

1

Introdução à Probabilidade

ESQUEMA DO CAPÍTULO

1.1 MODELOS MATEMÁTICOS

1.2 INTRODUÇÃO AOS CONJUNTOS

**1.3 EXEMPLOS DE EXPERIMENTOS NÃO-
DETERMINÍSTICOS**

1.4 O ESPAÇO AMOSTRAL

1.5 EVENTOS

1.6 FREQUÊNCIA RELATIVA

**1.7 NOÇÕES FUNDAMENTAIS DE
PROBABILIDADE**

1.8 ALGUMAS OBSERVAÇÕES

1.1 Modelos Matemáticos

- “Todas as vezes que empregarmos Matemática a fim de estudar alguns fenômenos de observação, deveremos essencialmente começar por construir um modelo matemático (determinístico ou probabilístico) para esses fenômenos. Inevitavelmente, o modelo dever simplificar as coisas e certos pormenores dever ser desprezados. O bom resultado do modelo depende de que os pormenores desprezados sejam ou não realmente sem importância na elucidação do fenômeno estudado. A resolução do problema matemático pode estar correta e, não obstante, estar em grande discordância com os dados observados. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo matemático especificado é ou não adequado, *antes* que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade do modelo, deveremos *deduzir* um certo número de consequências de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados *previstos* com observações.” *J. Neyman*.

1.1 Modelos Matemáticos

- **Modelo determinístico:**
 - Modelo que estipule que as condições sob as quais um experimento seja executado **determinem** o resultado do experimento;
 - Exemplo: $I=E/R$, Lei de Ohm;
 - Outros exemplos: leis da gravitação, leis de Kepler etc.;
- **Modelo não-determinístico ou probabilístico:**
 - As condições sob as quais um experimento seja executado determinam somente o **comportamento probabilístico** (ou lei probabilística) do resultado observável;
 - Exemplo: Número de partículas α emitidas por um material radioativo;
 - Outros exemplos: observações meteorológicas etc.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Conjunto:
 - Coleção de objetos;
 - Representados por letras maiúsculas A, B etc.;
- Maneiras de descrever um conjunto:
 - Listagem explícita dos elementos de A:
 - $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 - Por meio de palavras:
 - A é a face que cai para cima em um lançamento de um dado sobre uma superfície plana;
 - Notação matemática:
 - $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$;
- Membros ou elementos de um conjunto:
 - Objetos que individualmente **formam** a coleção ou conjunto;
 - Escrevemos $a \in A$, quando a for um elemento de A, e $a \notin A$, quando a não for um elemento de A;

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Conjunto **fundamental**:
 - Conjunto de todos os objetos que estejam sendo estudados, usualmente representado pela letra U;
- Conjunto **vazio**:
 - Notação: \emptyset ;
- **Subconjuntos**:
 - Quando ser elemento do conjunto A implica em ser elemento do conjunto B, A é um subconjunto de B; notação:
 - $A \subset B$;
- Conjuntos **iguais**:
 - Quando dois conjuntos contiverem os mesmos elementos, eles serão iguais:
 - $A = B$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

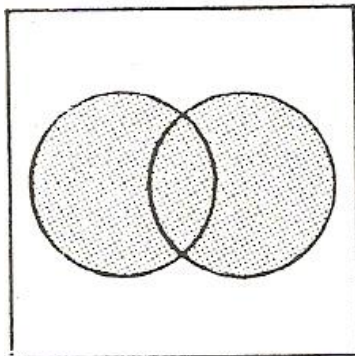
- **Propriedades** do conjunto vazio e do conjunto fundamental:
 - Para todo conjunto A , temos $\emptyset \subset A$;
 - Desde que se tenha definido o conjunto fundamental, então para todo conjunto A , considerado na composição de U , teremos $A \subset U$;
 - Exemplo: Seja
 $U =$ todos os números reais,
 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \mid (x-2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$, e
 $C = \{x \mid x = -3, 1, 2\}$. Então, $A \subset B$ e $B = C$;

1.2 Introdução aos Conjuntos

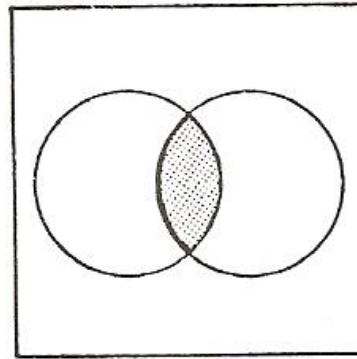
- Operações **fundamentais** com conjuntos:
 - União de conjuntos:
 - C é a **união** de A e B se $C = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ (ou ambos)}\}$;
 - Notação: $C = A \cup B$;
 - Interseção de conjuntos:
 - D é a **interseção** de A e B se $D = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$;
 - Notação: $D = A \cap B$;

1.2 Introdução aos Conjuntos

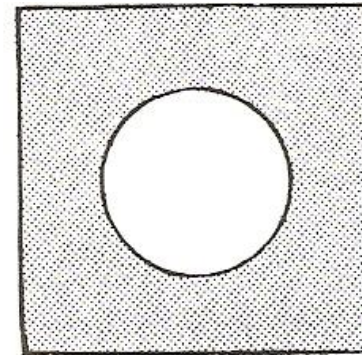
- Operações **fundamentais** com conjuntos (final):
 - Complemento de conjuntos:
 - \bar{A} é o complemento de A se $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$;
- Diagrama de Venn:



$A \cup B$



$A \cap B$



\bar{A}

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Leis comutativas:
 - a) $A \cup B = B \cup A$;
 - b) $A \cap B = B \cap A$;
- Leis associativas:
 - c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
 - d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Identidades de conjuntos:
 - e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
 - f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 - g) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 - h) $A \cup \emptyset = A$;
 - i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; (obs.: $A^c = \bar{A}$)
 - j) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 - k) $A^{c^c} = A$;

1.2 Introdução aos Conjuntos

- **Definição:**
 - Sejam dois conjuntos A e B . Denominaremos **produto cartesiano** de A e B , denotando-o por $A \times B$, o conjunto $\{(a,b), a \in A, b \in B\}$, isto é, o conjunto de todos os pares ordenados nos quais o primeiro elemento é tirado de A e o segundo, de B .
- **Exemplo:**
 - Suponha que $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Então, $A \times B = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,4), (2,1), \dots, (2,4), (3,1), \dots, (3,4)\}$;
- **Observação:**
 - em geral, $A \times B \neq B \times A$, pois, por exemplo, $(3, 4) \neq (4, 3)$.

1.2 Introdução aos Conjuntos

- Classificação dos conjuntos quanto ao número de elementos:
 - Conjunto **finito**
 - quando nele existir um número finito de elementos;
 - Conjunto **infinito numerável**
 - quando existir uma correspondência biunívoca entre os seus elementos e o conjunto dos inteiros positivos;
 - Conjunto **infinito não-numerável**
 - quando nele existir número infinito não-enumerável de elementos;

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- E_1 : jogue um dados e observe o número mostrado na face de cima;
- E_2 : jogue uma moeda quatro vezes e observe o número de caras obtido;
- E_3 : jogue uma moeda quatro vezes e observe a frequência obtida de caras e coras;
- E_4 : Em uma linha de produção, fabrique peças em série e conte o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas;
- E_5 : Um asa de um avião é fixada por um grande número de rebites; conte o número de rebites defeituosos;
- E_6 : Um lâmpada é fabricada; em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar;
- E_7 : Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas; as peças são retiradas uma a uma (sem reposição) até que a última peça defeituosa seja encontrada; o número de peças retiradas do lote é contado;

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- E_8 : Peças são fabricadas até que 10 peças defeituosas sejam produzidas; o número total de peças fabricadas é contado;
- E_9 : Um míssil é lançado; em um momento específico t , suas três velocidades componentes v_x , v_y e v_z são observadas;
- E_{10} : Um míssil recém-lançado é observado nos instantes t_1, t_2, \dots, t_n ; em cada um destes instantes, a altura do míssil acima do solo é registrada;
- E_{11} : A resistência à tração de uma barra metálica é medida;
- E_{12} : De uma urna, que só contém bolas pretas, tira-se uma bola e verifica-se sua cor;
- E_{13} : Um termógrafo registra a temperatura continuamente, num período de 24 horas; em determinada localidade e uma data específica, esse termógrafo é lido;
- E_{14} : Na situação descrita em E_{13} , x e y , as temperaturas mínima e máxima, no período de 24 horas considerado, são registradas.

1.3 Exemplos de Experimentos Não-determinísticos

- Pontos em comum dos experimentos anteriores:
 - a) cada experimento poderá ser repetido indefinidamente sob condições essencialmente inalteradas;
 - b) muito embora não sejamos capazes de afirmar que resultado particular ocorrerá, seremos capazes de descrever o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento;
 - c) quando o experimento for executado repetidamente, os resultados individuais parecerão ocorrer de uma forma acidental; contudo, quando o experimento for repetido um grande número de vezes, uma configuração definida ou uma regularidade surgirá.

1.4 O Espaço Amostral

- Definição:
 - Para cada experimento ε do tipo que estamos considerando, definiremos o espaço amostral como o conjunto S de todos os resultados possíveis de ε (neste contexto, S representa o conjunto fundamental U , anteriormente explicado);
- Exemplos:
 - $S_1: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 - $S_2: \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
 - $S_3: \{\text{todas as sequências possíveis da forma } a_1, a_2, a_3, a_4\}$, em que $a_i = H$ ou T , conforme apareça cara ou coroa na i -ésima jogada;
 - $S_4: \{0, 1, 2, \dots, N\}$, em que N é o número máximo que pode ser produzido em 24 horas;
 - $S_5: \{0, 1, 2, \dots, M\}$, em que M é o número de rebites empregado;
 - $S_6: \{t \mid t \geq 0\}$;
 - $S_7: \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

1.4 O Espaço Amostral

- Exemplos (continuação):
 - S_8 : $\{10, 11, 12, \dots\}$;
 - S_9 : $\{v_x, v_y, v_z \mid v_x, v_y \text{ e } v_z \text{ sejam número reais}\}$;
 - S_{10} : $\{h_1, \dots, h_n \mid h_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$;
 - S_{11} : $\{T \mid T \geq 0\}$;
 - S_{12} : $\{\text{preta}\}$;
 - S_{13} : $\{f \mid f \text{ uma função derivável que satisfaça } m \leq f(t) \leq M, \text{ para todo } t\}$;
 - S_{14} : $\{(x,y) \mid m \leq x \leq y \leq M\}$, isto é, S_{14} é formado por todos os pontos dentro e sobre o triângulo no plano x, y bidimensional.

1.5 Eventos

- Definição:
 - O evento A , relativo a um particular espaço amostral S associado a um experimento ε , é um conjunto de resultados possíveis;
- Exemplos:
 - A_1 : Um número par ocorre, isto é, $A = \{2, 4, 6\}$;
 - A_2 : $\{2\}$; isto é, exatamente duas caras ocorrem;
 - A_3 : $\{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$; isto é, mais caras do que coroas ocorreram;
 - A_4 : $\{0\}$; isto é, todas as peças são perfeitas;
 - A_5 : $\{3, 4, \dots, M\}$; isto é, mais do que dois rebites eram defeituosos;
 - A_6 : $\{t \mid t \leq 3\}$; isto é, a lâmpada queima em menos de 3 horas;
 - A_{14} : $\{(x,y) \mid y = x+20\}$; isto é, a temperatura máxima é 20° maior que a mínima.

1.5 Eventos

- Eventos:
 - Quando o espaço amostral S for finito ou infinito numerável, **todo** subconjunto poderá ser considerado um evento;
 - Se S contiver n elementos:
 - Número de eventos possíveis 2^n .
 - Para espaços amostrais não-numeráveis alguns subconjuntos ‘não-admissíveis’ devem ser excluídos (assunto fora do escopo deste texto).

1.5 Eventos

- Combinação de eventos:
 - a) se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A **ou** B (ou ambos) ocorrerem;
 - b) se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A **e** B ocorrerem;
 - c) se A for um evento, \bar{A} será o evento que ocorrerá se, e somente se, **não** ocorrer A ;
 - d) se A_1, \dots, A_n for qualquer coleção finita de eventos, então, $\cup_{i=1}^n A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, **ao menos** um dos eventos A_i ocorrer;
 - e) se A_1, \dots, A_n for qualquer coleção finita de eventos, então, $\cap_{i=1}^n A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, **todos** os eventos A_i ocorrerem;

1.5 Eventos

- f) se A_1, \dots, A_n, \dots for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, **ao menos** um dos eventos A_i ocorrer;
- g) se A_1, \dots, A_n for qualquer coleção infinita (numerável) de eventos, então, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, **todos** os eventos A_i ocorrerem;
- h) suponha que S represente o espaço amostral associado a algum experimento ε , e que nós executemos ε duas vezes. Então $S \times S$ poderá ser empregado para representar todos os resultados dessas duas repetições. Portanto, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultou quando ε foi executado a primeira vez e que s_2 , quando ε foi executado a segunda vez;
- i) o exemplo contido em (h) pode, obviamente, ser generalizado para n execuções.

1.5 Eventos

- Definição:
 - Dois eventos, A e B, são denominados **mutuamente excludentes**, se eles não puderem ocorrer juntos. Expressaremos isso escrevendo $A \cap B = \emptyset$, isto é, a interseção de A e B é o conjunto vazio.
- Exemplo:
 - Um dispositivo eletrônico é ensaiado e o tempo total de serviço t é registrado. Admitiremos que o espaço amostral seja $S = \{t \mid t \geq 0\}$. Sejam A, B e C três eventos definidos como $A = \{t \mid t < 100\}$, $B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}$, $C = \{t \mid t > 150\}$.
 - Consequentemente:
 - $A \cup B = \{t \mid t \leq 200\}$;
 - $B \cup C = \{t \mid t \geq 50\}$;
 - $A \cup C = \{t \mid t < 100 \text{ ou } t > 150\}$;
 - $\bar{A} = \{t \mid t > 100\}$.
 - $A \cap B = \{t \mid 50 \leq t < 100\}$;
 - $B \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\}$;
 - $A \cap C = \emptyset$;

1.6 Frequência Relativa

- **Definição:**
 - $f_A = n_A/n$ é denominada *frequência relativa* do evento A nas n repetições de ε . A frequência relativa f_A apresenta as seguintes propriedades, de fácil verificação:
 - 1) $0 \leq f_A \leq 1$;
 - 2) $f_A = 1$ se, e somente se, A ocorrer em *todas* as n repetições;
 - 3) $f_A = 0$ se, e somente se, A *nunca* ocorrer nas n repetições;
 - 4) se A e B forem eventos mutuamente excludentes, e se $f_{A \cup B}$ for a frequência relativa associada ao evento $A \cup B$, então $f_{A \cup B} = f_A + f_B$;
 - 5) f_A , com base em n repetições do experimento e considerada como uma função de n , “converge” em certo sentido probabilístico para $P(A)$, quando $n \rightarrow \infty$.

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Problema:
 - atribuir um número a cada evento A , o qual avaliará quão verossímil será a ocorrência de A quando o experimento for realizado;
- Definição (**definição axiomática da probabilidade**):
 - Seja ε um experimento. Seja S um espaço amostral associado a ε . A cada evento A associaremos um número real representando por $P(A)$ e denominado probabilidade de A , que satisfaça às seguintes propriedades:
 - 1) $0 \leq P(A) \leq 1$;
 - 2) $P(S) = 1$;
 - 3) se A e B forem eventos mutuamente excludentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
 - 4) se $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ forem, dois a dois, eventos mutuamente excludentes, então, $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 1:
 - Se \emptyset for o conjunto vazio, então $P(\emptyset) = 0$.
- Demonstração:
 - Para qualquer evento A , podemos escrever $A = A \cup \emptyset$. Uma vez que A e \emptyset são mutuamente excludentes, decorre da Propriedade 3 que $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$. Daqui, a conclusão é imediata.
- Teorema 2:
 - Se \bar{A} for o evento complementar de A , então $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- Demonstração:
 - Podemos escrever $S = A \cup \bar{A}$ e, empregando as Propriedades 2 e 3, obteremos $P(S) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$.

1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 3:
 - Se A e B forem dois eventos quaisquer, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Demonstração:
 - A ideia desta demonstração é decompor $A \cup B$ e B em dois eventos mutuamente excludentes e, em seguida, aplicar a Propriedade 3 (veja o Diagrama de Venn na figura). Deste modo escrevemos

$$A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}),$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$$

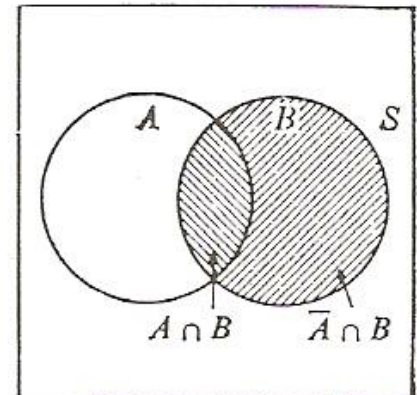
Consequentemente,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}),$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}).$$

Subtraindo-se a segunda igualdade da primeira, obtém-se:

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

qqd.



1.7 Noções Fundamentais de Probabilidade

- Teorema 4:
 - Se A, B e C forem três eventos quaisquer, então
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$
- Demonstração:
 - (deixada como exercício)
- Teorema 5:
 - Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
- Demonstração:
 - Podemos decompor B em dois eventos mutuamente excludentes, na seguinte forma: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$.
Consequentemente, $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$, porque $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$, pela Propriedade 1.

1.8 Algumas Observações

Observações:

- a) não estamos abandonando todas as relações determinísticas;
- b) a escolha entre a adoção de um modelo determinístico ou um modelo probabilístico pode depender da complicação de nossa técnica de mensuração e da exatidão associada a ela;
- c) sob certas circunstâncias teremos condições de chegar a um método baseado em considerações físicas para avaliação das probabilidades básicas (que devem satisfazer aos axiomas básicos da probabilidade); exemplo: $P(H) = P(T) = 0.5$, para moedas honestas;
- d) no desenvolvimento das ideias básicas da teoria da probabilidade, faremos referências a analogias mecânicas;
- e) sob certas circunstâncias, poderemos fazer suposições adicionais que conduzam a um método para avaliação das probabilidades ou poderemos ter que recorrer à experimentação, quando a frequência relativa desempenhará um papel importante, pois $f_A \approx P(A)$.