3

Lista 2 - Solução

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.175:**

Média:

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

Variância:

$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{8}\right)^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{96}$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.176:**
  Seja $X \sim \text{Binomial}(n = 1000, p = 0{,}001)$. Portanto,
  $f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x}$, para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Assim:

  a) $P(X = 1) = 1000 \times 0{,}001^1 \times 0{,}999^{999} = 0{,}3681$

  b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}999^{1000} =$
  $= 0.6323$

  c) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
  $= 0{,}999^{1000} + 0{,}3681 + 0{,}1840 = 0{,}9198$

  d) $E(X) = np = 1{,}0000$ e
  $V(X) = np(1-p) = 0{,}9990$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.177:**
  Seja $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ o número de molas helicoidais não conformes, por batelada de tamanho $n = 50$ e $E(X) = np = 5$.
  Então, $f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x}$, para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, e:

  a) $n = 50$ e $E(X) = 5 = np \Rightarrow p = 0{,}10$

  b) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$
  $= 0{,}0052 + 0{,}0286 + 0{,}0779 = 0{,}1117$

  c) $P(X \geq 49) = P(X = 49) + P(X = 50) \cong 0$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.178:**
  a) Se X é o numero de ovos quebrados por dúzia, então $X \sim \text{Binomial}(n = 12, p = 0{,}01)$.

  b) $\text{P}(\text{X} > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$

  $= 1 - \binom{12}{0} \times 0{,}01^0 \times 0{,}99^{12} - \binom{12}{1} \times 0{,}01^1 \times 0{,}99^{11} =$

  $= 1 - 0{,}8864 - 0{,}1074 = 0{,}0062$

  c) $E(X) = np = 0{,}12$ e $V(X) = np(1 - p) = 0{,}1188$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.181:**
  Seja V o sinal estar verde, com $P(V) = 0{,}2$ e $P(V') = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Logo:

  a) $P(V' \cap V' \cap V' \cap V) = P(V')^3 \times P(V) =$
  $= 0{,}8^3 \times 0{,}2 = 0{,}1024$

  b) $P(V')^{10} = 0{,}8^{10} = 0{,}1074$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.182:**
  Seja $p = 0{,}6$ a probabilidade de a calibração do transdutor obedecer às especificações e X é o número de tentativas de calibração até que as especificações sejam obedecidas. Temos que $X \sim \text{Geométrica}(p)$.

  Logo, $f(x) = (1-p)^{x-1} \times p$, para $x = 1, 2, \ldots, \infty$.

  Portanto:

  $$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$
  $$= 0{,}6 + (1 - 0{,}6)^1 \times 0{,}6 + (1 - 0{,}6)^2 \times 0{,}6 =$$
  $$= 0{,}6 + 0{,}24 + 0{,}096 = 0{,}9360$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.185:**
  Seja X o número de carros que passam por um cruzamento, que segue uma distribuição de Poisson, $X \sim \text{Poisson}(\lambda T)$, com média $E(X) = \lambda T = 6$ carros por minuto. Portanto, $f(x) = \frac{e^{-(\lambda T)}(\lambda T)^x}{x!}$, para $x = 0, 1, \ldots, \infty$. Logo:

  a) $P(X = 0) = \frac{e^{-(6\times 0.5)}(6\times 0.5)^0}{0!} = 0{,}0498$, para $T = 0{,}5$ min.

  b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$
  $= 1 - 0{,}0498 - 0{,}1494 - 0{,}2240 = 0{,}5768$

  c) Por tentativa e erro, descobre-se que $P(X \leq 5) = 0{,}9161$, logo, com probabilidade no mínimo de 90%, passam pelo cruzamento até 5 carros, em 30 segundos (0,5 min.)

  d) A distribuição de Poisson pode ***não*** ser apropriada, uma vez que, nesta distribuição, valor esperado, $E(X)$, e variância, $V(X)$, são iguais.

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.191:**
  Seja X o tempo (isto é, o número de tentativas) até que $r = 4$ servidores falhem, com probabilidade de falhar a cada tentativa, $p = 0{,}0001$.

  A variável aleatória X segue uma distribuição binomial negativa, $X \sim \text{BinomialNegativa}(p, r)$.

  Logo:

  $E(X) = \frac{r}{p} = \frac{4}{0{,}0001} = 40.000$ unidades de tempo.

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.197:**
  Para que $\sum_i f(x_i) = 1$, para todo i = 1, 2, 3, 4 (propriedade axiomática da probabilidade), temos que

  $$c \times (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = c \times (1 + 2 + 3 + 4) = 1.$$

  Logo,

  $$c = 0{,}10.$$

Cap. 3 – Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuições de Probabilidades

- **Ex. 3.201:**
  A função de densidade de probabilidade em cada ponto, $f(x_i)$, pode ser determinada pela mudança na função de distribuição cumulativa dada, $F(x)$. Logo:

  $$f(2) = 0{,}2$$
  $$f(5{,}7) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$$
  $$f(6{,}5) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$$
  $$f(8{,}5) = 1{,}0 - 0{,}8 = 0{,}2$$

  Note-se que
  $x_1 = 2, x_2 = 5{,}7, x_3 = 6{,}5, x_4 = 8{,}5$

  e que
  $\sum_i f(x_i) = f(2) + f(5{,}7) + f(6{,}5) + f(8{,}5) = 1$