3 Probabilidade Condicionada e Independência

ESQUEMA DO CAPÍTULO

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Probabilidade condicionada** é um conceito que pode auxiliar em muitas situações reais;
- **Exemplo:** No lote de 20 peças defeituosas e 80 peças não-defeituosas estudada no Cap. 2, suponha que escolhemos duas peças deste lote e estejamos interessados nos dois eventos:

  A = {a primeira peça é defeituosa} e B = {a segunda peça é defeituosa}.

  Solução: Se estivermos extraindo *com* reposição, temos P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5.

  Solução II: Se estivermos extraindo *sem* reposição, naturalmente ainda é verdade que P(A) = 1/5, mas o cálculo de P(B) depende do conhecimento da composição do lote antes de extrair a segunda peça.

- **Definição:** Sejam A e B dois eventos associados ao experimento ε. Denotaremos por $P(B|A)$ a **probabilidade condicionada** do evento B quando o evento A tiver ocorrido.

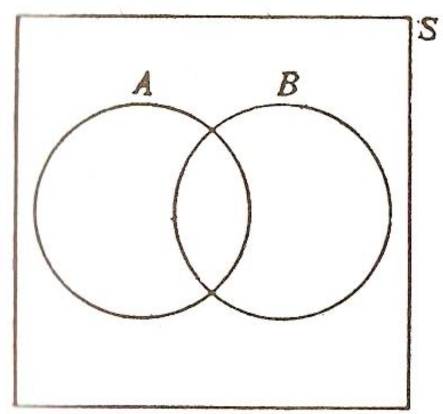
3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo II:** Ainda com relação ao lote do exemplo anterior, temos

  P(B|A) = 19/99,

  porque se A tiver ocorrido, então para a segunda extração restarão somente 99 peças, das quais 19 são defeituosas;

  Obs.: Para calcularmos P(B|A), estamos calculando P(B) em relação ao espaço amostral reduzido A, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original S (ver Diagrama de Venn).



3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:**

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{desde que } P(A) > 0.$$

Obs.:

a) Isto não é um teorema nem um axioma;

b) É simples verificar que P(B|A), para A fixado, satisfaz aos vários postulados de probabilidade;

c) Se A = S,

$P(B|S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$;

d) A cada evento $B \subset S$, poderemos associar dois números, P(B), a probabilidade (não-condicionada) de B, e P(B|A), a probabilidade condicionada de B, desde que algum evento A (para o qual P(A) > 0) tenha ocorrido;

e) A probabilidade condicionada está definida em termos da medida de probabilidade não-condicionada P, isto é, se conhecermos P(B) para todo $B \subset S$, poderemos calcular P(B|A), para todo $B \subset S$.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Formas de calcular a probabilidade condicionada P(B|A):**

a) Diretamente, pela consideração da probabilidade de B em relação ao espaço amostral reduzido A;

b) Empregando a definição anterior, em que $P(A \cap B)$ e $P(A)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original S.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Suponha-se que um escritório possua 100 máquinas de calcular, algumas elétricas (E) e outras manuais (M), algumas novas (N) e outras usadas (U), conforme apresentado na tabela abaixo.

	E	M	total
N	40	30	70
U	20	10	30
total	60	40	100

Uma pessoa entra no escritório, pega uma máquina ao acaso, e descobre que é nova. Qual a probabilidade de que seja elétrica (isto é, procuramos P(E|N)?

- **Solução I:** Considerando apenas o espaço amostral reduzido N (isto é, as 70 máquinas novas), temos

$$P(E|N) = 40/70 = 4/7;$$

- **Solução II:** Empregando a definição de probabilidade condicionada, temos que

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = 4/7.$$

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:** Importante consequência da definição de probabilidade condicionada anteriormente fornecida é escrever

  $$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = P(A|B) \times P(B),$$

  denominada teorema da multiplicação.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Considerando novamente o problema das 20 peças defeituosas e 80 não-defeituosas, anteriormente estudado, qual será a probabilidade de duas peças escolhidas ao acaso serem ambas defeituosas?
- **Solução:** Sejam os eventos

  A={a primeira peça é defeituosa} e

  B = {a segunda peça é defeituosa}.

  Desejamos encontrar $P(A \cap B)$, que pode ser calculada pelo teorema da multiplicação

  $$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 19/99 \times 1/5 = 19/495.$$

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Definição:**

  Dizemos que os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$, representam uma partição do espaço amostral S, quando

  a) $B_i \cap B_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$;

  b) $\cup^{k}_{i=1} B_i = S$;

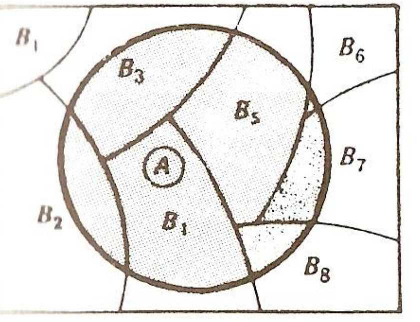
  c) $P(B_i) > 0$, para todo i.

  Em outras palavras, quando o experimento ε é realizado *um*, *e somente um*, dos eventos B_i ocorre.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Teorema da Probabilidade Total:**

  Consideremos A um evento qualquer referente a S e B_1, B_2, ..., B_k, uma partição de S (ver Diagrama de Venn, para k=8).



  Portanto, podemos escrever

  $$A = A\cap B_1 \cup A\cap B_2 \cup \ldots \cup A\cap B_k.$$

  Como os eventos $A\cap B_i$ são mutuamente excludentes dois a dois podemos escrever

  $$P(A) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2) + \ldots + P(A\cap B_k).$$

  Escrevendo cada termo $P(A\cap B_i)$ na forma $P(A|B_k)\times P(B_k)$ temos

  $$P(A) = P(A|B_1)\times P(B_1) + P(A|B_2)\times P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)\times P(B_k),$$

  denominado **teorema da probabilidade total**.

3.1 Probabilidade Condicionada

- **Exemplo:** Voltando novamente no lote de 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas, definimos os eventos A = {a primeira peça é defeituosa} e B = {a segunda peça é defeituosa}. Calcular P(B).

- **Solução:** Utilizando o teorema da probabilidade total, temos

$$P(B) = P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A}),$$

igual a

$$P(B) = \frac{19}{99} \times \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Obs.: Este é um resultado surpreendente, quando lembramos que extraindo com reposição obtivemos P(B) = 1/5.

3.2 Teorema de Bayes

- **Definição:**

Seja B_1, B_2, ..., B_k, uma partição do espaço amostral S e seja A um evento associado a S. Aplicando-se a definição de probabilidade condicionada, podemos escrever

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \times P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A \mid B_j) \times P(B_j)}.$$

Este resultado é conhecido como **Teorema de Bayes**, também denominado fórmula da probabilidade das causas ou antecedentes.

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo:**
  Um determinada peça é manufaturada por três fábricas, 1, 2 e 3. Sabe-se que 1 produz o dobro de peças que 2, e que 2 e 3 produziram o mesmo número de peças. Sabe-se que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto que 4% daquelas produzidas por 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas em um depósito e depois uma delas é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de que seja defeituosa?
- **Solução:** Sejam os eventos A = {a peça e defeituosa} e B_i = {a peça provém de *i*}. Como os eventos B_i são mutuamente excludentes, pelo teorema da probabilidade total podemos escrever

  $$P(A) = P(A|B_1)\times P(B_1) + P(A|B_2)\times P(B_2) + P(A|B_3)\times P(B_3),$$

  que fornece

  $$P(A) = 0{,}02 \times 1/2 + 0{,}02\times 1/4 + 0{,}04\times 1/4 = 0{,}025.$$

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo (continuação):**

  Suponha que uma peça retirada do depósito seja identificada como defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica 1?

- **Solução:** Reutilizando a notação definida, o que se pede é $P(B_1|A)$, claramente uma aplicação do Teorema de Bayes, ou fórmula da probabilidade das causas, que nos permite obter as probabilidades condicionais $P(B_i|A)$ em termos das probabilidade já conhecidas $P(A|B_i)$. Assim, temos

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \times P(B_1)}{P(A \mid B_1) \times P(B_1) + P(A \mid B_2) \times P(B_2) + P(A \mid B_3) \times P(B_3)}$$

$$P(B_1 \mid A) = \qquad = \frac{0{,}02 \times 1/2}{0{,}02 \times 1/2 + 0{,}02 \times 1/4 + 0{,}04 \times 1/4} = 0{,}40.$$

3.2 Teorema de Bayes

- **Exemplo II:** A probabilidade de que um teste identifique corretamente alguém com uma doença, dando positivo, é 0,99; e a probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. A incidência da doença na população em geral é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual é a probabilidade de que você tenha a doença?
- **Solução:** Faça D denotar o evento em que você tenha a doença e faça S denotar o evento em que o teste seja positivo. A probabilidade requerida pode ser denotada como P(D|S). A probabilidade de que o teste identifique corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é 0,95. Consequentemente, a probabilidade de um teste positivo sem a doença é P(S|D′) = 0,05. Do Teorema de Bayes,

$$P(D\,|\,S)=\frac{P(S\,|\,D)\times P(D)}{P(S\,|\,D)\times P(D)+P(S\,|\,D')\times P(D')}=\frac{0{,}99\times 0{,}0001}{0{,}99\times 0{,}0001+0{,}05\times(1-0{,}0001)}=0{,}002.$$

3.3 Eventos Independentes

- **Definição:**

  A e B serão eventos independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- **Obs.:** Esta definição equivale a dizer que se A e B são independentes quando

  $$P(B|A) = P(B) \text{ e } P(A|B) = P(A).$$

- **Obs. II:** Na maioria das aplicações, teremos que adotar a hipótese de independência de dois eventos A e B e depois empregá-la para calcular $P(A \cap B)$ por meio de $P(A) \times P(B)$.

3.3 Eventos Independentes

- **Exemplo:**

  Um grande lote de 10.000 peças possui 10% defeituosas. Duas peças são extraídas. Qual a probabilidade de ambas estarem perfeitas?

- **Solução I:** Definamos os eventos A = {a primeira peça é perfeita} e B = {a segunda peça é perfeita}. Admitindo-se que a primeira peça seja reposta, temos que os eventos A e B podem ser considerados independentes e portanto

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81.$

- **Solução II:** Sejam os mesmo eventos A e B anteriormente definidos. Sem reposição teremos que

  $P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) = 8999/9999 \times 0{,}9 \cong 0{,}81.$

- **Obs.:** Neste caso, a hipótese de independência simplifica os cálculos e acarreta apenas um erro desprezível. Isto não seria verdade se o lote fosse pequeno.

3.3 Eventos Independentes

- **Definição:**

  Diremos que três eventos A, B e C são mutuamente independentes se, e somente se, todas as condições seguintes forem válidas

  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$,

  $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

- **Definição:**

  Os n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, serão mutuamente independentes se, e somente se, tivermos, para $k = 2, 3, \ldots, n$,

  $P(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}) = P(A_{i1}) \times P(A_{i2}) \times \ldots \times P(A_{ik})$

  (**Obs.:** existem ao todo $2^n - n - 1$ condições deste tipo).

3.3 Eventos Independentes

- **Exemplo:**
  Entre seis parafusos, dois são menores do que um comprimento especificado. Se dois forem escolhidos ao acaso, qual será a probabilidade de que os dois parafusos mais curtos sejam extraídos? Seja o evento A_i = {o *i*-ésimo parafuso escolhido é curto}, para $i = 1, 2$.

- **Solução I:** A solução correta é

  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1) \times P(A_1) = 1/5 \times 2/6 = 1/15.$

- **Solução II:** A solução comum, e incorreta, é obtida escrevendo-se

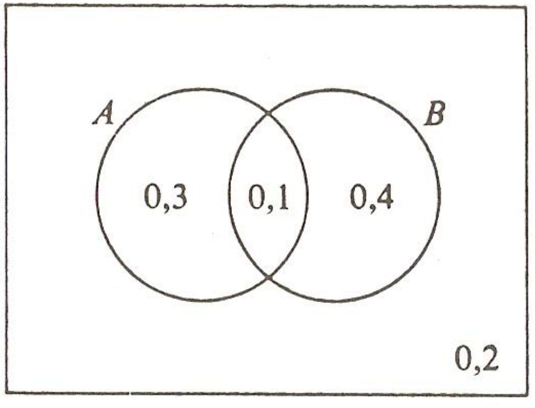
  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2) \times P(A_1) = 1/5 \times 2/6 = 1/15.$

- **Obs.:** Muito embora a solução incorreta apresente o mesmo valor numérico, a identificação de 1/5 com $P(A_2)$ é incorreta, pois 1/5 representa $P(A_2|A_1)$, sendo que $P(A_2)$ pode ser calculada corretamente, pelo Teorema da Probabilidade Total

  $P(A_2) = P(A_2|A_1) \times P(A_1) + P(A_2|\bar{A}_1) \times P(\bar{A}_1) = 1/5 \times 2/6 + 2/5 \times 4/6 = 1/3.$

3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

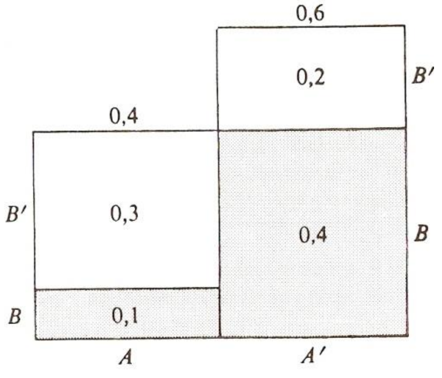
- A abordagem esquemática auxilia a compreensão da probabilidade condicionada. Sejam dois eventos A e B associados a um espaço amostral, com as probabilidades indicadas no Diagrama de Venn.



- Tem-se $P(A \cap B) = 0{,}1$; $P(A) = 0{,}1+0{,}3 = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}1+0{,}4 = 0{,}5$.

3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

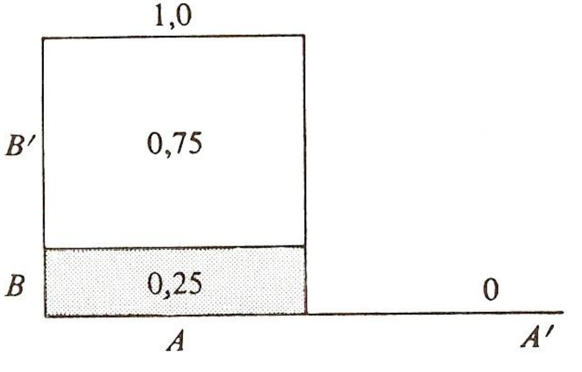
- Esses eventos podem ser representados pelas áreas dos retângulos:



- As regiões sombreadas indicam o evento B. O retângulo sombreado da esquerda representa $A \cap B$ e o da direita $A' \cap B$.

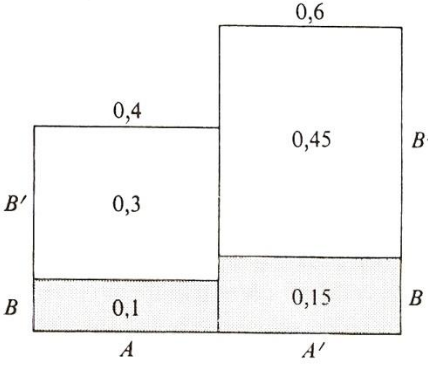
3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

- Para calcular P(B|A), necessitamos somente considerar A, isto é, A′ pode ser ignorado no cálculo. Logo a proporção de B em A é 1/4, igual a P(B|A). Da mesma forma, P(B′|A) = 3/4.



3.4 Considerações Esquemáticas; Probabilidade Condicionada e Independência

- Pela abordagem esquemática, podemos também ilustrar a noção de **independência**. Suponha que A e B sejam como indicado na figura abaixo.



- Como as proporções nos dois retângulos que representam A e A′, são as mesmas, 3:1, teremos a independência entre A e B e:

$$P(B) = 0.1 + 0.15 = 0,25 \text{ e } P(B|A) = 0,1/0,4 = 0,25.$$