2 Espaços Amostrais Finitos

ESQUEMA DO CAPÍTULO

2.1 Espaço Amostral Finito

- O espaço amostral S é formado por um número *finito* de elementos;
- S pode ser escrito sob a forma:
  – $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$;
- Exemplos:
  – São finitos os espaços S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7, S_{12}, anteriormente descritos Cap. 1.

2.1 Espaço Amostral Finito

- Caracterização da probabilidade P(A), para

  $A = \{a_i\}$,

  ou seja, um resultado simples, ou evento simples ou evento elementar:

  – A cada evento simples a_i associa-se um número p_i que satisfaça às seguintes propriedades

    a) $p_i \geq 0$, i = 1, 2, ..., k;

    b) $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

    Obs: Essas condições devem ser (e são!) coerentes com aquelas postuladas para as probabilidades dos eventos em geral (definição axiomática da probabilidade).

2.1 Espaço Amostral Finito

- Caracterização da probabilidade P(A), para eventos constituídos por r resultados, $1 \leq r \leq k$, a saber

  $$A = \{a_{j1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\},$$

  em que $j_1, j_2, ..., j_r$ representam qualquer um dos r índices, de 1 a k:

  – $P(A) = p_{j1} + p_{i2} + ... + p_{ir}$.

    Obs: Essas é uma conclusão direta da Propriedade 4 da definição axiomática da probabilidade.

2.1 Espaço Amostral Finito

- Exemplo:
  - Suponha que somente três resultados sejam possíveis em um experimento, a saber a_1, a_2 e a_3. Além disso, suponha-se que a_1 seja duas vezes mais provável de ocorrer que a_2, o qual por sua vez é duas vezes mais provável de ocorrer que a_3.

Portanto, $p_1 = 2p_2$ e $p_2 = 2p_3$. Já que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, teremos $4p_3 + 2p_3 + p_3 = 1$, o que finalmente dá

$$p_3 = 1/7,\ p_2 = 2/7 \text{ e } p_1 = 4/7.$$

2.2 Resultados Igualmente Verossímeis

- Hipótese mais frequente para espaços amostrais finitos:
  - Eventos elementares são igualmente verossímeis (igualmente prováveis);
  - É uma hipótese errada, entretanto, para muitas situações experimentais;
- Se todos os k resultados possíveis $a_1, a_2, \ldots, a_k$ forem igualmente verossímeis, segue-se que:
  - $p_i = P(a_1) = 1/k$,

    pois a condição $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ torna-se $kp_i = 1$ para todo i;
- Além disso, para qualquer evento A formado por r resultados, teremos:
  - $P(A) = r/k$.

2.2 Resultados Igualmente Verossímeis

- O método anteriormente descrito para avaliar P(A) é frequentemente enunciado da seguinte maneira:
  - $P(A) = \dfrac{\text{número de casos favoráveis a A pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}$;

- Exemplo:
  - Um dados equilibrado é lançado (todos os resultados se supõem igualmente verossímeis).

    O evento A ocorrerá se, e somente se, um número maior que 4 aparecer, isto é, A = {5, 6}. Consequentemente,

    P(A) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3.

2.2 Resultados Igualmente Verossímeis

- Exemplo:
  - Um moeda equilibrada é atirada duas vezes. Seja A o evento {aparece uma cara}. Na avaliação de P(A), a análise (errada!) do problema poderia ser a seguinte:

    O espaço amostral é S = {0, 1, 2}, em que cada resultado representa o número de caras que ocorrer. Portanto, sob a hipótese (errada!) de eventos igualmente verossímeis seria encontrada

    $$P(A) = 1/3.$$

  - Na verdade, o espaço amostral (de eventos igualmente verossímeis) é

    $$S' = \{HH, HT, TH, TT\},$$

    em que H (*head*) representa cara e T (*tail*), coroa. Assim, a solução correta do problema proposto é

    $$P(A) = \text{números de casos favoráveis / número de casos possíveis} = 2/4 = 1/2.$$

  - Obs.: Poderíamos obviamente utilizar corretamente o espaço amostral S se lembrarmos que os resultados 0 e 2 são igualmente verossímeis, enquanto o resultado 1 é duas vezes mais provável, pois pode ocorrer de duas formas, HT e TH.

2.2 Resultados Igualmente Verossímeis

- Definições:

a) Escolher ao acaso um objeto, dentre N objetos $a_1, a_2, \ldots, a_N$, significa que cada objeto tem a mesma probabilidade de ser escolhido, isto é,

$$P(a_i) = 1/N, \; i = 1, 2, \ldots, N;$$

b) Escolher ao acaso dois objetos, dentre N objetos, significa que cada par de objetos (deixada a ordem à parte) tem a mesma probabilidade de ser escolhido que qualquer outro par;

Obs.: Esta formulação levanta a questão de quantos pares K diferentes existem, a ser resolvida mais adiante;

c) Escolher ao acaso *n* objetos ($n \leq N$) dentre N objetos significa que cada ênupla, a saber $a_{a1}, a_{a2}, \ldots, a_{iN}$, é tão provável de ser escolhida quanto qualquer outra ênupla.

2.3 Métodos de Enumeração

- Exemplo:

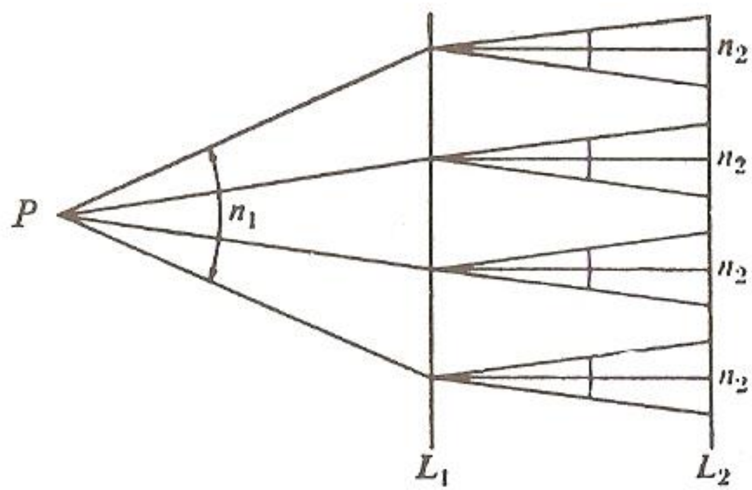
  Uma partida de cem peças é composta de 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas. Dez dessas peças são escolhidas ao acaso, sem reposição de qualquer peça escolhida antes que a seguinte seja escolhida. Qual é a probabilidade de que exatamente metades das peças escolhidas seja defeituosa?

  Solução: Precisamos ter condições de responder (a) quantos resultados $(i_1, i_2, ..., i_{10})$ existem no espaço amostral S, em que i_i é o tipo (defeituosa ou perfeita) de peça na i-ésima extração e (b) dentre estes quanto têm a característica de que exatamente a metade das peças seja defeituosa?

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

A. Regra da Multiplicação: Se o procedimento 1 puder ser executado de n_1 maneiras distintas e o procedimento 2, de n_2 maneiras distintas, então o procedimento formado por 1 seguido de 2 poderá ser executado de $n_1 \times n_2$ maneiras distintas.



2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

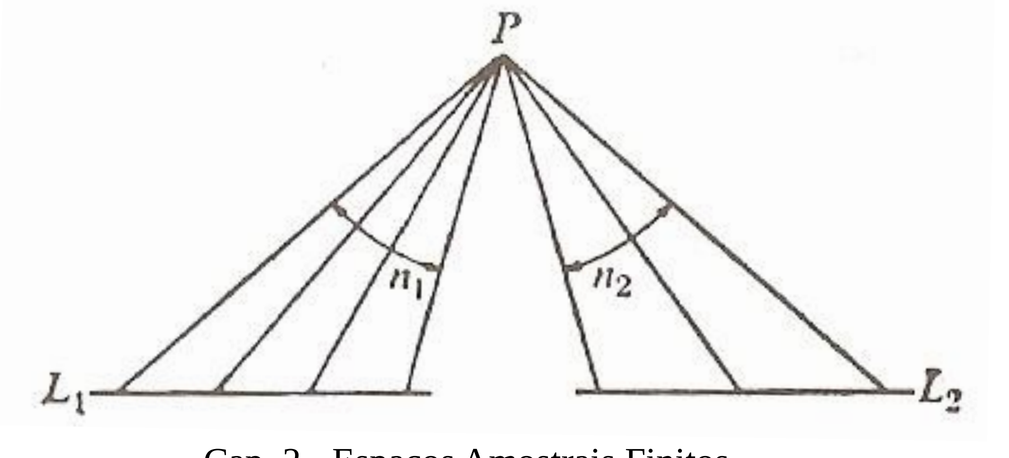
A. Regra da Multiplicação - Exemplo: Uma peça manufaturada deve passar por três estações de controle. Em cada estação, a peça é inspecionada para determinada característica e marcada adequadamente. Na primeira estação, três classificações são possíveis, enquanto nas duas últimas, quatro classificações são possíveis. De quantas maneiras a peça pode ser marcada?

Solução: Existem $3 \times 4 \times 4 = 48$ maneiras.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

B. Regra da Adição: Se o procedimento 1 puder ser executado de n_1 maneiras distintas e o procedimento 2, de n_2 maneiras distintas, e os dois procedimentos não puderem ocorrer simultaneamente, então o número de maneiras pelas quais poderemos realizar ou 1 ou 2 será $n_1 + n_2$ maneiras distintas.



2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

B. Regra da Adição - Exemplo: Uma viagem está sendo planejada e deve-se escolher entre o transporte por ônibus ou por trem. Se existem três rodovias possíveis e duas ferrovias, quantos caminhos disponíveis há para a viagem?

Solução: Existem 3 + 2 = 5 caminhos disponíveis.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

C. Permutação e Arranjos:

a) Se temos n objetos diferentes, podemos dispor (permutar) estes n objetos de ${}_nP_n$ maneiras, igual a

$${}_nP_n = n!,$$

em que $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 1$ é denominado fatorial de n.

b) Se temos n objetos diferentes para escolher r destes objetos, $0 \leq r \leq n$, e permutar os r escolhidos, podemos dispor (arranjar) estes objetos de ${}_nA_r$ maneiras, igual a

$${}_nA_r = n!/(n - r)!.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações:

a) Se temos n objetos diferentes, podemos dispor .sem considerar a ordem (combinar), r destes objetos de C maneiras, igual a

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Obs.: Um símbolo empregado este número, que surge em muitas passagens é

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

Em probabilidade, $\binom{n}{k}$ somente fica definido para n inteiro positivo e r um inteiro tal que $0 \le r \le n$. Contudo, ele pode ser definido de modo mais geral, para qualquer número real n e para qualquer inteiro não negativo r, na forma seguinte:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações:

– Os números $\binom{n}{k}$ são frequentemente denominados coeficientes binomiais, pois aparecem como coeficientes no desenvolvimento da expressão binomial:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

– Propriedades:

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$;

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$;

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: Dentre oito pessoas, quantas comissões (a ordem não importa) distintas de três membros podem ser escolhidas?

Solução: $\binom{8}{3} = 56$ comissões distintas.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: Um grupo de oito pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Quantas comissões de três pessoas podem ser constituídas, que incluam exatamente dois homens?

Solução: Devemos escolher inicialmente dois homens (entre os cinco) e depois escolher um mulher (dentre as três possíveis), o que resulta em

$\binom{5}{2}\times\binom{3}{1} = 30$ comissões distintas.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: Quantos subconjuntos (ou partes) há de um conjunto constituído de *n* elementos?

Solução 1: Associando-se a cada elemento o valor *um* ou *zero*, conforme este elemento *esteja* ou *não* no subconjunto, podemos usar a Regra da Multiplicação que nos diz que existem $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ subconjuntos;

Solução 2: Para obter subconjuntos podemos escolher um conjunto vazio, ou um conjunto constituído exatamente por um elemento ou um conjunto constituído exatamente por dois elementos e assim sucessivamente, o que pelo da Regra da Adição fornece

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} \text{ maneiras,}$$

que é exatamente o desenvolvimento de $(1 + 1)^n = 2^n$.

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: De uma partida formada por 20 peças defeituosas e 80 peças perfeitas, escolhemos ao acaso 10 (sem reposição). Qual a probabilidade de achar exatamente 5 peças defeituosas?

Solução: Se utilizarmos a definição

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}}{\text{número total de casos pelos quais } \varepsilon \text{ pode ocorrer}};$$

temos $\binom{100}{10}$ formas de escolher 10 peças ao acaso, $\binom{20}{5}$ formas de escolher exatamente 5 peças defeituosas entre as 20 possíveis e $\binom{80}{5}$ formas de escolher exatamente 5 peças perfeitas entre as 80 possíveis, o que fornece

$$P(A) = \frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = 0{,}021.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: A generalização do exemplo anterior consiste em considerar N peças, r_1 das quais pertencente à classe A e r_2, à classe B (com $r_1 + r_2 = \mathrm{N}$). A probabilidade de que as n peças escolhidas sejam exatamente s_1 da classe A e (n-s_1) da classe B será dada por

$$\frac{\binom{r_1}{s_1}\binom{r_2}{n-s_1}}{\binom{\mathrm{N}}{n}}.$$

(a expressão acima é denominada probabilidade hipergeométrica)

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

D. Combinações - Exemplo: Dois objetos são escolhidos ao acaso, dentre quatro, denominados *a*, *b*, *c* e *d*. Qual a probabilidade de ocorrência do evento A={o objeto *c* é escolhido}, sem reposição e com reposição?

Solução (sem reposição): sem reposição o espaço amostral poderá ser representado por S = {(*a*, *b*); (*a*, *c*); (*b*, *c*); (*b*, *d*); (*c*, *d*); (*a*, *d*)}, que possui $\binom{4}{2}$ = 6 resultados possíveis e igualmente prováveis. (Cada um dos resultados indica quais objetos escolhidos e não a ordem.) Logo:

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Solução (com reposição): com reposição o espaço amostral poderá ser representado por S' = {(*a*, *a*); (*a*, *b*); (*a*, *c*); (*a*, *d*); ... (*d*, *d*)}, que conta com $4^2 = 16$ resultados possíveis e igualmente prováveis. (Cada resultado indica os objetos e a ordem.) Logo:

$$P(A) = 7/16.$$

2.3 Métodos de Enumeração

Técnicas Sistemáticas de Enumeração

E. Permutação com Alguns Elementos Repetidos:

a) Se temos n objetos, tais que n_1 sejam de uma primeira espécie, n_2 de uma segunda espécie, ..., n_k de uma k-ésima espécie, com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, então o número de permutações possíveis destes n objetos é dado por

$$n!/(n_1!\, n_2! ... n_k!).$$