037$$
  b) A probabilidade $P(B'|A)$ pode ser encontrada pela ***Regra de Bayes***,
  $$P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B') \times P(B')}{P(A)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}30}{0{,}0037} = 0{,}811$$

Cap. 2 – Probabilidade

- **Ex. 2.216:**
  Denotemos por A_i o evento de a ferramenta de usinagem estar ociosa no tempo i e $P(A_i) = 0{,}15$, para todo i. Portanto:
  a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = P(A_i)^5 = 0{,}15^5 = 0{,}0001$
  b) $P(A'_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A'_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) +$
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A'_3 \cap A_4 \cap A_5) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A'_4 \cap A_5) +$
  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A'_5) = 5 \times P(A_i)^4 \times [1 - P(A_i)] = 0{,}0022$
  c) Por raciocínio análogo àquele desenvolvido na letra anterior, a probabilidade de se encontrar exatamente 3 períodos ociosos é
  (número de combinações de 5, 2 a 2) $\times P(A_i)^3 \times [1 - P(A_i)]^2 =$
  $10 \times 0{,}15^3 \times 0{,}85^2 = 0{,}0244$
  A ´probabilidade de se encontrar 3 ou mais períodos ociosos é, portanto,
  $0{,}0001 + 0{,}0022 + 0{,}0244 = 0{,}0266$