

4

Lista 3 - Solução

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 1:

$$\text{a) } P(1 < X) = P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^{\infty} = -e^{-\infty} + e^{-1} \cong 0,368$$

$$\text{b) } P(1 < X < 2,5) = \int_1^{2,5} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^{2,5} = -e^{-2,5} + e^{-1} \cong 0,286$$

$$\text{c) } P(X = 3) = \int_3^3 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_3^3 = -e^{-3} + e^{-3} = 0$$

$$\text{d) } P(X < 4) = \int_0^4 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^4 = -e^{-4} + e^0 = -0,018 + 1 \cong 0,982$$

$$\text{e) } P(3 \leq X) = P(X \geq 3) \int_3^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_3^{+\infty} = -e^{-\infty} + e^{-3} \cong 0,050$$

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 2:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 2,5) &= \int_{-\infty}^{2,5} f(x) dx = \int_2^{2,5} (0,5x - 1) dx = \left[0,5 \frac{x^2}{2} - x \right]_2^{2,5} \\ &= \left[0,5 \frac{2,5^2 - 2^2}{2} - (2,5 - 2) \right] = 0,5 \frac{2,25}{2} - 0,5 = 0,0625 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(X > 3) = \int_3^{+\infty} f(x) dx = \int_3^4 (0,5x - 1) dx = \left[0,5 \frac{x^2}{2} - x \right]_3^4 = \left[0,5 \frac{16 - 9}{2} - (4 - 3) \right] = 0,75$$

$$\text{c) } P(2,5 < X < 3,5) = \int_{2,5}^{3,5} (0,5x - 1) dx = \left[0,5 \frac{3,5^2 - 2,5^2}{2} - (3,5 - 2,5) \right] = 0,50$$

$$\text{d) } F(x) = P(X < x) = \int_2^x (0,5u - 1) du = \left[0,5 \frac{x^2 - 2^2}{2} - (x - 2) \right]$$

$$= \frac{x^2}{4} - x + 1, \text{ para } 2 \leq x \leq 4$$

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 2 (cont.):

$$e) \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_2^4 x(0,5x-1) dx = \left[0,5 \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_2^4$$

$$= \left[0,5 \frac{4^3 - 2^3}{3} - \frac{4^2 - 2^2}{2} \right] = \frac{56}{6} - \frac{12}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - \mu)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2 = \int_2^4 x^2 (0,5x-1) dx - \left(\frac{10}{3} \right)^2$$

$$= \left[0,5 \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 - \frac{100}{9} = \left[\frac{4^4 - 2^4}{8} - \frac{4^3 - 2^3}{3} \right] - \frac{100}{9} = \frac{2}{9}$$

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 3:

a) $E(X) = 1/\lambda = 10 \text{ min} \Rightarrow \lambda = 0,10 \text{ chamadas/min}$

$$P(X < 5) = \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^5 = \left[-e^{-0,1 \times 5} + e^0 \right] \cong 0,393$$

b) $P(5 < X < 15) = \int_5^{15} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_5^{15} = \left[-e^{-0,1 \times 15} + e^{-0,1 \times 5} \right] \cong 0,383$

c) $P(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = 0,9 \Rightarrow$

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \left[-e^{-\lambda u} \right]_0^x = \left[-e^{-0,1x} + e^0 \right] = 0,9 \Rightarrow$$

$$1 - 0,9 = e^{-0,1x} \Rightarrow \ln(e^{-0,1x}) = \ln(0,1) \Rightarrow x = -\ln(0,1) / 0,1 \cong 23 \text{ min}$$

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 4:

$$\text{a) } X \sim N(\mu = 5, \sigma = 0,2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$P(X > 5,5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{5,5 - 5}{0,2}\right) = P(Z > 2,5)$$

$$P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) = 1 - \underbrace{\Phi(2,5)}_{\text{olhar na tabela}} \cong 1 - 0,994 = 0,006$$

$$\text{b) } P(X < 4,5) + P(X > 5,5) = 1 - P(4,5 < X < 5,5) = 1 - P\left(\frac{4,5 - 5}{0,2} < Z < \frac{5,5 - 5}{0,2}\right)$$

$$= 1 - [P(Z < 2,5) - P(Z < -2,5)] = 1 - \{P(Z < 2,5) - [1 - P(Z < 2,5)]\}$$

$$= 1 - \underbrace{\Phi(2,5)}_{\text{olhar na tabela}} + 1 - \underbrace{\Phi(2,5)}_{\text{olhar na tabela}} \cong 2 - 2 \times 0,994 = 0,012$$

Cap. 4 – Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuições de Probabilidade

Ex. 4 (cont.):

$$\text{c) } P(Z < z) = 0,90 \Rightarrow \Phi(z) = 0,90 \Rightarrow z \cong 1,29$$

olhar na tabela

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \cong 1,29 \Rightarrow x \cong \mu + 1,29\sigma = 5 + 1,29 \times 0,2 = 5,258$$

$$P(X < 5,258) \cong 0,90$$